**Dynamical Breaking and restoration chiral and color symmetries in the static Einstein universe**

D. Ebert, A.V. Tyukov and V.Ch. Zhukovsky

hep-th/0703213

なんとなくのあらすじとちょっとしたコメントを付け加えて作っています。相当雑なので役に立つかどうか知りません。
題名の通り、アインシュタイン宇宙でのカイラル、カラー対称性の破れと回復を扱っています。アインシュタイン宇宙といっていますが、簡単に言えば、時間に依存していない計量による曲がった時空のことです。
この論文はほぼ計算を行っていくだけなので、計算を無視すれば難しい話ではないと思います。

- 前置き

  1990 年代に、カイラル対称性の破れへの重力の効果がいろいろと調べられたそうです。例としては、負の曲率を持つ空間では弱結合でカイラル対称性の破れが起こるといったことです。このとき、重力効果を、小さな曲率を使ったフェルミオン伝播関数の展開 (曲率の線形項のみを考える) として扱っていたようです。この話はこれを受けて、非摂動的に扱うというものです。

- 目的

  - 非摂動的に計算。重力場を背景に持たせて計算していく
  - カイラル対称性だけでなく、重力場がカラー超伝導 (カラー対称性) に影響するか調べる

  ちなみに、これのカラー対称性を抜いたものが hep-ph/0602186 です。

  先にこの論文の注意をしておきます

  平坦な場合では、真空での南部・Jona-Lasinio モデルの数値計算で現われる正則化のパラメータ $\Lambda$ は、通常実験値に合うように選ばれています。しかし、曲がった時空上では、$\Lambda$ を決めるのに新しい実験的、理論的な重力場背景でのカイラル QCD の結果が必要になってきます。なので、ここでは重力場による効果を定量的 (量的な影響) に調べています。

- 準備

  使う知識を並べておきます。並べるだけなので、説明はほとんど省きます。

  ▷ カイラル対称性
  カイラル変換

$$SU_A(2)\ :\ \psi\ \Rightarrow\ \exp[i\frac{\gamma^5\theta^a\tau^a}{2}]\psi$$

$$U_A(1)\ :\ \psi\ \Rightarrow\ \exp[i\gamma^5\alpha]\psi$$

  に対して不変であるということです。右巻きと左巻きを混ぜるために、質量項はカイラル変換に対して不変でない

▷ 南部-Jona-Lasinio モデル ($SU(2)$)

$$\mathcal{L} = \overline{q}i\gamma_\mu\partial^\mu q + G[(\overline{q}q)^2 + (\overline{q}i\gamma^5\tau^a q)^2]$$

ギャップ方程式

$$M = 2iG\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}S(p)\ ,\ S(p) = \frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - M}$$

カイラル対称性の破れ：$M \neq 0$

オーダパラメータ：$< \overline{q}q >$

▷ 有限温度・密度

分配関数

$$Z = \int\mathcal{D}\phi\int\mathcal{D}\pi\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\left(i\pi\frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi,\phi) + \mu\mathcal{N}\right)\right]$$

ゼロ温度から有限温度への基本的な置き換え

$$p_0\ \Rightarrow\ i\omega_n\ ,\ \omega_n = 2\pi T(n+\frac{1}{2})$$

$$\int\frac{dp_0}{2\pi}\ \Rightarrow\ iT\sum_n$$

▷ カラー超伝導

カラー超伝導はフレーバの数で分けられていて

・2 フレーバ　：2 flavor color superconductivity(2SC)
・3 フレーバ　：color flavor locking(CFL)

ここで使うのは 2SC なので、2SC だけを考えます。

カラー超伝導の大まかな構成は通常の超伝導にカラーとフレーバの自由度を加えたものです。物性では電子-電子対によってクーパー対を作っていましたが、これをクォークで行います。クーパー対の生成において必要なのは引力であって、これはクォーク・クォーク相互作用の中にいます。2 つのクォーク (クォーク対といったります、diquark) を考えるとカラーの自由度に対して

$$SU(3)_C \times SU(3)_C$$

という群を作っています。このとき、群論の話から

$$3 \otimes 3 = \overline{3} \oplus 6$$

というように分解されます。このとき $\overline{3}$ は反 3 重項で、この部分の相互作用が引力に対応します。なので、引力はカラーに対して反対称になっているときに生じます。

