1 ループ自己エネルギーの計算

QED 関係のところでは最初から HTL 近似を取っていたので、近似なしでどこまで解析的に計算できるのかを湯川モデルのフェルミオン自己エネルギーを使って見てみます。ボソンが質量を持つだけで基本的には QED でも同じです。
前半は性質を見ますが、後半は計算しているだけです。最後に高温極限を取って電磁場のときと同じように湯川モデルでのフェルミオンにも plasmino がいることを見ます。

湯川モデルのラグランジアンとして

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - g\overline{\psi}\phi\psi$$

こんなのを考えます。フェルミオンの質量は無視します。フェルミオンの温度グリーン関数は

$$S_\beta(i\omega_n, \boldsymbol{p}) = \frac{-1}{p_0\gamma_0 + \gamma_i p^i} = -\frac{i\omega_n\gamma_0 + \gamma_i p^i}{(i\omega_n)^2 - \boldsymbol{p}^2} \quad (i\omega_n = i2\pi nT(n + \frac{1}{2}))$$

ボソンの温度グリーン関数は

$$D_\beta(i\omega_l, \boldsymbol{p}) = \frac{-1}{(i\omega_l)^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} \quad (i\omega_l = i2\pi lT)$$

となっていて、ファインマン則からフェルミオンの自己エネルギーは

$$-\Sigma_\beta(i\omega_n, \boldsymbol{p}) = (-g)^2 T\sum_m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} S_\beta(i\omega_n - i\omega_m, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) D_\beta(i\omega_m, \boldsymbol{k})$$

頂点はゼロ温度 (ミンコフスキー空間) のときに作用上で $-ig\overline{\psi}\phi\psi$ となっているので $-ig$ となり、有限温度ではそれから i を外せばいいので $-g$ です。もしくは、単純に QED でのラグランジアンの相互作用部分が $-e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ で有限温度での頂点が $-e\gamma^\mu$ であることとの比較からも分かります。
　後は計算すればばいいだけなんですが、やや状況が見やすくなる形に持っていきます。最終的に解析接続して遅延グリーン関数に持っていくので、遅延グリーン関数関連の定義をしておきます。フェルミオンの遅延グリーン関数 G'_R を

$$G'_R(p_0, \boldsymbol{p}) = G_\beta(i\omega_n, \boldsymbol{p})|_{i\omega_n = p_0 + i\epsilon}$$

と定義します。遅延グリーン関数を正エネルギー部分と負エネルギー部分に分け

$$G_R(p) = -G'_R(p) = \gamma_0\Lambda_+ G_+ + \gamma_0\Lambda_- G_-$$

とします (「電子の自己エネルギー」での $\Lambda_\pm$ から γ_0 を分離して定義しています)。$G_R = -G'_R$ としているのは、

$$G_\beta = \frac{-1}{i\omega_n\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \Sigma(i\omega_n, \boldsymbol{p})} \;\Rightarrow\; G'_R = \frac{-1}{(p_0 + i\epsilon)\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \Sigma_R(p_0 + i\epsilon, \boldsymbol{p})}$$

でのマイナスをなくすためです。$\Lambda_\pm$ は射影演算子で

$$\Lambda_\pm(\boldsymbol{p}) = \frac{1\pm\gamma_0\gamma_i\hat{p}^i}{2} \quad (\hat{p}^i = \frac{p^i}{|\boldsymbol{p}|})$$

となっていて、エネルギーの固有状態への射影演算子になっています。簡単にその理由も見ておきます。ディラック方程式のハミルトニアン

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla) + \beta m = \gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot(-i\nabla) + \gamma_0 m$$

が固有状態として $\psi \sim e^{ipx}$ を持っているなら $-i\nabla$ は $-\boldsymbol{p}$ なので、H^2 は

$$\begin{aligned}
H^2 = (\beta m - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = (m\gamma_0 + \gamma_0\gamma_i p^i)^2 &= m^2 + \gamma_0\gamma_i\gamma_0\gamma_j p^i p^j + \gamma_0\gamma_0\gamma_i p^i m + \gamma_0\gamma_i\gamma_0 p^i m \\
&= m^2 - \gamma_i\gamma_j p^i p^j + \gamma_i p^i m - \gamma_i p^i m \\
&= \boldsymbol{p}^2 + m^2
\end{aligned}$$

これは、演算子としてのハミルトニアンはエネルギー状態として $\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} = \pm E$ を持っていることを表します。これと E によって

$$\frac{E+H}{2E} + \frac{E-H}{2E} = \Lambda_+ + \Lambda_- = 1$$

というものが作れ、$\Lambda_\pm$ は $m=0$ で上の式と同じです。これにハミルトニアンを作用させてみると

$$H\Lambda_\pm = H\frac{E\pm H}{2E} = \frac{1}{2E}(EH \pm H^2) = \frac{1}{2E}(EH\pm E^2) = E\frac{1}{2E}(H\pm E) = \pm E\Lambda_\pm$$

ハミルトニアン H の固有値が E であることを使っています。この結果から、$\Lambda_\pm$ は正負のエネルギー状態へ射影させていることが分かります。$\Lambda_\pm$ は

$$\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm \ , \ \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0$$

という性質をもっていることが分かり、エネルギーの射影演算子はこの性質を持っていることによって定義される場合もあります。また、$\gamma_0\Lambda_\pm$ と γ_0 がいるのはカイラリティとパリティの変換に対する不変性

$$G_R(p_0,\boldsymbol{p}) = -\gamma_5 G_R(p_0,\boldsymbol{p})\gamma_5 \ , \ G_R(p_0,\boldsymbol{p}) = \gamma_0 G_R(p_0,-\boldsymbol{p})\gamma_0$$

