頂点〜QED〜

HTL 近似を使って QED の頂点を計算します。「光子の自己エネルギー」と「電子の自己エネルギー」とやることはほとんど変わりません。また、これらの結果を流用することで計算を簡略することができます。
ここでは一気に HTL 近似の置き換えをせずに、ちょくちょく行っていきます。新しく近似を行った時には $\simeq$ を使います。

頂点はファインマン則から (ファインマンゲージを使います)

$$
\begin{aligned}
-e\Gamma_\mu &= (-e)^3 T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\gamma_\alpha\frac{-1}{(p_1-k)_\nu\gamma^\nu-m}\gamma_\mu\frac{g_{\alpha\beta}}{k^2}\frac{-1}{(p_2-k)_\nu\gamma^\nu-m}\gamma_\beta \\
e\Gamma_\mu &= e^3 T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\gamma_\alpha\frac{(p_1-k)_\nu\gamma^\nu+m}{(p_1-k)^2-m^2}\gamma_\mu\frac{(p_2-k)_\nu\gamma^\nu+m}{(p_2-k)^2-m^2}\gamma_\beta\frac{g^{\alpha\beta}}{k^2}
\end{aligned}
$$

p_1, p_2 はフェルミオンの運動量、k は光子の運動量で、$k_0 = 2\pi i l T$ です。これに対して HTL 近似を使います。電子の質量 m と分子にいる外線の運動量 p_1^μ, p_2^μ を無視すると

$$
e\Gamma_\mu \simeq e^3 T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\gamma^\alpha\frac{k_\nu\gamma^\nu}{(p_1-k)^2}\gamma_\mu\frac{k_\nu\gamma^\nu}{(p_2-k)^2}\gamma^\beta\frac{g^{\alpha\beta}}{k^2}
$$

ガンマ行列の計算は

$$
k_\nu\gamma^\nu\gamma_\mu k_\lambda\gamma^\lambda = k^\nu k^\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda = k^\nu k^\lambda\gamma_\nu(2g_{\mu\lambda}-\gamma_\lambda\gamma_\mu) = 2k^\nu k_\mu\gamma_\nu - k^2\gamma_\mu
$$

そして、後は γ_α で挟めばいいだけで

$$
\gamma^\alpha\gamma_\nu\gamma_\alpha = \gamma^\alpha(2g_{\nu\alpha}-\gamma_\alpha\gamma_\nu) = 2\gamma_\nu - 4\gamma_\nu = -2\gamma_\nu
$$

よって

$$
\begin{aligned}
e\Gamma_\mu &= e^3 T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-4k^\nu k_\mu\gamma_\nu+2k^2\gamma_\mu}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2} \\
&= e^3 T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}[\frac{-4k^\nu k_\mu\gamma_\nu}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2}+\frac{2\gamma_\mu}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2}] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで、これの第二項を無視できます。第二項はフェルミオン-フェルミオンの形で、これは「光子の自己エネルギー」で出てきた

$$
T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{8p_\mu p_\nu}{p^2(p-k)^2}-\frac{4g_{\mu\nu}}{(p-k)^2})
$$

こんなのと似ています。これらはT^2のオーダになっていました。これと(1)の第二項を見比べると、大雑把に運動量の次元をみると、(1)は運動量の4乗があり、光子の自己エネルギーの方は2乗になっていることが分かります。なので、計算していくと(1)の第二項はT^2じゃないオーダを導くことになります(実際に計算すると$\log T$のオーダを導く)。で、HTL近似はT^2のオーダを拾うように行うものなので、(1)の第二項はHTL近似を取る時には無視してしまえます。

というわけで、計算すべきなのは

$$
\begin{aligned}
e\Gamma_\mu &\simeq e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-4k_\mu k^\nu \gamma_\nu}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2} \\
&= e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-4k_\mu (k_0\gamma_0 + k^i\gamma_i)}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2}
\end{aligned}
$$