このことを踏まえて、クォーク対によるクーパー対を作ります。クーパー対は運動量 0、スピン 0 のボソンとして作られます。運動量 0 はそのままなので放置します。2 つのクォークでスピン 0 を作るためには、スピンの交換に対して反対称になっている必要があります。このことは、スピン 1/2 の 2 つの粒子の合成を考えれば分かります。そして、カラーに対しては引力を作るために反対称、フレーバに対してはパウリの排他律からフレーバの交換に対して反対称となります。よってまとめると、それぞれの交換に対して

スピン　：反対称
カラー　：反対称
フレーバ　：反対称

でなければいけないことになります。この条件を満たしたクォーク・クォーク凝縮 (クーパー対) は

$$< qq >^k \sim \epsilon_{ab}\epsilon^{ijk} qC\gamma_5 q$$

と書けます。$C$ は荷電共役演算子で $C = i\gamma_0\gamma_2$ です。$C\gamma_5$ によってスピノール成分に対して反対称でスカラーとなっています。$\epsilon_{ab}, \epsilon^{ijk}$ はフレーバとカラーに対する反対称テンソルです。$q$ に添え字をつけていませんが、カラー、フレーバ、スピノールの添え字があります。

この表記で気が付くと思いますが、カラーの添え字が一つ浮いています ($k$ のこと)。これが 2SC の特徴で、余っているカラーの方向を固定することができます (カラー空間での回転の自由度によって)。そのため、カラーの対称性が $SU(3)_C$ から $SU(2)_C$ に壊れます。これによってグルーオンは質量を獲得し、マイスナー効果のようなものを作り出します。

▷ 共変微分

曲がった時空上での共変微分については一般相対論の「スピノールの共変微分」を見てください。表記や定義が若干違っていますが、同じことです。

- 本題

やっていくことは、南部・Jona-Lasinio モデルを曲がった時空上で計算していくというものです。いちいち式を書くのが面倒なので、論文の式番号を使ってしまいます。方向性は、熱力学ポテンシャル、つまりゼロ温度での有効ポテンシャルを求めるというものです。で、熱力学ポテンシャルが分かれば、対称性がどうなっているのかが分かるので、そこから対称性の破れと回復を見ようという流れです。ここら辺は自発的対称性の破れの話と同じです (対称性が破れていなければ U 字型、破れているとワインボトル型といったものです)。

ちなみに、(4) 式でのカラー超伝導を引き起こす相互作用項は、Fierz 変換によって求められているものです (単純にクォーク対凝縮を起こさせるための相互作用項だと思ってしまっても大丈夫そうですが)。(4) 式から (5) 式へは、ボソン化

$$\int \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp\Big[-i\int d^4x \frac{N_c}{2G_1}(\sigma^2+\pi^2)\Big]$$

を挟み込んで、変数変換

$$\sigma = \sigma + \frac{G}{N_c}\overline{\psi}\psi \ , \ \pi = \pi + \frac{G}{N_c}\overline{\psi}i\gamma^5 t^a\psi$$

を行うことで

$$\frac{G_1}{2N_c}[(\overline{\psi}\psi)^2+(\overline{\psi}i\gamma^5t^a\psi)^2]-\frac{N_c}{2G_1}(\sigma^2+\frac{G_1^2}{N_c^2}(\overline{\psi}\psi)^2+2\frac{G_1}{N_c}\sigma\overline{\psi}\psi+\pi^2+\frac{G_1^2}{N_c^2}(\overline{\psi}i\gamma^5t^a\psi)^2+2\frac{G_1}{N_c}\pi\overline{\psi}i\gamma^5t^a\psi)$$

$$=-\frac{N_c}{2G_1}(\sigma^2+2\frac{G_1}{N_c}\sigma\overline{\psi}\psi+\pi^2+2\frac{G_1}{N_c}\pi\overline{\psi}i\gamma^5t^a\psi)$$

