# 「1ループ自己エネルギーの計算」の途中計算

- 和の計算

$$I_1 = T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m - E_{\boldsymbol{k}}}\ ,\ I_2 = T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m + E_{\boldsymbol{k}}}$$

$$I_3 = T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m - E_{\boldsymbol{k}}}\ ,\ I_4 = T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m + E_{\boldsymbol{k}}}$$

複素積分に置き換えて計算します。手間が増えますが、一応ジョルダンの補題が見えやすいように行っていきます。

$I_1$ は

$$\begin{aligned}
I_1 &= T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m - E_{\boldsymbol{k}}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{z - i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z + i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz\Big(\frac{-1}{z - i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z + i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z} - 1} \\
&= I_1^{vac} + I_1^T
\end{aligned}$$

$I_1^{vac}$ の括弧内は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z - i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}} &= \frac{-1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\Big(\frac{1}{z - (i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})} - \frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
-\frac{1}{z + i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}} &= \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\Big(\frac{1}{z + (i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})} - \frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}}\Big)
\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
I_1^{vac} &= \frac{-1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})} - \frac{1}{z+(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})} - \frac{1}{z-E_{\boldsymbol{k}}} + \frac{1}{z+E_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
&= \frac{-1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2}\Big(\frac{2(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})}{z-(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})}\frac{1}{z+(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})} - \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{z-E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{z+E_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
&= \frac{-1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2}\Big(\frac{2(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})}{z^2-(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})^2} - \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{z^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\Big) \\
&= \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{2}\Big(\frac{2(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})}{z'^2+(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})^2} - \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{z'^2+E_{\boldsymbol{k}}^2}\Big) \\
&= \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{2}\Big(\frac{2(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})}{[z'+(-\omega_n - iE_{\boldsymbol{q}})][z'-(-\omega_n - iE_{\boldsymbol{q}})]} - \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{(z'+iE_{\boldsymbol{k}})(z'-iE_{\boldsymbol{k}})}\Big)
\end{aligned} \tag{1}
$$

これはジョルダンの補題によって上半円をつけられるので、第一項では $z' = \omega_n + iE_{\boldsymbol{q}}$、第二項では $z' = iE_{\boldsymbol{k}}$ の極を拾うことで (経路が反時計回りなので符号は変わらない)

$$
\begin{aligned}
I_1^{vac} &= \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2}\Big(\frac{2(i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})}{2(\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}})} - \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{2iE_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
&= \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2}(i+i) \\
&= \frac{-1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

ちなみに上半円が消えることは三角不等式 $|z^2+a^2| \geq |z|^2 - |a|^2$ から分かります。関数 $f = (z^2+a^2)^{-1}$ では、$z = Re^{i\theta}$ とすれば $|f(Re^{i\theta})| \leq (R^2-a^2)^{-1}$ になるので、$R|f|$ は $R \to \infty$ で $0$ になることから上半円が積分に寄与しないことが分かります。$I_1^T$ は右半円をつければいいので (時計回りなのでマイナスをつける)

$$
\begin{aligned}
I_1^T &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \Big(\frac{-1}{z-i\omega_n+E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z-E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z+i\omega_n-E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z}-1} \\
&= -\Big(\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1} - \frac{1}{-i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}} + E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{e^{\beta(-i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}-1}\Big) \\
&= -\Big(\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1} - \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}} - E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{q}}}+1}\Big) \\
&= -\left(n_B(E_{\boldsymbol{k}}) - n_F(E_{\boldsymbol{q}})\right)\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}
\end{aligned}
$$

$i\omega_n$ はフェルミオンの松原振動数なので $\exp[-i\omega_n] = -1$ で、

$$
n_B(E) = \frac{1}{e^{\beta E}-1}\ ,\ n_F(E) = \frac{1}{e^{\beta E}+1}
$$

としています。よって $I_1$ は

$$I_1 = \frac{-1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}} - (n_B(E_{\boldsymbol{k}}) - n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}} = -(1 + n_B(E_{\boldsymbol{k}}) - n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}$$