$\mu = 0$のときでは

$$
\begin{aligned}
e\Gamma_0 &= e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-4k_0 (k_0\gamma_0 + k^i\gamma_i)}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2} \\
&= e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-4(k_0^2\gamma_0 + k_0 k^i\gamma_i)}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2} \\
&= e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-4(k^2\gamma_0 + |\boldsymbol{k}|^2\gamma_0 + k_0 k^i\gamma_i)}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2} \\
&\simeq e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-4(|\boldsymbol{k}|^2\gamma_0 + k_0 k^i\gamma_i)}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2} \\
&= e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4(|\boldsymbol{k}|^2\gamma_0 + i\omega_l k^i\gamma_i)}{[(\omega_{1n}-\omega_l)^2 + (\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k})^2][(\omega_{2n}-\omega_l)^2 + (\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k})^2](\omega_l^2 + \boldsymbol{k}^2)}
\end{aligned}
$$

(1)と同じように、途中で分子にk^2がいる項は無視できるというのを使っています。というわけで

$$
e\Gamma_0 = 4e^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (|\boldsymbol{k}|^2\gamma_0 J + ik^i\gamma_i J_1)
$$

$\mu = i$では

$$
\begin{aligned}
e\Gamma_i &= e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-4(k_0 k_i\gamma_0 + k_i k^j\gamma_j)}{(p_1-k)^2(p_2-k)^2k^2} \\
&= e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4(i\omega_l k_i\gamma_0 + k_i k^j\gamma_j)}{[(\omega_{1n}-\omega_l)^2 + (\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k})^2][(\omega_{2n}-\omega_l)^2 + (\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k})^2](\omega_l^2 + \boldsymbol{k}^2)} \\
&= 4e^3 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (ik_i\gamma_0 J_1 + k_i k^j\gamma_j J)
\end{aligned}
$$

こんなのになります。Jが和を取る松原振動数が分子にいないもので、J_1がいるものです。

ここから和の計算を行っていきます。Saclay法を使った方が手っ取り早いので、Saclay法を使います。今の場合、フェルミオン-フェルミオン-ボソンの組み合わせで

$$
\begin{aligned}
J &= T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega_{1n}-\omega_l)^2+(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k})^2}\frac{1}{(\omega_{2n}-\omega_l)^2+(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k})^2}\frac{1}{\omega_l^2+\boldsymbol{k}^2}\\
&= T\sum_{l=-\infty}^{\infty}S_F(\omega_{1n}-\omega_l,E_1)S_F(\omega_{2n}-\omega_l,E_2)D(\omega_l,|\boldsymbol{k}|)\\
&= -T\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_0
\end{aligned}
$$

$$
E_1=|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k}|\ ,\ E_2=|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k}|
$$

これがどうなるのかを知る必要があります。符号の関係上最後にマイナスをつけて J_0 を定義しています。３つ伝播関数がいるので、変形させて２つの形にします。J_0 を展開していくと

$$
\begin{aligned}
J_0 =&\frac{-1}{(\omega_{1n}-\omega_l)^2+E_1^2}\frac{-1}{(\omega_{2n}-\omega_l)^2+E_2^2}\frac{-1}{\omega_l^2+\boldsymbol{k}^2}\\
=&\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1}\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}\frac{1}{i\omega_l+|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{i\omega_l-|\boldsymbol{k}|}\\
=&\frac{1}{2E_1}(\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}-\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1})\frac{1}{2E_2}(\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}-\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2})\\
&\qquad\times\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}(\frac{1}{i\omega_l-|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{i\omega_l+|\boldsymbol{k}|})\\
=&\frac{1}{8E_1E_2|\boldsymbol{k}|}\Big(\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}-\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2}\\
&-\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2}\Big)\Big(\frac{1}{i\omega_l-|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{i\omega_l+|\boldsymbol{k}|}\Big)\\
=&\frac{1}{8E_1E_2|\boldsymbol{k}|}\Big(\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}\frac{1}{i\omega_l-|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2}\frac{1}{i\omega_l-|\boldsymbol{k}|}\\
&-\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}\frac{1}{i\omega_l-|\boldsymbol{k}|}+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2}\frac{1}{i\omega_l-|\boldsymbol{k}|}\\
&-\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}\frac{1}{i\omega_l+|\boldsymbol{k}|}+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2}\frac{1}{i\omega_l+|\boldsymbol{k}|}\\
&+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-E_2}\frac{1}{i\omega_l+|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)+E_1}\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)+E_2}\frac{1}{i\omega_l+|\boldsymbol{k}|}\Big)\\
=&\frac{1}{8E_1E_2|\boldsymbol{k}|}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{s_1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-s_1E_1}\frac{s_2}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-s_2E_2}\frac{s}{i\omega_l-s|\boldsymbol{k}|}
\end{aligned}
$$