のためです。

G_R^{-1} を

$$(p_0+i\epsilon)\gamma_0 + p_i\gamma^i - \Sigma_R(p) = (p_0 + i\epsilon - \Sigma_0)\gamma_0 - (|\boldsymbol{p}| - \Sigma_v)\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\gamma} = A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i$$

$$\Sigma_R = \Sigma_0\gamma_0 - \Sigma_v\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\gamma}$$

と書き換えれば

$$G_R = \frac{1}{2}\frac{\gamma_0 + \hat{p}_i\gamma^i}{A_0 - A_S} + \frac{1}{2}\frac{\gamma_0 - \hat{p}_i\gamma^i}{A_0 + A_S} = \frac{\gamma_0\Lambda_+}{A_0 - A_S} + \frac{\gamma_0\Lambda_-}{A_0 + A_S} = \gamma_0\Lambda_+ G_+ + \gamma_0\Lambda_- G_-$$

なので

$$\begin{aligned} G_+ &= \frac{1}{p_0 - |\boldsymbol{p}| - (\Sigma_0 - \Sigma_v) + i\epsilon} = \frac{1}{p_0 - |\boldsymbol{p}| - \Sigma_+ + i\epsilon} \\ G_- &= \frac{1}{p_0 + |\boldsymbol{p}| - (\Sigma_0 + \Sigma_v) + i\epsilon} = \frac{1}{p_0 + |\boldsymbol{p}| - \Sigma_- + i\epsilon} \end{aligned}$$

もしくは G_+ はガンマ行列を含んでいないとして G_R から

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_+\gamma_0 G_R] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_+\gamma_0\gamma_0\Lambda_+ G_+] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_+ G_+] = G_+$$

とすれば取り出せます (奇数個のガンマ行列のトレースは消える)。自己エネルギーも同様で

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_+\gamma_0\Sigma_R] &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_+\gamma_0\Sigma_0\gamma_0] - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_+\gamma_0\Sigma_v\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\gamma}] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_+\Sigma_0] - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\frac{\gamma_0 + \gamma_0\hat{p}_i\gamma^i}{2}(-\hat{p}_j\gamma^j)\Sigma_v] \\ &= \Sigma_0 - \Sigma_v \quad \left(\hat{p}_i\gamma^i\hat{p}_j\gamma^j = \frac{-|\boldsymbol{p}|^2}{|\boldsymbol{p}|^2} = -1,\ \mathrm{tr}[\gamma_0\gamma_i] = 0\right) \\ &= \Sigma_+ \end{aligned}$$

となっています。つまり、射影演算子によって分離させることで

$$G_R(p) = \gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{p})G_+(p) + \gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{p})G_-(p) \tag{1a}$$

$$G_\pm(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_\pm(\boldsymbol{p})\gamma_0 G_R(p)] = \frac{1}{p_0 \mp |\boldsymbol{p}| - \Sigma_\pm + i\epsilon} \tag{1b}$$

$$\Sigma_R(p) = \Sigma_0(p)\gamma_0 - \Sigma_v(p)\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\gamma} \tag{1c}$$

$$\Sigma_\pm(p) = \Sigma_0(p) \mp \Sigma_v(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Lambda_\pm(\boldsymbol{p})\gamma_0\Sigma_R(p)] \tag{1d}$$

となっています。というわけで、$G_\pm, \Sigma_\pm$ を計算することで必要な情報を取り出せることが分かります。

この結果から、射影演算子 $\Lambda_\pm$ によって分離した形が欲しいので、S_β を先に分離させて計算します。つまり

$$-S_\beta(q_0, \boldsymbol{q}) = \frac{q_0\gamma_0 + q_i\gamma^i}{q_0^2 - \boldsymbol{q}^2} = \frac{1}{2}\frac{\gamma_0 + \hat{q}_i\gamma^i}{q_0 - |\boldsymbol{q}|} + \frac{1}{2}\frac{\gamma_0 - \hat{q}_i\gamma^i}{q_0 + |\boldsymbol{q}|} = \frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{q_0 - |\boldsymbol{q}|} + \frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{q_0 + |\boldsymbol{q}|}$$

とするということです。途中の計算は

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_0+\hat{q}_i\gamma^i)(q_0+|\boldsymbol{q}|)+(\gamma_0-\hat{q}_i\gamma^i)(q_0-|\boldsymbol{q}|)\\
&=\gamma_0 q_0+\gamma_0|\boldsymbol{q}|+q_0\hat{q}_i\gamma^i+\hat{q}_i\gamma^i|\boldsymbol{q}|+\gamma_0 q_0-\gamma_0|\boldsymbol{q}|-q_0\hat{q}_i\gamma^i+\hat{q}_i\gamma^i|\boldsymbol{q}|\\
&=2q_0\gamma_0+2q_i\gamma^i
\end{aligned}
$$

そうすると、自己エネルギーは

$$
-\Sigma_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})=-g^2T\sum_m\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(\frac{\gamma_0\Lambda_+}{i\omega_n-i\omega_m-E_{\boldsymbol{q}}}+\frac{\gamma_0\Lambda_-}{i\omega_n-i\omega_m+E_{\boldsymbol{q}}}\Big)D_\beta(i\omega_m,\boldsymbol{k})
$$