$I_2$ は

$$\begin{aligned}
I_2 &= T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m + E_{\boldsymbol{k}}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{z - i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z + i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \Big(\frac{-1}{z - i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z + i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z} - 1} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \Big(\frac{-1}{z - (i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}})}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z + i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z} - 1} \\
&= -\Big(-\frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} - \frac{1}{-i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta(-i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})} - 1}\Big) \\
&= -\Big(-\frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} - \frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{q}}} + 1}\Big) \\
&= (n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{q}}}
\end{aligned}$$

$I_1$ のときから $E_{\boldsymbol{k}}$ の符号が反転しているので、(1) と (2) から分かるように、$I_1^{vac}$ に対応する $I_2^{vac}$ は打ち消しあって 0 になります。

$I_3$ は

$$\begin{aligned}
I_3 &= T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m - E_{\boldsymbol{k}}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{z - i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z + i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \Big(\frac{-1}{z - i\omega_n - E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z - E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z + i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z + E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z} - 1} \\
&= I_3^{vac} + I_3^T
\end{aligned}$$

今度は $I_1$ に対して $E_{\boldsymbol{q}}$ の符号が反転しているので

$$I_3^{vac} = \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{2}\Big(\frac{2(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}{[z' + (-\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}})][z' - (-\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}})]} - \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{(z' + iE_{\boldsymbol{k}})(z' - iE_{\boldsymbol{k}})}\Big)$$

なので第一項は $z' = -\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}}$ の極を拾って

$$I_3^{vac} = \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2}(\frac{2(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}{2(-\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}})} - \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{i2E_{\boldsymbol{k}}}) = \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2}(-i+i) = 0$$

$I_3^T$ は

$$\begin{aligned}
I_3^T =& \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \Big(\frac{-1}{z-(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}\frac{1}{z-E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z+i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z}-1} \\
=& -\Big(\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1} + \frac{-1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}-1}\Big) \\
=& -(\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + \frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})) \\
=& -(n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}
\end{aligned}$$

よって $I_3$ は

$$I_3 = -(n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}$$

$I_4$ は

$$\begin{aligned}
I_4 =& T\sum_m \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{i\omega_m + E_{\boldsymbol{k}}} \\
=& \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{z-(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}\frac{1}{z+E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z+i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z-E_{\boldsymbol{k}}}\Big) \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz \Big(\frac{-1}{z-(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}\frac{1}{z+E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z+i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z-E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z}-1} \\
=& I_4^{vac} + I_4^T
\end{aligned}$$

$I_4^{vac}$ は $I_4^{vac}$ で $E_{\boldsymbol{k}}$ と $E_{\boldsymbol{q}}$ の符号を反転させたものなので

$$\begin{aligned}
I_4^{vac} =& \frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{2}\Big(\frac{2(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}{[z' + (-\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}})][z' - (-\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}})]} + \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{(z' + iE_{\boldsymbol{k}})(z' - iE_{\boldsymbol{k}})}\Big) \\
=& \frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2}(\frac{2(i\omega_n + E_{\boldsymbol{q}})}{2(-\omega_n + iE_{\boldsymbol{q}})} + \frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{i2E_{\boldsymbol{k}}}) \\
=& \frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}\frac{i}{2}(-i-i) \\
=& \frac{1}{i\omega_n + E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{q}}}
\end{aligned}$$

$I_4^T$ は

$$
\begin{aligned}
I_4^T &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz\Big(\frac{-1}{z-(i\omega_n+E_{\boldsymbol{q}})}\frac{1}{z+E_{\boldsymbol{k}}} - \frac{1}{z+i\omega_n+E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{z-E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta z}-1} \\
&= -\Big(\frac{-1}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta(i\omega_n+E_{\boldsymbol{q}})}-1} - \frac{1}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}\Big) \\
&= -\frac{1}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}n_F(E_{\boldsymbol{q}}) + \frac{1}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}n_B(E_{\boldsymbol{k}})
\end{aligned}
$$