カラー超伝導項は

$$\int\mathcal{D}\Delta^*\mathcal{D}\Delta\exp\Big[-i\int d^4x\frac{N_c}{G_2}(\Delta^*\Delta)\Big]$$

変数変換は

$$\Delta^*=\Delta^*+\frac{G_2}{N_c}i\overline{\psi}C\epsilon\epsilon^b\gamma^5\overline{\psi}^t\ ,\ \Delta=\Delta+\frac{G_2}{N_c}i\psi^tC\epsilon\epsilon^b\gamma^5\psi$$

によって

$$\frac{G_2}{N_c}[i\overline{\psi_c}\epsilon\epsilon^b\gamma^5\psi][i\overline{\psi}\epsilon\epsilon^b\gamma^5\psi_c]-\frac{N_c}{G_2}\Delta^*\Delta$$

$$=\frac{G_2}{N_c}[i\psi^tC\epsilon\epsilon^b\gamma^5\psi][i\overline{\psi}\epsilon\epsilon^b\gamma^5C\overline{\psi}^t]-\frac{N_c}{G_2}\Delta^*\Delta$$

$$=\frac{G_2}{N_c}[i\psi^tC\epsilon\epsilon^b\gamma^5\psi][i\overline{\psi}\epsilon\epsilon^b\gamma^5C\overline{\psi}^t]-\frac{N_c}{G_2}(\Delta^*+\frac{G_2}{N_c}i\overline{\psi}C\epsilon\epsilon^b\gamma^5\overline{\psi}^t)(\Delta+\frac{G_2}{N_c}i\psi^tC\epsilon\epsilon^b\gamma^5\psi)$$

$$=-\frac{N_c}{G_2}\Delta^*\Delta-\frac{G_2}{N_c}\Delta i\overline{\psi}C\epsilon\epsilon^b\gamma^5\overline{\psi}^t-\frac{G_2}{N_c}\Delta^*i\psi^tC\epsilon\epsilon^b\gamma^5\psi$$

ここからは、単純な計算なので一気に飛びます。南部・Jona-Lasinio モデルを使う時にはよく使う、場の真空期待値を定数とする mean-field 近似を使っているだけです。ちなみに、非摂動的と言っているのは、mean-field 近似のもとでの非摂動的な取り扱いです。

$\Delta$ が 2SC がいるかどうかを判別します。別の言い方をすれば、カラー対称性が回復している ($\Delta=0$) か破られているか ($\Delta\neq 0$) のオーダーパラメータです。

(11) 式のように書けるのは、カラー超伝導のところで触れたように、$\Delta^a$ の添え字はどこかの方向に固定することができるためです。大抵は $a=3$(青色) に固定します。そのため、反対称テンソルが $\epsilon_{ab3}$ のようになり、$a$ と $b$ は $1,2$ しか選べなくなります。よって、$q_3$ のときには $\Delta^3$ の項が消えて、$q_1,q_2$ の場合だけが生き残ります。