温度グリーン関数部分を

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\gamma_0\Lambda_+}{i\omega_n-i\omega_m-E_{\boldsymbol{q}}}+\frac{\gamma_0\Lambda_-}{i\omega_n-i\omega_m+E_{\boldsymbol{q}}}\Big)D_\beta(i\omega_m,\boldsymbol{k})\\
=&\ \frac{\gamma_0\Lambda_+}{i\omega_n-i\omega_m-E_{\boldsymbol{q}}}D_\beta(i\omega_m,\boldsymbol{k})+\frac{\gamma_0\Lambda_-}{i\omega_n-i\omega_m+E_{\boldsymbol{q}}}D_\beta(i\omega_m,\boldsymbol{k})\\
=&\ -\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{\gamma_0\Lambda_+}{i\omega_n-i\omega_m-E_{\boldsymbol{q}}}\Big(\frac{1}{i\omega_m-E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{1}{i\omega_m+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{\gamma_0\Lambda_-}{i\omega_n-i\omega_m+E_{\boldsymbol{q}}}\Big(\frac{1}{i\omega_m-E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{1}{i\omega_m+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)\\
=&\ -\frac{\gamma_0\Lambda_+}{2E_{\boldsymbol{k}}}(I_1-I_2)-\frac{\gamma_0\Lambda_-}{2E_{\boldsymbol{k}}}(I_3-I_4)
\end{aligned}
$$

と書けば

$$
\Sigma_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})=-g^2T\sum_m\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}(\gamma_0\Lambda_+(I_1-I_2)+\gamma_0\Lambda_-(I_3-I_4))
$$

和の計算結果は

$$
\begin{aligned}
I_1&=-(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
I_2&=(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
I_3&=-(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}\\
I_4&=(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{1}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}
\end{aligned}
$$

和の計算は分けて別のところに載せています。ボソンとフェルミオンの分布関数は

$$
n_B(E)=\frac{1}{e^{\beta E}-1}\ ,\ n_F(E)=\frac{1}{e^{\beta E}+1}
$$

となっています。よって、自己エネルギーは

$$
\begin{aligned}
\Sigma_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p}) = g^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\Big[&(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}\Big]
\end{aligned}
$$

$\Lambda_\pm(\boldsymbol{q})$ が $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ と依存しているのは面倒なので、$\boldsymbol{k}$ 積分を $\boldsymbol{q}$ 積分に変えます。これは全空間積分であることを踏まえれば、$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ となり、積分が d^3q に置き換わるだけです。一応手続きをちゃんとすれば変数変換 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ から $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ となり、d^3k は全空間積分なので d^3q に置き換わるので

$$
\begin{aligned}
\Sigma_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p}) = g^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}}\Big[&(1+n_B(E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(1+n_B(E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{q}}}\Big]
\end{aligned}
$$

改めて $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ と置きなおせば

$$
\begin{aligned}
\Sigma_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p}) = g^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\Big[&(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}\\
&+(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}}\Big]
\end{aligned}
$$

これは最初のファインマン則での自己エネルギーの式において、フェルミオンとボソンの運動量の移動の仕方を反対にして計算していくと直接出てきます。

ここから直接角度積分を行うこともできますが、最初の話を踏まえて別の手順で行います。遅延グリーン関数への解析接続 $i\omega_n\to p_0+i\epsilon$ をここでしてしまって

$$
\begin{aligned}
\Sigma_R(p_0,\boldsymbol{p}) = g^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}[&(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}+i\epsilon} \\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}+i\epsilon} \\
&+(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}+i\epsilon} \\
&+(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\frac{\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}+i\epsilon}]
\end{aligned}
$$

この形をみると簡単に実部と虚部に分けられることが分かります。そして、遅延グリーン関数の実部と虚部はクラマース・クローニッヒの関係によってつながっています。この関係は因果律から出てくる関係なので、自己エネルギー部分にも適用できます。なので、虚部を計算していきます。虚部は (P は主値)

$$
\frac{1}{x-y+i\epsilon} = \mathrm{P}\frac{1}{x-y} - i\pi\delta(x-y)
$$

から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_R(p_0,\boldsymbol{p}) = -\pi g^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\big[&\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}})\big]
\end{aligned}
$$

これのデルタ関数部分での運動量保存から、外線のフェルミオンを Ψ、内線のフェルミオンを ψ、内線のボソンを ϕ とすると

$$
\begin{aligned}
\text{第一項}\ &:\ \Psi\ \rightarrow\ \psi+\phi && \text{(2a)} \\
\text{第二項}\ &:\ \Psi+\phi\ \rightarrow\ \psi && \text{(2b)} \\
\text{第三項}\ &:\ \Psi+\overline{\psi}\ \rightarrow\ \phi && \text{(2c)} \\
\text{第四項}\ &:\ \Psi+\overline{\psi}+\phi\ \rightarrow\ 0 && \text{(2d)}
\end{aligned}
$$

という過程に対応していることが分かります。それぞれの項はこれらの逆過程も可能です (例えば第一項では $\psi+\phi\ \rightarrow\ \Psi$、第二項では $\psi\ \rightarrow\ \Psi+\phi$)。第三項と第四項は粒子と反粒子の消滅による過程としているために、反フェルミオンと $\overline{\psi}$ が出てきています (ボソンは実数場なので反粒子がいない)。もっと分かりやす形にするために

$$
\Pi(p_0,\boldsymbol{p}) = \overline{u}(p)\Sigma_R(p_0,\boldsymbol{p})u(p)
$$

というのを作ります。$u(p)$ は自由なフェルミオンでの正エネルギー状態に対応するスピノールで

$$(p_\mu\gamma^\mu - \sqrt{p^2})u(p) = 0\ ,\ (p_\mu\gamma^\mu + \sqrt{p^2})v(p) = 0$$