よって、$I_4$ は

$$
I_4 = (1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}
$$

- ゼロ温度極限の計算

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_+ &= \frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2))(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&\quad -\theta(-p^2)\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}((|\boldsymbol{p}|-p_0)(\pi^2T^2+p_0|\boldsymbol{p}|)+p_0m^2) \\
&= -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}J-\theta(-p^2)\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}((|\boldsymbol{p}|-p_0)(\pi^2T^2+p_0|\boldsymbol{p}|)+p_0m^2)
\end{aligned}
$$

$J$ は

$$
\begin{aligned}
J &= -\int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2))(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&= \int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|(|\boldsymbol{p}|^2-p_0^2+m^2-2(|\boldsymbol{p}|-p_0)|\boldsymbol{q}|)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&= (|\boldsymbol{p}|^2-p_0^2+m^2)\int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&\quad -2(|\boldsymbol{p}|-p_0)\int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&= \frac{1}{2}(|\boldsymbol{p}|^2-p_0^2+m^2)\int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|(\coth\frac{\beta(|\boldsymbol{q}|-p_0)}{2}-\tanh\frac{\beta|\boldsymbol{q}|}{2}) \\
&\quad -(|\boldsymbol{p}|-p_0)\int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|(\coth\frac{\beta(|\boldsymbol{q}|-p_0)}{2}-\tanh\frac{\beta|\boldsymbol{q}|}{2}) \\
&= \frac{1}{2}(-p^2+m^2)(B_1-F_1)-(|\boldsymbol{p}|-p_0)(B_2-F_2)
\end{aligned}
$$

ボソンとフェルミオンの分布関数の変形は

$$n_B(E) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth(\frac{1}{2}\beta E)\ ,\ n_F(E) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh(\frac{1}{2}\beta E)$$

を使っています。

フェルミオン部分の積分は $F_1$ は完全に実行できて

$$\begin{aligned}
F_1 = \int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}| \tanh\frac{\beta|\boldsymbol{q}|}{2} &= \frac{2}{\beta}(\log\cosh x_- - \log\cosh x_+) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log\frac{e^{x_-}+e^{-x_-}}{2} - \log\frac{e^{x_+}+e^{-x_+}}{2}) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log(e^{x_-}+e^{-x_-}) - \log(e^{x_+}+e^{-x_+}))
\end{aligned}$$

$F_2$ では一部が実行しきれなく

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}| \tanh\frac{\beta|\boldsymbol{q}|}{2} \\
&= \frac{4}{\beta^2}\int_{\beta E^+/2}^{\beta E^-/2} dx\ x\tanh x \\
&= \frac{4}{\beta^2}\big(\big[x\log\cosh x\big]_{x_+}^{x_-} - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log\cosh x\big) \\
&= \frac{4}{\beta^2}\big(\big[x\log\cosh x\big]_{x_+}^{x_-} - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log\frac{e^x+e^{-x}}{2}\big) \\
&= \frac{4}{\beta^2}\big(\big[x\log\cosh x\big]_{x_+}^{x_-} - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x+e^{-x}) - \log(\frac{1}{2})\int_{x_+}^{x_-} dx\big) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(x_-\log\cosh x_- - x_+\log\cosh x_+ - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x+e^{-x}) - (x_- - x_+)\log\frac{1}{2}) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(x_-\log\frac{e^{x_-}+e^{-x_-}}{2} - x_+\log\frac{e^{x_+}+e^{-x_+}}{2} - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x+e^{-x}) - (x_- - x_+)\log\frac{1}{2}) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(x_-\log(e^{x_-}+e^{-x_-}) - x_+\log(e^{x_+}+e^{-x_+}) + (x_- - x_+)\log\frac{1}{2} \\
&\qquad - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x+e^{-x}) - (x_- - x_+)\log\frac{1}{2}) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(x_-\log(e^{x_-}+e^{-x_-}) - x_+\log(e^{x_+}+e^{-x_+}) - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x+e^{-x}))
\end{aligned}$$

$T=0$ の極限をとるために、$x_\pm$ の符号を考慮します。時間的、空間的に分けていきます。時間的な場合ですが、デルタ関数によって $p_0^2 > \boldsymbol{p}^2 + m^2$ という制限がかかっています。これ以降の計算では $T=0$ $(\beta\to\infty)$ の極限を考慮しています。