s,s_1s_2 は ±1 です。これを部分分数分解すると

$$
\begin{aligned}
J_0 =& \frac{1}{8E_1E_2|\boldsymbol{k}|}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{s_1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-s_1E_1}\frac{s_2}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-s_2E_2}\frac{s}{i\omega_l-s|\boldsymbol{k}|} \\
=& \frac{1}{8E_1E_2|\boldsymbol{k}|}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{s_1s_2s}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-s_2E_2-i(\omega_{1n}-\omega_l)+s_1E_1} \\
& \qquad\times\Big(\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-s_1E_1}-\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-s_2E_2}\Big)\frac{1}{i\omega_l-s|\boldsymbol{k}|} \\
=& \frac{1}{8E_1E_2|\boldsymbol{k}|}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{s_1s_2s}{i\omega_{2n}-i\omega_{1n}-s_2E_2+s_1E_1}\Big(\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-s_1E_1}-\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-s_2E_2}\Big)\frac{1}{i\omega_l-s|\boldsymbol{k}|} \\
=& \frac{1}{8E_1E_2|\boldsymbol{k}|}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{-s_1s_2s}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-s_1E_1+s_2E_2} \\
& \qquad\times\Big(\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_l)-s_1E_1}\frac{1}{i\omega_l-s|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{i(\omega_{2n}-\omega_l)-s_2E_2}\frac{1}{i\omega_l-s|\boldsymbol{k}|}\Big)
\end{aligned}
$$

これで、( ) の前の部分は和に関与しなくなるので、２つの伝播関数の形で書けています。伝播関数は

$$
S_F(\omega_n,E_1)=\frac{1}{\omega_n^2+E_1^2}=\frac{-1}{2E_1}(\frac{1}{i\omega_n-E_1}-\frac{1}{i\omega_n+E_1})=\sum_{s_1=\pm1}\frac{-s_1}{2E_1}\frac{1}{i\omega_n-s_1E_1}
$$

なので

$$
S_F(\omega_n,E_1,s_1)=\frac{-s_1}{2E_1}\frac{1}{i\omega_n-s_1E_1}
$$

のように書くことにすれば

$$
\begin{aligned}
J_0 =& \sum_{s,s_1,s_2}\frac{-1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-s_1E_1+s_2E_2} \\
& \qquad\times\Big(\frac{s_2}{2E_2}S_F(\omega_{1n}-\omega_l,E_1,s_1)D(\omega_l,|\boldsymbol{k}|,s)-\frac{s_1}{2E_1}S_{2F}(\omega_{2n}-\omega_l,E_2,s_2)D(\omega_l,|\boldsymbol{k}|,s)\Big)
\end{aligned}
$$

式の形から、s,s_1,s_2 の和を取らずに l の和を先に取りたいので、フェルミオン-ボソンの結果から s_1 と s_2 の和を抜いた

$$
T\sum_m D(\omega_m,k_1,s_1)S_F(\omega_n-\omega_m,E_2,s_2)=-\frac{s_1s_2}{4k_1E_2}\frac{1+n_B(s_1k_1)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_n-s_1k_1-s_2E_2}
$$