注意として、(13) 式の下にある行列式は、$A,B,\overline{A}$ が行列のときのものです。

(14) 式の最初の行列式はスピノール、座標、フレーバに対してで、二番目はスピノール、座標、フレーバ、2 つのカラー自由度に対してです。

(15) 式は、行列式

$$\det(BAB^{-1}) = \det A$$

という性質から、$\gamma_5$ によって ($\gamma_5 = \gamma_5^{-1}$)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log\det[i\hat{\nabla} - \sigma + \mu\gamma_0] + \frac{1}{2}\log\det[i\hat{\nabla} - \sigma + \mu\gamma_0] \\
&= \frac{1}{2}\log\det[i\hat{\nabla} - \sigma + \mu\gamma_0] + \frac{1}{2}\log\det[\gamma_5(i\hat{\nabla} - \sigma + \mu\gamma_0)\gamma_5] \\
&= \frac{1}{2}\log\det[(i\hat{\nabla} - \sigma + \mu\gamma_0)\gamma_5(i\hat{\nabla} - \sigma + \mu\gamma_0)\gamma_5] \\
&= \frac{1}{2}\log\det[-\hat{\nabla}\gamma_5\hat{\nabla}\gamma_5 - i\sigma\hat{\nabla}\gamma_5\gamma_5 + i\mu\hat{\nabla}\gamma_5\gamma_0\gamma_5 - i\sigma\gamma_5\hat{\nabla}\gamma_5 + \sigma^2\gamma_5\gamma_5 - \mu\sigma\gamma_5\gamma_0\gamma_5 \\
&\qquad + i\mu\gamma_0\gamma_5\hat{\nabla}\gamma_5 - \mu\sigma\gamma_0\gamma_5\gamma_5 + \mu^2\gamma_0\gamma_5\gamma_0\gamma_5] \\
&= \frac{1}{2}\log\det[\hat{\nabla}\hat{\nabla} - i\mu\hat{\nabla}\gamma_0 + \sigma^2 - i\mu\gamma_0\hat{\nabla} - \mu^2] \\
&= \frac{1}{2}\log\det[\hat{\nabla}\hat{\nabla} - i\mu\gamma_\mu\nabla^\mu\gamma_0 - i\mu\gamma_0\gamma_\mu\nabla^\mu + \sigma^2 - \mu^2] \\
&= \frac{1}{2}\log\det[\hat{\nabla}\hat{\nabla} - i\mu\gamma_\mu\nabla^\mu\gamma_0 - i\mu(2g_{0\mu} - \gamma_\mu\gamma_0)\nabla^\mu + \sigma^2 - \mu^2] \\
&= \frac{1}{2}\log\det[\gamma_\mu\gamma_\nu\nabla^\mu\nabla^\nu - 2i\mu\nabla_0 + \sigma^2 - \mu^2]
\end{aligned}$$

(24)〜(27) では「gr-qc/9505009v1」での、球座標での偶数を使えばいいです。

(28) 式の第二項の係数 2 はカラーによるものです。

多分、(28) 式では 1/2 が抜けています。このことは、相互作用なしでのフェルミオンでの熱力学ポテンシャルの和の計算を見てみると

$$\begin{aligned}
\log Z &= \sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log[\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)^2] + \sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log[\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)^2] \\
&= 2\sum_{\boldsymbol{p}}(\frac{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)}{2} + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)})) + 2\sum_{\boldsymbol{p}}(\frac{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)}{2} + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)})) \\
&= 2\sum_{\boldsymbol{p}}[\beta\omega_{\boldsymbol{p}} + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)}) + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)})]
\end{aligned}$$

このように最後で 2 倍されるので、1/2 がないと (32) 式になりません。もしかした、自由度を見落としているだけかもしれませんが。

計算はこれで終わって、数値計算に移ります。熱力学ポテンシャルの数値計算において、よく使われる方法ですが、$\Omega(\sigma,\Delta)$ が $\Omega(0,0)$ で 0 になるように熱力学ポテンシャルを規格化します。なので、$\Omega(\sigma,\Delta) - \Omega(0,0)$ として、$\Omega(0,0)$ での値を引いておくようにしています。

次に正則化ですが、今の場合 $l$ の和に対して発散が起きています。なので、$l$ の和に対して $e^{-\omega_l/\Lambda}$ として、切断のパラメータを入れます。そして、物理量は $\Lambda$ によって次元を持たせてやります。

ギャップ方程式は、熱力学ポテンシャル停留点として

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}=0\ ,\ \frac{\partial\Omega}{\partial\Delta}=0$$