時間的 $p_0^2 > \boldsymbol{p}^2 + m^2$ で $p_0 > 0$ の場合

$$x_- = \frac{\beta E^-}{2} > 0\ ,\ x_+ = \frac{\beta E^+}{2} > 0$$

$F_1$ は

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{2}{\beta}(\log(e^{x_-} + e^{-x_-}) - \log(e^{x_+} + e^{-x_+})) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log e^{x_-} + \log(1 + e^{-2x_-}) - \log e^{x_+} - \log(1 + e^{-2x_+})) \\
&\Rightarrow \frac{2}{\beta}(x_- - x_+) \\
&= E_- - E_+
\end{aligned} \tag{3}$$

矢印は $T = 0$ の極限で消えるものを消していることを意味しています。$F_2$ は

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{4}{\beta^2}(x_- \log(e^{x_-} + e^{-x_-}) - x_+ \log(e^{x_+} + e^{-x_+}) - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x + e^{-x})) \\
&\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(x_-^2 - x_+^2 - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log e^x(1 + e^{-2x}))
\end{aligned}$$

このとき積分は

$$\int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log e^x(1 + e^{-2x})\ \ \Rightarrow\ \int_{x_+}^{x_-} dx\ x$$

と近似できるので

$$\begin{aligned}
F_2 &\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(x_-^2 - x_+^2) - \frac{2}{\beta^2}(x_-^2 - x_+^2) \\
&= \frac{2}{\beta^2}(x_-^2 - x_+^2) \\
&= \frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

時間的で $p_0 < 0$ の場合

$$x_- = \frac{\beta E^-}{2} < 0\ ,\ x_+ = \frac{\beta E^-}{2} < 0$$

$F_1$ は

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{2}{\beta}(\log(e^{x_-} + e^{-x_-}) - \log(e^{x_+} + e^{-x_+})) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log e^{-x_-} + \log(1 + e^{2x_-}) - \log e^{-x_+} - \log(1 + e^{2x_+})) \\
&\Rightarrow\ -\frac{2}{\beta}(x_- - x_+) \\
&=\ -(E_- - E_+)
\end{aligned} \tag{5}
$$

$F_2$ は

$$
\begin{aligned}
F_2 &= \frac{4}{\beta^2}(x_- \log(e^{x_-} + e^{-x_-}) - x_+ \log(e^{x_+} + e^{-x_+}) - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x + e^{-x})) \\
&\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(-x_-^2 + x_+^2 + \int_{x_+}^{x_-} dx\ x) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(-x_-^2 + x_+^2 + \frac{1}{2}x_-^2 - \frac{1}{2}x_+^2) \\
&=\ -\frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2)
\end{aligned} \tag{6}
$$

空間的 $p_0^2 < |\boldsymbol{p}|^2$ の場合では

$$
x_- = \frac{\beta E^-}{2} > 0\ ,\ x_+ = \frac{\beta E^+}{2} < 0
$$

$F_1$ は

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{2}{\beta}(\log(e^{x_-} + e^{-x_-}) - \log(e^{x_+} + e^{-x_+})) \\
&= \frac{2}{\beta}(x_- + \log(1 + e^{-2x_-}) + x_+ - \log(1 + e^{2x_+})) \\
&\Rightarrow \frac{2}{\beta}(x_- + x_+) \\
&= E_- + E_+
\end{aligned} \tag{7}
$$

$F_2$ は

$$
F_2 = \frac{4}{\beta^2}(x_- \log(e^{x_-} + e^{-x_-}) - x_+ \log(e^{x_+} + e^{-x_+}) - \int_{x_+}^{x_-} dx\ \ \log(e^x + e^{-x}))
$$