これを使うことで

$$
\begin{aligned}
J =& -T\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_0 \\
=& -\sum_{s,s_1,s_2}\frac{-1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-s_1E_1+s_2E_2} \\
&\qquad\times\Big[\frac{s_2}{2E_2}\frac{-ss_1}{4|\boldsymbol{k}|E_1}\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_1E_1)}{i\omega_{1n}-s|\boldsymbol{k}|-s_1E_1}-\frac{s_1}{2E_1}\frac{-ss_2}{4|\boldsymbol{k}|E_2}\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_{2n}-s|\boldsymbol{k}|-s_2E_2}\Big] \\
=& -\frac{1}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{ss_1s_2}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-s_1E_1+s_2E_2} \\
&\qquad\times\Big[\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_1E_1)}{i\omega_{1n}-s|\boldsymbol{k}|-s_1E_1}-\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_{2n}-s|\boldsymbol{k}|-s_2E_2}\Big]
\end{aligned} \tag{2}
$$

これが、フェルミオン-フェルミオンン-ボソンのときの和を取った時の形になります。

この結果に対して HTL 近似を使っていきます。構造を見てみると、[ ] 部分がフェルミオン-ボソンなので、電子の自己エネルギーの場合と同じ格好をしています。このように、電子の自己エネルギーと同じ格好をしていることから、s, s_1, s_2 の ±1 の選択を制限することができます。「電子の自己エネルギー」の結果を持ち出すと、和を取った時に

$$
\Big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|-E_q}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|+E_q}\Big) \tag{a}
$$

$$
\Big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|+E_q}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|-E_q}\Big) \tag{b}
$$

こんなのが出てきます。今の場合でも s, s_1, s_2 の $\pm$ を取れば同じものが出てきます。「電子の自己エネルギー」の計算を見れば分かるように、(a) は HTL 近似を行った時に消えています (分子に和を取る松原振動数がいるときといないとき両方で)。つまり、分母において、E_k, E_q の符号が $+,+$ もしくは $-,-$ となる場合は効いてこないということです。このことを使えば、$s=+1, s_1=s_2=-1$、$s=-1, s_1=s_2=+1$ という 2 パターンだけになるので、HTL 近似のもとで

$$
\begin{aligned}
J \simeq& -\frac{1}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\Big[\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}\Big(\frac{1+n_B(+|\boldsymbol{k}|)-n_F(-E_1)}{i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1}-\frac{1+n_B(+|\boldsymbol{k}|)-n_F(-E_2)}{i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2}\Big) \\
&\qquad+\frac{-1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}\Big(\frac{1+n_B(-|\boldsymbol{k}|)-n_F(+E_1)}{i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1}-\frac{1+n_B(-|\boldsymbol{k}|)-n_F(+E_2)}{i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

このように書くことができます。分布関数を

$$
n_F(-E)=1-n_F(E)\ ,\ n_B(-E)=-(1+n_B(E))
$$

を使って書き換えれば

$$
\begin{aligned}
J =& -\frac{1}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\Big[\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}(\frac{1+n_B(|\boldsymbol{k}|)-1+n_F(E_1)}{i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1}-\frac{1+n_B(|\boldsymbol{k}|)-1+n_F(E_2)}{i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2})\\
&+\frac{-1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}(\frac{1-1-n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(E_1)}{i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1}-\frac{1-1-n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(E_2)}{i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2})\Big]\\
=& -\frac{1}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\Big[\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}(\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_1)}{i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1}-\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_2)}{i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2})\\
&+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}(\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_1)}{i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1}-\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_2)}{i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2})\Big]
\end{aligned}
$$