このように求められます。

さらに、南部・Jona-Lasinio モデルを扱う時の注意点にも関係しますが、結合定数についてです。基本的に、南部・Jona-Lasinio モデルにおいて結合定数は任意に取ることができます。これは理論の中に結合定数を決めるものが用意されていないためです。そのため、真空 (ゼロ温度) において、カイラル対称性に対する結合定数 $G_1$ は実験値との対応から決めています (パイオンの質量に一致するようにとか)。しかし、カラー超伝導に対する $G_2$ では実験値がないので実験との対応から決められません。そのため、Fierz 変換による係数の比較から決めます。今の $G_1$、$G_2$ の取り方からだと

$$G_1:G_2=8:3\quad(\frac{G_1}{2}:G_2=4:3)$$

となっています。ただし、これは厳密なものではなく、近似的なものであることを気に留めておいたほうがいいかもしれません。

後は数値計算の結果を論文から見てください。図の振る舞いをまとめると

▷ 図 1〜3：ギャップ方程式の解の $\mu$ 依存性。

$\mu_c$ でカイラル対称性は一次相転移を起こし、カラー対称性はクォーク対凝縮 $\Delta$ が現われることで同様に一次相転移を起こしています。

クォーク対凝縮が高密度で 0 になっていることには注意してください。平坦な時空での弱結合 QCD ではクォーク対凝縮は 0 になっていないそうです。この性質は南部・Jona-Lasinio モデルの正確さなのか不正確さなのか分かっていません。

▷ 図 5：$\mu-R$ での相構造

1 はカイラル、カラー対称性を持っている相：$\sigma=0,\Delta=0$

2 はカイラル対称性が破られ、カラー対称性を持っている相：$\sigma\neq0,\Delta=0$

3 はカイラル対称性を持ち、カラー対称性が破られている相：$\sigma=0,\Delta\neq0$

ダッシュ線は一次相転移、実線は二次相転移

平坦な場合と同じように、二つの凝縮が混ざっている相は存在していません。

二次相転移の振動は、フェルミオンのエネルギーレベルが離散的であることから説明できるだろうといっています。これは磁場での、フェルミオンのエネルギーレベルが離散的 (ランダウ準位) であるときの効果と似ているからだそうです。

二次相転移の $R$ 一定の縦線について触れておきます。これについて論文の方は一言で済ませていて何を言っているのかよく分からないので、個人的な解釈を載せておきます。

カラー超伝導部分を無視した熱力学ポテンシャル

$$\Omega=\frac{\sigma^2}{4G_1}-\frac{1}{V}\sum_{l=0}d_le^{-\omega_l}[\mu+(E_l-\mu)\theta(E_l-\mu)]$$

において、$\mu$ が $E_0$ より小さい時 ($E_l$ は $l$ の増加によって増えていくので、$E_0$ が最低値)

$$\Omega=\frac{\sigma^2}{4G_1}-\frac{1}{V}\sum_{l=0}d_le^{-\omega_l}E_l$$

そして $\sigma$ は $\mu$ に対して定数なので、これは曲率にのみ依存します。つまり、$\mu$ に対して曲率の臨界点 $R_c$ は動きません。これが、縦線となる理由だろうと思います。一方で、$E_0$ より $\mu$ が大きくなれば

$$\frac{1}{V}d_0e^{-\omega_l}\mu$$

の項が生き残るので、$R_c$ が動き出します。同様に $E_1, E_2$ と続いていくことで $R_c$ が動き続けることになります。

▷ 図 6、$\mu - R$ と $\mu - T$ の相構造
凝縮が混ざっている相がない (ベクトル相互作用を加えると混ざるらしい)。
温度の増加に対して、カイラル、カラー対称性は回復する。
温度と重力の効果は似ている。

- 結論

重力の効果は温度によるものと似ている

相構造に振動したラインが現われる (フェルミオンの離散的なエネルギー準位のせい)

高温・高密度、高曲率でカラー対称性は回復する (南部・Jona-Lasinio モデルの性質)

- 問題

モデルに現実性がなさすぎる (パラメータ依存性)。

宇宙論的に対応したモデルの使用