$x_\pm$ の符号を考慮すれば

$$
\begin{aligned}
F_2 &\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(x_-^2+x_+^2-\int_{x_+}^{0}dx\ \log(e^x+e^{-x})-\int_0^{x_-}dx\ \log(e^x+e^{-x})) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(x_-^2+x_+^2-\int_{x_+}^{0}dx\ \log e^{-x}(1+e^{2x})-\int_0^{x_-}dx\ \log e^{x}(1+e^{-2x})) \\
&\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(x_-^2+x_+^2+\int_{x_+}^{0}dx\ x-\int_0^{x_-}dx\ x) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(x_-^2+x_+^2-\frac{1}{2}x_+^2-\frac{1}{2}x_-^2) \\
&= \frac{1}{2}(E_-^2+E_+^2)
\end{aligned} \tag{8}
$$

$B_1, B_2$ でも同様に行っていきます。$B_1$ の積分は

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|\coth\frac{\beta(|\boldsymbol{q}|-p_0)}{2} \\
&= \frac{2}{\beta}\int_{y^+}^{y^-} dy\coth y \\
&= \frac{2}{\beta}(\log|\sinh y_-|-\log|\sinh y_+|) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log|\frac{e^{y_-}-e^{-y_-}}{2}|-\log|\frac{e^{y_+}-e^{-y_+}}{2}|) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log|e^{y_-}-e^{-y_-}|-\log|e^{y_+}-e^{-y_+}|)
\end{aligned}
$$

$B_2$ では

$$
\begin{aligned}
B_2 =& \int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\coth\frac{\beta(|\boldsymbol{q}|-p_0)}{2} \\
=& \frac{2}{\beta}\int_{y_+}^{y_-} dy\ (\frac{2}{\beta}y+p_0)\coth y \\
=& \frac{4}{\beta^2}\int_{y_+}^{y_-} dy\ y\coth y + \frac{2p_0}{\beta}\int_{y_+}^{y_-} dy\ \ \coth y \\
=& \frac{4}{\beta^2}\big([y\log|\sinh y|]_{y_+}^{y_-} - \int_{y_+}^{y_-} dy\ \ \log|\sinh y|\big) + \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|\sinh y_-| - \log|\sinh y_+|\big) \\
=& \frac{4}{\beta^2}\big(y_-\log|\sinh y_-| - y_+\log|\sinh y_+| - \int_{y_+}^{y_-} dy\ \ \log|\sinh y|\big) + \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|\sinh y_-| - \log|\sinh y_+|\big) \\
=& \frac{4}{\beta^2}\big(y_-\log|e^{y_-}-e^{-y_-}| - y_+\log|e^{y_+}-e^{-y_+}| + (y_- - y_+)\log\frac{1}{2} - \int_{y_+}^{y_-} dy\ \ \log|\frac{e^y-e^{-y}}{2}|\big) \\
&+ \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|e^{y_-}-e^{-y_-}| - \log|e^{y_+}-e^{-y_+}|\big) \\
=& \frac{4}{\beta^2}\Big(y_-\log|e^{y_-}-e^{-y_-}| - y_+\log|e^{y_+}-e^{-y_+}| + (y_- - y_+)\log\frac{1}{2} \\
&- \int_{y_+}^{y_-} dy\ \ \log|e^y-e^{-y}| - \log(\frac{1}{2})\int_{y_+}^{y_-} dy\Big) + \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|e^{y_-}-e^{-y_-}| - \log|e^{y_+}-e^{-y_+}|\big) \\
=& \frac{4}{\beta^2}\big(y_-\log|e^{y_-}-e^{-y_-}| - y_+\log|e^{y_+}-e^{-y_+}| - \int_{y_+}^{y_-} dy\ \ \log|e^y-e^{-y}|\big) \\
&+ \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|e^{y_-}-e^{-y_-}| - \log|e^{y_+}-e^{-y_+}|\big)
\end{aligned}
$$