これで分子に松原振動数がいない場合の計算は出来たんですが、松原振動数がいる場合も必要です。しかし、これは Saklay 法の結果

$$
I_{FB}(\omega_n) = -\sum_{s_1,s_2=\pm1}\frac{s_1s_2}{4k_1E_2}\frac{1+n_B(s_2k_1)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_n-s_1k_1-s_2E_2}
$$

$$
I'_{FB}(\omega_n) = \sum_{s_1,s_2=\pm1}\frac{is_2}{4E_2}\frac{1+n_B(s_1k_1)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_n-s_1k_1-s_2E_2}
$$

を見れば分かるように、I_{FB} に $-ik_1a_1$ をかけることで置き換わります (I'_{FB} が分子に松原振動数がいる場合)。よって、(2) を使って、同じように HTL 近似を取ることで

$$
\begin{aligned}
J_1 =&T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\omega_l S_F(\omega_{1n}-\omega_l,E_1)S_F(\omega_{2n}-\omega_l,E_2)D(\omega_l,|\boldsymbol{k}|)\\
=& -i|\boldsymbol{k}|sJ\\
=&\frac{i}{8E_1E_2}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{s_1s_2}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-s_1E_1+s_2E_2}\Big[\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_1E_1)}{i\omega_{1n}-s|\boldsymbol{k}|-s_1E_1}-\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_{2n}-s|\boldsymbol{k}|-s_2E_2}\Big]\\
\simeq&\frac{i}{8E_1E_2}\Big[\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}(\frac{1+n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(-E_1)}{i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1}-\frac{1+n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(-E_2)}{i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2})\\
&+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}(\frac{1+n_B(-|\boldsymbol{k}|)-n_F(E_1)}{i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1}-\frac{1+n_B(-|\boldsymbol{k}|)-n_F(E_2)}{i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2})\Big]\\
=&\frac{i}{8E_1E_2}\Big[\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}(\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_1)}{i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1}-\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_2)}{i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2})\\
&+\frac{-1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}(\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_1)}{i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1}-\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E_2)}{i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2})\Big]
\end{aligned}
$$

となります。

ここからさらに HTL 近似による書き換えをします。分布関数は

$$
n_F(E_1)\simeq n_F(|\boldsymbol{k}|)\ ,\ n_F(E_2)\simeq n_F(|\boldsymbol{k}|)
$$

と近似して、J を変形すると

$$J \simeq -\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\Big[\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}\Big(\frac{1}{i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1}-\frac{1}{i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2}\Big)$$

$$+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}\Big(\frac{1}{i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1}-\frac{1}{i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2}\Big)\Big]$$

$$=-\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\Big[\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}\frac{i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2-i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2)}$$

$$+\frac{1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}\frac{i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2-i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2)}\Big]$$

$$=-\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\Big[\frac{-1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})+E_1-E_2}\frac{i\omega_{1n}-i\omega_{2n}+E_1-E_2}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2)}$$

$$+\frac{-1}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-E_1+E_2}\frac{i\omega_{1n}-i\omega_{2n}-E_1+E_2}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2)}\Big]$$

$$=\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\Big[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2)}+\frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2)}\Big]$$

$8|\boldsymbol{k}|E_1E_2$ も

$$8|\boldsymbol{k}|E_1E_2 \simeq 8|\boldsymbol{k}|^3$$

としてしまって

$$J \simeq \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^3}[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{k}|+E_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{k}|+E_2)}+\frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{k}|-E_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{k}|-E_2)}]$$

[ ] 部分での分母において、E_1, E_2 を

$$E_1=\sqrt{\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{k}^2-2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{k}|\cos\theta_1}\simeq|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1$$

$$E_2=\sqrt{\boldsymbol{p}_2^2+\boldsymbol{k}^2-2|\boldsymbol{p}_2||\boldsymbol{k}|\cos\theta_2}\simeq|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2$$

このようにすれば、J, J_1 は

$$J \simeq \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^3}\Big[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}+\frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\Big]$$

$$J_1 \simeq -i\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^2}\Big[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}-\frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\Big]$$