この式を満たすとします $(p^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2)$。$v$ は負エネルギー状態でのスピノールです。これらはスピン s の和に対して

$$\sum_s \overline{u}(p,s)u(p,s) = 2\sqrt{p^2}\ ,\ \sum_s v(p,s)v(p,s) = -2\sqrt{p^2}$$

と規格化します。そして、

$$\mathcal{M} = g\overline{u}(k,s_1)u(p,s)$$

というのを考えて、$|\mathcal{M}|^2$ のスピン s_1 の和を計算してみると

$$\sum_{s_1}|\mathcal{M}|^2 = g^2\sum_{s_1}(\overline{u}(q,s_1)u(p,s))^\dagger\overline{u}(q,s_1)u(p,s) = g^2\overline{u}(p,s)\sum_{s_1}u(q,s_1)\overline{u}(q,s_1)u(p,s)$$

$u(q,s_1)$ は質量 m を持った自由なフェルミオンのスピノールだとすれば

$$g^2\overline{u}(p,s)\sum_{s_1}u(q,s_1)\overline{u}(q,s_1)u(p,s) = g^2\overline{u}(p,s)(\gamma_\mu q^\mu + m)u(p,s)$$

自由粒子なので $q_0 = E_{\boldsymbol{q}}$ となっています。一方で、$\Lambda_+(\boldsymbol{q})$ は変形すると

$$\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q}) = \gamma_0\frac{1+\gamma_0\hat{q}_i\gamma^i}{2} = \frac{|\boldsymbol{q}|\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q}}{2|\boldsymbol{q}|} = \frac{E_{\boldsymbol{q}}\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{q}}{2E_{\boldsymbol{q}}}$$

となっています。なので、$m=0$ で $\Sigma u\overline{u}$ は $\mathrm{Im}\Pi(p_0,\boldsymbol{p})$ の第一項と第二項に対応します。

さらに三次元運動量に対するデルタ関数を $\boldsymbol{q}'$ 積分によって付け加えれば、$\mathrm{Im}\Pi(p_0,\boldsymbol{p})$ の第一項と第二項は

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}2E_{\boldsymbol{q}'}}(2\pi)^4\delta^4(p-q-k)|\mathcal{M}_1|^2(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\\
&-\frac{1}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}2E_{\boldsymbol{q}'}}(2\pi)^4\delta^4(p-q+q')|\mathcal{M}_2|^2(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))
\end{aligned}$$

これらを断面積の式とみなせば、$\mathcal{M}$ は不変振幅になっています $(q=(E_{\boldsymbol{q},q}),\ q'=(E'_{\boldsymbol{k},q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}))$。第三項と第四項では

$$|\mathcal{M}_{3,4}|^2 = g^2(\overline{v}u)^\dagger(\overline{v}u) = g^2\overline{u}\sum_s v\overline{v}u = g^2\overline{u}(p_\mu\gamma^\mu - m)u$$

によって置き換えられるので、全部合わせれば

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Pi = -\frac{1}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}2E_{\boldsymbol{q}'}}\big[&\delta^4(p-q-q')|\mathcal{M}_1|^2((1+n_B)(1-n_F)+n_Bn_F) \\
&+\delta^4(p-q+q')|\mathcal{M}_2|^2(n_Bn_F+(1+n_B)(1-n_F)) \\
&+\delta^4(p+q-q')|\mathcal{M}_3|^2(n_F(1+n_B)+n_B(1-n_F)) \\
&+\delta^4(p-q+q')|\mathcal{M}_4|^2(n_B(1-n_F)+n_F(1+n_B))\big]
\end{aligned}
$$

$n_B=n_B(E_{\boldsymbol{q}'}),\ n_F=n_F(E_{\boldsymbol{q}})$ で、分布関数部分は変形しているだけです。よって、$\overline{u}(q)$ と $u(p)$、$\overline{v}(q)$ と $u(p)$ の運動量をボソンがつないでいると見れば、(2a)〜(2d) の過程がいると解釈できます。分布関数部分をこのように変形したのは、例えば第一項において、過程 $\Psi\ \rightarrow\ \psi+\phi$ の逆過程 $\psi+\phi\ \rightarrow\ \Psi$ もデルタ関数から許されているので、$(1+n_B)(1-n_F)$ を持った $\Psi\rightarrow\psi+\phi$ の放射過程、n_Bn_F を持った $\psi+\phi\rightarrow\Psi$ の吸収過程が対応し、その和になっていると解釈することもできるからです。また、u は正エネルギー状態のスピノールなので Π は Σ_+ に対応しています。v で挟めば Σ_- です。

$\mathrm{Im}\Sigma_R$ の解釈は終わりにして計算に戻ります。これ以降は計算をしていくだけなので、最後まで飛ばしていいです。Σ_+ を取り出すために、射影演算子による

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[\Lambda_+(\boldsymbol{p})\gamma_0\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})]=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(1+\hat{p}_i\gamma^i)(1+\hat{q}_j\gamma^j)]=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[1+\hat{p}_i\hat{q}_j\gamma^i\gamma^j]=1-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}} \\
&\mathrm{tr}[\Lambda_+(\boldsymbol{p})\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})\gamma_0]=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(1+\hat{p}_i\gamma^i)(1-\hat{q}_j\gamma^j)]=1+\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}
$$

これらを使うことで

$$
\begin{aligned}
\Sigma_+ =&\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\mathrm{Im}\Lambda_+(\boldsymbol{p})\gamma_0\Sigma_R(p_0,\boldsymbol{p})] \\
=&\ -\frac{\pi g^2}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\big[(1-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+(1-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+(1+\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+(1+\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}})\big]
\end{aligned}
$$