$y_\pm$ は

$$
y_- = \frac{\beta(E_- - p_0)}{2}\ ,\ y_+ = \frac{\beta(E_+ - p_0)}{2}
$$

符号が分かりやすいように変形すると

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\beta}y_- = E_- - p_0 = \frac{p^2-m^2}{2(p_0-|\boldsymbol{p}|)} - \frac{2(p_0^2-p_0|\boldsymbol{p}|)}{2(p_0-|\boldsymbol{p}|)} = \frac{-p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2+2p_0|\boldsymbol{p}|}{2(p_0-|\boldsymbol{p}|)} = -\frac{(p_0-|\boldsymbol{p}|)^2+m^2}{2(p_0-|\boldsymbol{p}|)} \\
\frac{2}{\beta}y_+ = E_+ - p_0 = \frac{p^2-m^2}{2(p_0+|\boldsymbol{p}|)} - \frac{2(p_0^2+p_0|\boldsymbol{p}|)}{2(p_0+|\boldsymbol{p}|)} = \frac{-p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2-2p_0|\boldsymbol{p}|}{2(p_0+|\boldsymbol{p}|)} = -\frac{(p_0+|\boldsymbol{p}|)^2+m^2}{2(p_0+|\boldsymbol{p}|)}
\end{aligned}
$$

時間的 $p_0^2 > \boldsymbol{p}^2 + m^2$ で $p_0 > 0$ の場合

$$
y_- < 0\ ,\ y_+ < 0
$$

$B_1$ は

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2}{\beta}(\log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - \log|e^{y_+} - e^{-y_+}|) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log|e^{-y_-}||e^{2y_-} - 1| - \log|e^{-y_+}||e^{2y_+} - 1|) \\
&= \frac{2}{\beta}(-y_- + \log|1 - e^{2y_-}| + y_+ - \log|1 - e^{2y_+}|) \\
&\Rightarrow \frac{2}{\beta}(-y_- + y_+) \\
&= -(E_- - E_+)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$B_2$ は

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{4}{\beta^2}\big(y_- \log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - y_+ \log|e^{y_+} - e^{-y_+}| - \int_{y_+}^{y_-} dy\ \log|e^y - e^{-y}|\big) \\
&\quad + \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - \log|e^{y_+} - e^{-y_+}|\big) \\
&= \frac{4}{\beta^2}\big(y_- \log e^{-y_-}|1 - e^{2y_-}| - y_+ \log e^{-y_+}|1 - e^{2y_+}| - \int_{y_+}^{y_-} dy\ \log|e^y - e^{-y}|\big) \\
&\quad + \frac{2p_0}{\beta}\big(\log e^{-y_-}|1 - e^{2y_-}| - \log e^{-y_+}|1 - e^{2y_+}|\big) \\
&\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(-y_-^2 + y_+^2) - \frac{4}{\beta^2}\int_{y_+}^{y_-} dy\ \log e^{-y}|1 - e^{2y}| + \frac{2p_0}{\beta}(-y_- + y_+) \\
&\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(-y_-^2 + y_+^2) + \frac{4}{\beta^2}\int_{y_+}^{y_-} dy\ y + \frac{2p_0}{\beta}(-y_- + y_+) \\
&= -\frac{4}{\beta^2}(y_-^2 - y_+^2) + \frac{4}{\beta^2}\frac{1}{2}(y_-^2 - y_+^2) + \frac{2p_0}{\beta}(-y_- + y_+) \\
&= -\frac{4}{\beta^2}\frac{1}{2}(y_-^2 - y_+^2) - \frac{2p_0}{\beta}(y_- - y_+) \\
&= -\frac{1}{2}((E_- - p_0)^2 - (E_+ - p_0)^2) - p_0(E_- - E_+) \\
&= -\frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2 - 2p_0E_- + 2p_0E_+) - p_0(E_- - E_+) \\
&= -\frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

時間的 $p_0^2 > \boldsymbol{p}^2 + m^2$ で $p_0 < 0$ の場合

$$
y_- > 0\ ,\ y_+ > 0
$$

$B_1$ は

$$\begin{aligned}
B_1 \ &= \frac{2}{\beta}(\log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - \log|e^{y_+} - e^{-y_+}|) \\
&= \frac{2}{\beta}(y_- + \log|1 - e^{2y_-}| - y_+ - \log|1 - e^{2y_+}|) \\
&\Rightarrow \ -\frac{2}{\beta}(-y_- + y_+) \\
&= E_- - E_+
\end{aligned} \tag{11}$$