これで必要なものは揃ったので、頂点に代入していきます。Γ_0 を計算していきます

$$
e\Gamma_0 = 4e^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(|\boldsymbol{k}|^2\gamma_0 J + ik^i\gamma_i J_1) = I_1 + I_2
$$

第一項 I_1 は HTL 近似による J を入れることで

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 4e^3\gamma_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{k}|^2 \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^3} \\
&\qquad \times \Big[\frac{1}{(i\omega_{1n} - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} + \frac{1}{(i\omega_{1n} + |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} + |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\Big] \\
&= 4e^3\gamma_0 \int d\Omega \int \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{k}|^4 \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^3} \\
&\qquad \times \Big[\frac{1}{(i\omega_{1n} - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} + \frac{1}{(i\omega_{1n} + |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} + |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\Big] \\
&= \frac{e^3}{2}\gamma_0 \int d\Omega \int \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3} 3|\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|) \\
&\qquad \times \Big[\frac{1}{(i\omega_{1n} - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} + \frac{1}{(i\omega_{1n} + |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} + |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\Big] \\
&= \frac{3e^3}{2(2\pi)^3}\frac{\pi^2T^2}{12}\gamma_0 \int d\Omega \Big[\frac{1}{(i\omega_{1n} - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(i\omega_{1n} + |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} + |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\Big] \\
&= \frac{3e^3}{2(2\pi)^3}\frac{\pi^2T^2}{12}\gamma_0 \int d\Omega \frac{2}{(i\omega_{1n} + |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} + |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} \\
&= \frac{e^3T^2}{32\pi}\gamma_0 \int d\Omega \frac{1}{(i\omega_{1n} + |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n} + |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}
\end{aligned}
$$

$d\Omega$ は三次元の角度積分です。途中で使っている積分は

$$
\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|n_B(|\boldsymbol{k}|) = 2\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|)
$$

$$
\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|) = \frac{\pi^2T^2}{12}
$$

$|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1, |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2$ に対しては、三次元の全空間積分であるために、k^i の符号を反転させられるというのを使っています $(\cos\theta \Rightarrow -\cos\theta)$。

第二項 I_2 は、k^i の基底ベクトルを e^i として、J_1 を入れれば

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 4ie^3\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}k^i\gamma_i(-i)\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^2}\\
&\quad\times Big[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}-\frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}Big]\\
&= 4e^3\gamma_i\int d\Omega\int\frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{k}|^2k^i\frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^2}\\
&\quad\times Big[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}-\frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}Big]\\
&= \frac{4e^3\gamma_i}{8(2\pi)^3}\int d\Omega Big[\frac{e^i}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}-\frac{e^i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}Big]\\
&\quad\times\int d|\boldsymbol{k}|\ 3|\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|)\\
&= \frac{4e^3\gamma_i}{8(2\pi)^3}\int d\Omega\frac{-2e^i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\int d|\boldsymbol{k}|\ 3|\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|)\\
&= -\frac{4e^3\gamma_i}{8(2\pi)^3}\frac{3\pi^2T^2}{12}\int d\Omega\frac{2e^i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\\
&= -\frac{e^3T^2\gamma_i}{32\pi}\int d\Omega\frac{e^i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}
\end{aligned}
$$

よって Γ_0 は

$$
e\Gamma_0=\frac{e^3T^2}{32\pi}\int d\Omega\Big[\frac{\gamma_0}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}+\frac{-e^i\gamma_i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}Big]
$$

次に Γ_i を計算します

$$
e\Gamma_i=4e^3T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(ik_i\gamma_0J_1+k_ik^j\gamma_jJ)=L_1+L_2
$$