$1\pm\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}=1+s\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}\ (s=\pm1)$ は

$$
\begin{aligned}
1+s\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}=\ 1+s\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}&=1+s\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2-((\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2+m^2)+m^2}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
&=1+s\frac{\boldsymbol{p}^2+|\boldsymbol{q}|^2-E_{\boldsymbol{k}}^2+m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
&=\frac{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|+s(\boldsymbol{p}^2+|\boldsymbol{q}|^2-E_{\boldsymbol{k}}^2+m^2)}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}
\end{aligned}
$$

積分は

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta$$

このとき $E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2 + m^2} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta + m^2}$ であることから

$$z = E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta + m^2}$$
$$dz = \frac{1}{2}z^{-1}2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin\theta d\theta = z^{-1}|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin\theta d\theta$$

と変換すれば

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|^2 \frac{1}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}\int_{z_-}^{z_+} dz = \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{p}|}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}| \int_{z_-}^{z_+} dz\ z$$
$$z_\pm = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2 \pm 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| + m^2} = \sqrt{(|\boldsymbol{p}| \pm |\boldsymbol{q}|)^2 + m^2}$$

よって

$$\begin{aligned}
\Sigma_+ =& -\frac{\pi g^2}{32\pi^2|\boldsymbol{p}|^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}| \int_{z_-}^{z_+} dz \\
&\times\Big[\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{p}^2 + |\boldsymbol{q}|^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2 + m^2)\big)(1 + n_B(z) - n_F(|\boldsymbol{q}|))\delta(p_0 - z - |\boldsymbol{q}|) \\
&\quad + \big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{p}^2 + |\boldsymbol{q}|^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2 + m^2)\big)(n_B(z) + n_F(|\boldsymbol{q}|))\delta(p_0 + z - |\boldsymbol{q}|) \\
&\quad + \big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| + (\boldsymbol{p}^2 + |\boldsymbol{q}|^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2 + m^2)\big)(n_B(z) + n_F(|\boldsymbol{q}|))\delta(p_0 - z + |\boldsymbol{q}|) \\
&\quad + \big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| + (\boldsymbol{p}^2 + |\boldsymbol{q}|^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2 + m^2)\big)(1 + n_B(z) - n_F(|\boldsymbol{q}|))\delta(p_0 + z + |\boldsymbol{q}|)\Big] \\
=& D_1 + D_2 + D_3 + D_4
\end{aligned}$$

ここで問題になるのがデルタ関数による $|\boldsymbol{q}|$ に対する制限です。状況を分かりやすくするために、θ 積分を z 積分にする前の段階で考えていきます。

D_1 はデルタ関数内を X_1 とすれば

$$X_1 = p_0 - |\boldsymbol{q}| - \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta} = 0$$

これを満たす必要があります。そのためには p_0 は $p_0 \geq m$ となる時間的 (time-like) な $p_0 > |\boldsymbol{p}|$ の領域 (上側の光円錐の内側) にいる必要があります。$p_0^2 < |\boldsymbol{p}|^2$ では明らかに成立していないです。X_1 が 0 になるための

$$\cos\theta = \frac{-p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}$$

に対する θ の積分範囲 $0 \sim \pi$ による制限

$$-1 < \frac{-p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} < 1$$

から $|\boldsymbol{q}|$ の範囲は

$$\begin{aligned}
-1 <& \frac{-p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
-2p_0|\boldsymbol{q}| - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| <& - p_0^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2 \\
|\boldsymbol{q}| >& \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)} = E_+
\end{aligned}$$

これと

$$\begin{aligned}
1 >& \frac{-p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
2p_0|\boldsymbol{q}| - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| <& p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 \\
|\boldsymbol{q}| <& \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 - |\boldsymbol{p}|)} = E_-
\end{aligned}$$

これの間に挟まれている必要があります。また、$p_0 - |\boldsymbol{q}| > 0$ であることも

$$\begin{aligned}
&0 < |\boldsymbol{q}| < \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)} \\
&p_0 > p_0 - |\boldsymbol{q}| > p_0 - \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)} \\
&p_0 > p_0 - |\boldsymbol{q}| > \frac{2p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{p}| - p_0^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)} = \frac{(p_0 + |\boldsymbol{p}|)^2 + m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)} > 0
\end{aligned}$$

となっているので満たしています。E_- の場合でも同じです。よって、$E_+ < |\boldsymbol{q}| < E_-$ に制限されるので、D_1 は p_0 が正で時間的な場合において

$$\begin{aligned}
D_1 =& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{E_-} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{p}^2 + |\boldsymbol{q}|^2 - (p_0 - |\boldsymbol{q}|)^2 + m^2)\big)(1 + n_B(p_0 - |\boldsymbol{q}|) - n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
=& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{E_-} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{p}^2 - p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + m^2)\big)(1 + n_B(p_0 - |\boldsymbol{q}|) - n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
=& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{E_-} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{p}^2 - p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + m^2)\big)(1 - 1 - n_B(|\boldsymbol{q}| - p_0) - n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
=& \frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{E_-} d|\boldsymbol{q}|\big((2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{p}^2 - p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}| - p_0) + n_F(|\boldsymbol{q}|))
\end{aligned}$$

となります。

同じように D_4 も考えます。今度は

$$p_0 + |\boldsymbol{q}| + \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta} = 0$$

なので

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - (p_0 + |\boldsymbol{q}|)^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}$$