$B_2$ は

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{4}{\beta^2}\big(y_- \log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - y_+ \log|e^{y_+} - e^{-y_+}| - \int_{y_+}^{y_-} dy \ \log|e^y - e^{-y}|\big) \\
&\quad + \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - \log|e^{y_+} - e^{-y_+}|\big) \\
&\Rightarrow \frac{4}{\beta^2}(y_-^2 - y_+^2 - \int_{y_+}^{y_-} dy \ y) + \frac{2p_0}{\beta}(y_- - y_+) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(y_-^2 - y_+^2 - \frac{1}{2}y_-^2 + \frac{1}{2}y_+^2) + \frac{2p_0}{\beta}(y_- - y_+) \\
&= \frac{4}{\beta^2}(\frac{1}{2}y_-^2 - \frac{1}{2}y_+^2) + \frac{2p_0}{\beta}(y_- - y_+) \\
&= \frac{1}{2}(E_- - p_0)^2 - \frac{1}{2}(E_+ - p_0)^2 + p_0(E_- - E_+) \\
&= \frac{1}{2}(E_-^2 + p_0^2 - 2p_0E_-) - \frac{1}{2}(E_+^2 + p_0^2 - 2p_0E_+) + p_0(E_- - E_+) \\
&= \frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2)
\end{aligned} \tag{12}$$

空間的 $p_0^2 < |\boldsymbol{p}|^2$ な場合

$$y_- > 0 \ , \ y_+ < 0$$

$B_1$ は

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2}{\beta}(\log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - \log|e^{y_+} - e^{-y_+}|) \\
&= \frac{2}{\beta}(\log|e^{y_-}||1 - e^{-2y_-}| - \log|e^{-y_+}||1 - e^{2y_+}|) \\
&\Rightarrow \frac{2}{\beta}(y_- + y_+) \\
&= E_- + E_+ - 2p_0
\end{aligned} \tag{13}$$

$B_2$ は

$$
\begin{aligned}
B_2 = &\frac{4}{\beta^2}\big(y_- \log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - y_+ \log|e^{y_+} - e^{-y_+}| - \int_{y_+}^{y_-} dy\ \ \log|e^{y} - e^{-y}|\big) \\
&+ \frac{2p_0}{\beta}\big(\log|e^{y_-} - e^{-y_-}| - \log|e^{y_+} - e^{-y_+}|\big) \\
\Rightarrow &\frac{4}{\beta^2}\big(y_-^2 + y_+^2 - \int_{y_+}^{0} dy\ \ \log|e^{y} - e^{-y}| - \int_{0}^{y_-} dy\ \ \log|e^{y} - e^{-y}|\big) + \frac{2p_0}{\beta}(y_- + y_+) \\
\Rightarrow &\frac{4}{\beta^2}\big(y_-^2 + y_+^2 + \int_{y_+}^{0} dy\ y - \int_{0}^{y_-} dy\ y\big) + \frac{2p_0}{\beta}(y_- + y_+) \\
= &\frac{4}{\beta^2}(y_-^2 + y_+^2 - \frac{1}{2}y_+^2 - \frac{1}{2}y_-^2) + \frac{2p_0}{\beta}(y_- + y_+) \\
= &\frac{1}{2}((E_- - p_0)^2 + (E_+ - p_0)^2) + p_0(E_- + E_+ - 2p_0) \\
= &\frac{1}{2}(E_-^2 + p_0^2 - 2p_0E_- + E_+^2 + p_0^2 - 2p_0E_+) + p_0E_- + p_0E_+ - 2p_0^2 \\
= &\frac{1}{2}(E_-^2 + E_+^2) - p_0^2
\end{aligned} \tag{14}
$$

というわけで、$F_1, F_2$ は (3)〜(8) で

$$
\begin{aligned}
\text{時間的}\ (p_0 > 0)\ &: F_1 = E_- - E_+\ ,\ F_2 = \frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2) \\
\text{時間的}\ (p_0 < 0)\ &: F_1 = -(E_- - E_+)\ ,\ F_2 = -\frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2) \\
\text{空間的}\ &: F_1 = E_- + E_+\ ,\ F_2 = \frac{1}{2}(E_-^2 + E_+^2)
\end{aligned}
$$