同様に行っていくことで、第一項 L_1 は

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 4e^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} ik_i \gamma_0 J_1 \\
&= 4ie^3\gamma_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i(-i) \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^2} \\
&\qquad \times \left[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} - \frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\right] \\
&= 4e^3\gamma_0 \int d\Omega \int \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3} |\boldsymbol{k}|^2 |\boldsymbol{k}| e_i \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^2} \\
&\qquad \times \left[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} - \frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\right] \\
&= 4e^3\gamma_0 \int d\Omega \frac{-2e_i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} \int \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3} |\boldsymbol{k}| \frac{3n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8} \\
&= -\gamma_0 \frac{24e^3}{8(2\pi)^3} \frac{\pi^2T^2}{12} \int d\Omega \frac{e_i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} \\
&= -\gamma_0 \frac{e^3T^2}{32\pi} \int d\Omega \frac{e_i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}
\end{aligned}
$$

L_2 は

$$
\begin{aligned}
L_2 &= 4e^3\gamma_j \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i k^j J \\
&= 4e^3\gamma_j \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i k^j \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^3} \\
&\qquad \times \left[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} + \frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\right] \\
&= 4e^3\gamma_j \int d\Omega \int \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3} |\boldsymbol{k}|^2 e_i e^j |\boldsymbol{k}|^2 \frac{n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8|\boldsymbol{k}|^3} \\
&\qquad \times \left[\frac{1}{(i\omega_{1n}-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}-|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} + \frac{1}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\right] \\
&= 4e^3\gamma_j \int d\Omega \frac{2e_i e^j}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} \int \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3} |\boldsymbol{k}| \frac{3n_F(|\boldsymbol{k}|)}{8} \\
&= \gamma_j \frac{24e^3}{8(2\pi)^3} \frac{\pi^2T^2}{12} \int d\Omega \frac{e_i e^j}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)} \\
&= \gamma_j \frac{e^3\pi^2T^2}{32\pi} \int d\Omega \frac{e_i e^j}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}
\end{aligned}
$$

よって Γ_i は

$$e\Gamma_i = \frac{e^3T^2}{32\pi}\int d\Omega\Big[\frac{-e_i\gamma_0}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}+\frac{e_ie^j\gamma_j}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\Big]$$

というわけで、Γ_μ は HTL 近似によって

$$e\Gamma_0 = \frac{e^3T^2}{32\pi}\int d\Omega\frac{\gamma_0-e^i\gamma_i}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}$$

$$e\Gamma_i = \frac{e^3T^2}{32\pi}\int d\Omega\frac{-e_i\gamma_0+e_ie^j\gamma_j}{(i\omega_{1n}+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(i\omega_{2n}+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}$$

となります。

この結果がワード・高橋恒等式を満たしていることを確かめます。そのために、HTL 近似は解析接続後に T^2 のオーダになっているようにしているので、解析接続して完全にミンコフスキー空間に移します (解析接続する前でも満たしていますが、今のミンコフスキー空間的な表記ではワード・高橋恒等式の右辺の符号が反転することに注意してください)。ミンコフスキー空間なので、通常のワード・高橋恒等式

$$(p_2-p_1)^\mu\Gamma_\mu = (p_2-p_1)^\mu(\gamma_\mu+\Gamma^{(1)}_\mu) = S^{-1}(p_2)-S^{-1}(p_1)$$

$$S^{-1}(p) = \not{p}-\Sigma(p)$$

を考えます。$\Gamma^{(1)}_\mu$ が今求めたもので (ここからは、p_0 は解析接続したものを指します)

$$\begin{aligned}
(p_2-p_1)^\mu\Gamma^{(1)}_\mu &= \frac{e^2T^2}{32\pi}\int d\Omega\frac{(p_2-p_1)^\mu(\gamma_0-e^i\gamma_i,-e_i\gamma_0+e_ie^j\gamma_j)}{(p_1^0+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)(p_2^0+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}\\
&= (p_2-p_1)^0(\gamma_0-e^i\gamma_i)+(p_2-p_1)^i(-e_i\gamma_0+e_ie^j\gamma_j)\\
&= p_2^0(\gamma_0-e^i\gamma_i)+p_2^i(-e_i\gamma_0+e_ie^j\gamma_j)-p_1^0(\gamma_0-e^i\gamma_i)-p_1^i(-e_i\gamma_0+e_ie^j\gamma_j)\\
&= (p_2^0-p_2^ie_i)\gamma_0+(-p_2^0+p_2^ie_i)e^j\gamma_j-(p_1^0-p_1^ie_i)\gamma_0-(-p_1^0+p_1^ie_i)e^j\gamma_j\\
&= (p_2^0-p_2^ie_i)\gamma_0-(p_2^0-p_2^ie_i)e^j\gamma_j-(p_1^0-p_1^ie_i)\gamma_0+(p_1^0-p_1^ie_i)e^j\gamma_j
\end{aligned}$$