ただし、p_0 は $p_0 \leq -m$ となる時間的な領域 (下側の光円錐の内側) にいます。$\cos\theta = -1$ に対しては、$p_0 < 0$ であることに気を付ければ

$$\begin{aligned} -1 <& \frac{-p_0^2 - 2p_0|\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\ -2(|\boldsymbol{p}| - p_0)|\boldsymbol{q}| <& - p_0^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2 \\ |\boldsymbol{q}| >& - \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 - |\boldsymbol{p}|)} = -E_- \end{aligned}$$

$\cos\theta = 1$ に対しては、$|p_0| > |\boldsymbol{p}|$ であることから

$$\begin{aligned} 1 >& \frac{-p_0^2 - 2p_0|\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\ 2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)|\boldsymbol{q}| >& - p_0^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2 \\ |\boldsymbol{q}| <& - \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)} = -E_+ \end{aligned}$$

これらは $p_0 + |\boldsymbol{q}| < 0$ を満たしています。よって、D_4 は

$$\begin{aligned} D_4 =& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{-E_-}^{-E_+} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| + (\boldsymbol{p}^2 + |\boldsymbol{q}|^2 - (-p_0 - |\boldsymbol{q}|)^2 + m^2)\big)(1 + n_B(-p_0 - |\boldsymbol{q}|) - n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\ =& \frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_-}^{E_+} d|\boldsymbol{q}|\big(-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| + (\boldsymbol{p}^2 + |\boldsymbol{q}|^2 - (-p_0 + |\boldsymbol{q}|)^2 + m^2)\big)(1 + n_B(|\boldsymbol{q}| - p_0) - n_F(-|\boldsymbol{q}|)) \\ =& \frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{E_-} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{p}^2 - p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}| + m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}| - p_0) + n_F(|\boldsymbol{q}|)) \end{aligned}$$

$n_F(-E) = 1 - n_F(E)$ を使っています。これは D_1 とまったく同じなので、時間的な場合 p_0 の符号とは無関係に同じ結果になります。

　D_3 では

$$X_3 = p_0 + |\boldsymbol{q}| - \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta} = 0$$

今度は時間的な場合では成立していないことが分かります。なので、空間的な $p_0^2 < |\boldsymbol{p}|^2$ のときに成立しています。デルタ関数に対する制限は

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - (p_0 + |\boldsymbol{q}|)^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}$$

$\cos\theta = -1$ では、$|p_0| < |\boldsymbol{p}|$ から

$$\begin{aligned}
-1 <& \frac{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - (p_0 + |\boldsymbol{q}|)^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
-2(|\boldsymbol{p}| - p_0)|\boldsymbol{q}| <& - p_0^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2 \\
|\boldsymbol{q}| >& - \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 - |\boldsymbol{p}|)}
\end{aligned}$$

しかし、これは

$$-\frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 - |\boldsymbol{p}|)} < 0$$

であるために $|\boldsymbol{q}| > 0$ の範囲内にいないので、制限になっていません。$\cos\theta = 1$ では

$$\begin{aligned}
1 >& \frac{-p_0^2 - 2p_0|\boldsymbol{q}| + \boldsymbol{p}^2 + m^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)|\boldsymbol{q}| >& - p_0^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2 \\
|\boldsymbol{q}| >& - \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)} = -E_+ \qquad (3)
\end{aligned}$$

これは $|\boldsymbol{q}| > 0$ と $p_0 + |\boldsymbol{q}| > 0$ の条件を満たしています。なので、D_3 にはこの制限だけがかかります。

D_2 では

$$X_2 = p_0 - |\boldsymbol{q}| + \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta} = 0$$

これも空間的な場合に成立しています。$\cos\theta$ は

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 - (p_0 - |\boldsymbol{q}|)^2}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}$$

$\cos\theta = -1$ では

$$\begin{aligned}
-1 <& \frac{\boldsymbol{p}^2 + m^2 - p_0^2 + 2p_0|\boldsymbol{q}|}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
-2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)|\boldsymbol{q}| <& - p_0^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2 \\
|\boldsymbol{q}| >& \frac{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}{2(p_0 + |\boldsymbol{p}|)}
\end{aligned}$$

これは $|\boldsymbol{q}| > 0$ を満たしていません。$\cos\theta = 1$ では

$$
\begin{aligned}
1 >& \frac{\boldsymbol{p}^2+m^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \\
2(|\boldsymbol{p}|-p_0)|\boldsymbol{q}| >& -p_0^2+\boldsymbol{p}^2+m^2 \\
|\boldsymbol{q}| >& \frac{p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2}{2(p_0-|\boldsymbol{p}|)} = E_- \qquad (4)
\end{aligned}
$$

これは $|\boldsymbol{q}|>0$ と $p_0-|\boldsymbol{q}|<0$ を満たしています。

よって、D_2 と D_3 を合わせると (3) と (4) から

$$
\begin{aligned}
D_2+D_3 =& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\int_{z_-}^{z_+} dz \\
&\times\big[(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2+|\boldsymbol{q}|^2-E_{\boldsymbol{k}}^2+m^2))(n_B(z)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\delta(p_0+z-|\boldsymbol{q}|) \\
&+(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|+(\boldsymbol{p}^2+|\boldsymbol{q}|^2-E_{\boldsymbol{k}}^2+m^2))(n_B(z)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\delta(p_0-z+|\boldsymbol{q}|)\big] \\
=& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_-}^\infty d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2+|\boldsymbol{q}|^2-(-p_0+|\boldsymbol{q}|)^2+m^2)\big)(n_B(-p_0+|\boldsymbol{q}|)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&-\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{-E_+}^\infty d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|+(\boldsymbol{p}^2+|\boldsymbol{q}|^2-(p_0+|\boldsymbol{q}|)^2+m^2)\big)(n_B(p_0+|\boldsymbol{q}|)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
=& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_-}^\infty d|\boldsymbol{q}|\big((2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&+\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{-\infty} d|\boldsymbol{q}|\big(-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|+(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(-1-n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+1-n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
=& -\frac{g^2}{32\pi^2|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_-}^\infty d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
&+\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{-\infty} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
=& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\Big(\int_{E_-}^\infty d|\boldsymbol{q}|+\int_{-\infty}^{E_+} d|\boldsymbol{q}|\Big)\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|)) \\
=& -\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\Big(\int_{-\infty}^\infty d|\boldsymbol{q}|-\int_{E_+}^{E_-} d|\boldsymbol{q}|\Big)\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty dx(n_F(x)+n_B(x-y)) = -y \\
&\int_{-\infty}^\infty dx\ x(n_F(x)+n_B(x-y)) = \frac{\pi^2T^2}{2}-\frac{y^2}{2}
\end{aligned}
$$