$B_1, B_2$ は (9)〜(14) で

$$
\begin{aligned}
\text{時間的}\ (p_0 > 0)\ &: B_1 = -(E_- - E_+)\ ,\ B_2 = -\frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2) \\
\text{時間的}\ (p_0 < 0)\ &: B_1 = E_- - E_+\ ,\ B_2 = \frac{1}{2}(E_-^2 - E_+^2) \\
\text{空間的}\ &: B_1 = E_- + E_+ - 2p_0\ ,\ B_2 = \frac{1}{2}(E_-^2 + E_+^2) - p_0^2
\end{aligned}
$$

よって、時間的で $p_0 > 0$ の場合

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(|\boldsymbol{p}|^2 - p_0^2 + m^2)(B_1 - F_1) = (p^2 - m^2)(E_- - E_+) = \frac{(p^2 - m^2)^2}{p^2}|\boldsymbol{p}| \\
&(|\boldsymbol{p}| - p_0)(B_2 - F_2) = -(|\boldsymbol{p}| - p_0)(E_-^2 - E_+^2) = -(|\boldsymbol{p}| - p_0)\frac{(p^2 - m^2)^2}{p^4}p_0|\boldsymbol{p}|
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}(|\boldsymbol{p}|^2 - p_0^2 + m^2)(B_1 - F_1) - (|\boldsymbol{p}| - p_0)(B_2 - F_2) \\
&= \frac{(p^2 - m^2)^2}{p^4} p^2 |\boldsymbol{p}| + \frac{(p^2 - m^2)^2}{p^4}(p_0 |\boldsymbol{p}|^2 - p_0^2 |\boldsymbol{p}|) \\
&= \frac{(p^2 - m^2)^2}{p^4}(p_0^2 |\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{p}|^3 + p_0 |\boldsymbol{p}|^2 - p_0^2 |\boldsymbol{p}|) \\
&= \frac{(p^2 - m^2)^2}{p^4} |\boldsymbol{p}|^2 (p_0 - |\boldsymbol{p}|)
\end{aligned}
$$

$p_0 < 0$ では $p_0 > 0$ のときと $B_1 - F_1,\ B_2 - F_2$ の符号が反転しているだけなので

$$
J = -\frac{(p^2 - m^2)^2}{p^4} |\boldsymbol{p}|^2 (p_0 - |\boldsymbol{p}|)
$$

となります。

空間的な場合では

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(|\boldsymbol{p}|^2 - p_0^2 + m^2)(B_1 - F_1) = -\frac{1}{2}(p^2 - m^2)(B_1 - F_1) = (p^2 - m^2) p_0 \\
&(|\boldsymbol{p}| - p_0)(B_2 - F_2) = -p_0^2 (|\boldsymbol{p}| - p_0)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
J &= (p^2 - m^2) p_0 + p_0^2 (|\boldsymbol{p}| - p_0) \\
&= p_0^3 - p_0 |\boldsymbol{p}|^2 - m^2 p_0 + p_0^2 |\boldsymbol{p}| - p_0^3 \\
&= -p_0 |\boldsymbol{p}|^2 + p_0^2 |\boldsymbol{p}| - m^2 p_0 \\
&= -p_0 (|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| - p_0) + m^2)
\end{aligned}
$$

これと元の式の空間的な場合に出てくる項を比べると、相殺することが分かります。

よって、$\mathrm{Im}\Sigma_+^{T=0}$ は時間的な $p_0^2 > \boldsymbol{p}^2 + m^2$ の場合にだけ値を持つことになって

$$
\mathrm{Im}\Sigma_+^{T=0} = \theta(p^2 - m^2) \begin{cases} -\dfrac{\pi g^2}{32\pi^2} \dfrac{(p^2 - m^2)^2}{p^4}(p_0 - |\boldsymbol{p}|) & \cdots \quad (p_0 > 0) \\ \dfrac{\pi g^2}{32\pi^2} \dfrac{(p^2 - m^2)^2}{p^4}(p_0 - |\boldsymbol{p}|) & \cdots \quad (p_0 < 0) \end{cases}
$$