二行目から分子以外無視して書いています。ここでの $p^0-p^ie_i$ は

$$p^0-p^ie_i = p^0+\boldsymbol{p}\cos\theta$$

なので

$$(p_2-p_1)^\mu\Gamma^{(1)}_\mu = \frac{e^2T^2}{32\pi}\int d\Omega(\frac{\gamma_0-e^j\gamma_j}{(p_1^0+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1)}-\frac{\gamma_0-e^j\gamma_j}{(p_2^0+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2)}) \tag{3}$$

これに対して $\Sigma(p)$ は

$$\Sigma(p) = \frac{e^2T^2}{32\pi}\int d\Omega(\frac{\gamma_0-e^i\gamma_i}{p^0+|\boldsymbol{p}|\cos\theta})$$

となっているので

$$\Sigma(p_2)-\Sigma(p_1)=\frac{e^2T^2}{32\pi}\int d\Omega\big(\frac{\gamma_0-e^i\gamma_i}{p_2^0+|\boldsymbol{p}_2|\cos\theta_2}-\frac{\gamma_0-e^i\gamma_i}{p_1^0+|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_1}\big) \tag{4}$$

よって、ワード・高橋恒等式は (3) と (4) から

$$(p_2-p_1)^\mu(\gamma_\mu+\Gamma_\mu^{(1)})=(p_2-p_1)^\mu\gamma_\mu-\Sigma(p_2)+\Sigma(p_1)$$

これをちゃんと満たしているのが分かります。よって、HTL 近似は T^2 のオーダでワード・高橋恒等式を満たしていることが確かめられました。

求めた伝播関数が 3 個ある場合の和をまとめておきます

・フェルミオン-フェルミオン-ボソン

$$J=T\sum_{l=-\infty}^{\infty}S_F(\omega_{1n}-\omega_l,E_1)S_F(\omega_{2n}-\omega_l,E_2)D(\omega_l,|\boldsymbol{k}|)$$

$$=T\sum_{s,s_1,s_2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}S_F(\omega_{1n}-\omega_l,E_1,s_1)S_F(\omega_{2n}-\omega_l,E_2,s_2)D(\omega_l,|\boldsymbol{k}|,s)$$

$$=-\frac{1}{8|\boldsymbol{k}|E_1E_2}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{ss_1s_2}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-s_1E_1+s_2E_2}$$

$$\times\Big[\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_1E_1)}{i\omega_{1n}-s|\boldsymbol{k}|-s_1E_1}-\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_{2n}-s|\boldsymbol{k}|-s_2E_2}\Big]$$

$$J_1=T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\omega_lS_F(\omega_{1n}-\omega_l,E_1)S_F(\omega_{2n}-\omega_l,E_2)D(\omega_l,|\boldsymbol{k}|)$$

$$=-i|\boldsymbol{k}|sJ$$

$$=\frac{i}{8E_1E_2}\sum_{s,s_1,s_2}\frac{s_1s_2}{i(\omega_{1n}-\omega_{2n})-s_1E_1+s_2E_2}$$

$$\times\Big[\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_1E_1)}{i\omega_{1n}-s|\boldsymbol{k}|-s_1E_1}-\frac{1+n_B(s|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_2E_2)}{i\omega_{2n}-s|\boldsymbol{k}|-s_2E_2}\Big]$$