を使えば

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d|\boldsymbol{q}|(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2))(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\\
&=\int_{-\infty}^{\infty} d|\boldsymbol{q}|(2(|\boldsymbol{p}|-p_0)|\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+m^2))(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\\
&=(|\boldsymbol{p}|-p_0)(\pi^2T^2-p_0^2)+((|\boldsymbol{p}|-p_0)(|\boldsymbol{p}|+p_0)+m^2)p_0\\
&=(|\boldsymbol{p}|-p_0)(\pi^2T^2+p_0|\boldsymbol{p}|)+p_0m^2
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
D_2+D_3=&\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E_+}^{E_-} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\\
&-\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\big((|\boldsymbol{p}|-p_0)(\pi^2T^2+p_0|\boldsymbol{p}|)+p_0m^2\big)
\end{aligned}
$$

これの第一項は D_1 と D_4 と同じです。なので、時間的、空間的両方で第一項は成立していて、D_2+D_3 の第二項と第三項が空間的な場合に成立しています。

というわけで、$\mathrm{Im}\Sigma_+$ は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_+(p_0,|\boldsymbol{p}|)=&\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E^+}^{E^-} d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\\
&-\theta(-p^2)\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\big((|\boldsymbol{p}|-p_0)(\pi^2T^2+p_0|\boldsymbol{p}|)+p_0m^2\big)
\end{aligned}
$$

となります。$p^2=p_0^2-\boldsymbol{p}^2$ で、θ は階段関数です。

$T=0$ の極限を取ってみます。今の計算手順の面倒な点なんですが、ゼロ温度部分と有限温度部分が混ざってしまっています。なので、ゼロ温度部分と有限温度部分を分けるには $T=0$ の極限で計算する必要があります。途中計算は別のところに載せているので、結果だけを書くと

$$
\mathrm{Im}\Sigma_+^{T=0}=\theta(p^2-m^2)\begin{cases}-\dfrac{g^2}{32\pi^2}\dfrac{(p^2-m^2)^2}{p^4}(p_0-|\boldsymbol{p}|) & \cdots\quad (p_0>0)\\[2mm] \dfrac{g^2}{32\pi}\dfrac{(p^2-m^2)^2}{p^4}(p_0-|\boldsymbol{p}|) & \cdots\quad (p_0<0)\end{cases}
$$

となっています。見て分かるように虚部は発散していなく、実部が発散することになります。

Σ_- は簡単に分かって、

$$
\mathrm{tr}[\Lambda_-(\boldsymbol{p})\gamma_0\Lambda_-(\boldsymbol{q})\gamma_0]=1-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}\ ,\ \mathrm{tr}[\Lambda_-(\boldsymbol{p})\gamma_0\Lambda_+(\boldsymbol{q})\gamma_0]=1+\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_- = -\frac{\pi g^2}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\big[&(1+\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}})\\
&+(1-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{q}})\\
&+(1-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}})\\
&+(1+\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}})(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\delta(p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}})\big]
\end{aligned}
$$

これは $\mathrm{Im}\Sigma_+$ と $\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}$ の符号が反転しています。なので

$$
1+s\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}=\frac{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|+s(|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2-E_{\boldsymbol{k}}^2+m^2)}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}
$$

の s がいる部分の符号が反転して出てきます。$E_{\boldsymbol{k}}^2$ はデルタ関数によって $(p_0\pm|\boldsymbol{q}|)^2$ に置き換わりますが、符号自体に影響はあたえないです。なので、階段関数を含んでいない部分は s の項の符号が反転するだけです。
　階段関数がいるほうでも同様なので、Σ_- では積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|+(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}d|\boldsymbol{q}|\big(2(|\boldsymbol{p}|+p_0)|\boldsymbol{q}|+(\boldsymbol{p}^2-p_0^2+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\\
&=(|\boldsymbol{p}|+p_0)(\pi^2T^2-p_0^2)-\big((|\boldsymbol{p}|-p_0)(|\boldsymbol{p}|+p_0)+m^2\big)p_0\\
&=(|\boldsymbol{p}|+p_0)(\pi^2T^2-p_0|\boldsymbol{p}|)-p_0m^2
\end{aligned}
$$

となります。よって、まとめると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_\pm(p_0,|\boldsymbol{p}|)=&\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E^+}^{E^-}d|\boldsymbol{q}|\big(2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\mp(|\boldsymbol{p}|^2-p_0^2+2p_0|\boldsymbol{q}|+m^2)\big)(n_B(|\boldsymbol{q}|-p_0)+n_F(|\boldsymbol{q}|))\\
&-\theta(-p^2)\frac{g^2}{32\pi|\boldsymbol{p}|^2}\big((|\boldsymbol{p}|\mp p_0)(\pi^2T^2\pm p_0|\boldsymbol{p}|)\pm p_0m^2\big)
\end{aligned}
$$

このように近似を使わずに計算してきましたが、実部を求める積分は厳密にできないので、ここで解析的な計算は止まります。虚部側から計算していかなくても求まりますが角度積分が面倒です。ただ、デルタ関数の扱いが煩わしいという人は淡々と計算できる Σ_R の直接計算のほうがいいかもしれません。
　高温極限の T^2 のオーダは簡単に見れて

$$
\mathrm{Im}\Sigma_\pm^{T\to\infty}=-\theta(-p^2)\frac{\pi g^2T^2}{32|\boldsymbol{p}|^2}(|\boldsymbol{p}|\mp p_0)=-\theta(-p^2)\frac{\pi}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|^2}(|\boldsymbol{p}|\mp p_0)
$$

$M_T^2=g^2T^2/4$ としています。これ以降 $T\to\infty$ を外します。遅延グリーン関数の自己エネルギーは (1d) から

$$
\Sigma_0=\frac{1}{2}(\Sigma_++\Sigma_-)\ ,\ \Sigma_v=-\frac{1}{2}(\Sigma_+-\Sigma_-)
$$

で求まります。Σ_0 の虚部は

$$\mathrm{Im}\Sigma_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\Sigma_+ + \mathrm{Im}\Sigma_-) = -\theta(-p^2)\frac{\pi}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}$$

実部はクラマース・クローニッヒの関係

$$\mathrm{Re}\Sigma_R(p) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{1}{z-p_0}\mathrm{Im}\Sigma_R(z,\boldsymbol{p})$$

を使えばいいです。P は主値を表します。そうすると、実部は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Sigma_0 &= \frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\mathrm{Im}\Sigma_+(z,\boldsymbol{p})}{z-p_0} + \frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\mathrm{Im}\Sigma_-(z,\boldsymbol{p})}{z-p_0} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}dz\theta(-z^2+|\boldsymbol{p}|^2)\frac{1}{z-p_0} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\int_{-|\boldsymbol{p}|}^{0}dz + \int_{0}^{|\boldsymbol{p}|}dz\Big)\frac{1}{z-p_0} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}(\log|p_0| - \log||\boldsymbol{p}|+p_0| + \log||\boldsymbol{p}|-p_0| - \log|p_0|) \\
&= \frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}\frac{1}{2}\log\Big|\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|}\Big|
\end{aligned}$$

階段関数で積分範囲が制限され、通常の積分として実行しても主値積分であることを考慮したもの (極 $z=p_0$ を $p_0\pm\epsilon$ で避けた経路で積分して $\epsilon\to 0$ の極限を取ればいい) と同じになるので、三行目で普通の積分にしています。

Σ_v の虚部は

$$\mathrm{Im}\Sigma_v = -\frac{1}{2}(\mathrm{Im}\Sigma_+ - \mathrm{Im}\Sigma_-) = -\theta(-p^2)\frac{\pi}{2}\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}M_T^2$$

実部は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Sigma_v &= \frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}dz\theta(-z^2+|\boldsymbol{p}|^2)\frac{z}{p_0-z} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\int_{-|\boldsymbol{p}|}^{0}dz + \int_{0}^{|\boldsymbol{p}|}dz\Big)\frac{z}{z-p_0} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\big[z+p_0\log(z-p_0)\big]_{-|\boldsymbol{p}|}^{0} + \big[z+p_0\log(z-p_0)\big]_{0}^{|\boldsymbol{p}|}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}(\log|p_0| + |\boldsymbol{p}| - p_0\log||\boldsymbol{p}|+p_0| + |\boldsymbol{p}| + p_0\log||\boldsymbol{p}|-p_0| - \log|p_0|) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}(2|\boldsymbol{p}| - p_0\log||\boldsymbol{p}|+p_0| + p_0\log||\boldsymbol{p}|-p_0|) \\
&= -\frac{M_T^2}{|\boldsymbol{p}|}\Big(|\boldsymbol{p}| - \frac{p_0}{2}\log\Big|\frac{|\boldsymbol{p}|+p_0}{|\boldsymbol{p}|-p_0}\Big|\Big)
\end{aligned}$$

よって

$$Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) = \frac{1}{2}\log\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|} = \log\Big|\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|}\Big| - \frac{i}{2}\pi\theta(\boldsymbol{p}^2-p_0^2)$$

を使えば

$$\Sigma_R(p) = \Sigma_0(p)\gamma_0 - \Sigma_v(p)\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \frac{\gamma_0}{|\boldsymbol{p}|}M_T^2 Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{p}|}M_T^2\Big(1-\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})\Big)$$

電磁場のときと同じ構造になっているので、plasmino が出てきます。

スペクトル関数も実部と虚部が分かっているので計算できます。そういった結果は「Novel Collective Excitations and the Quasi-Particle Picture of Quarks Coupled with a Massive Boson at Finite Temperature」(hep-ph/0609164) を見てください。若干定義が異なっていますが計算の流れも基本的に同じになっています (誤植がパラパラとあって、式 (A15) はもはやトラップです)。この話の特殊なところはスペクトル関数に粒子と plasmino(正確には Σ_+ に対応する ρ_+ ではフェルミオンと反 plasmino) 以外のピークが中間温度で存在しているところで、原因は質量を持ったボソンのせいのようです。細かい話は hep-ph/0609164 や関連してる hep-ph/0510167、arXiv:0710.5809 なんかを読んでください。ゲージ場を含んだものは arXiv:1011.6452 でやっています。