和の計算〜メリン変換〜

ここでの話は「Dimensional Regularization and Mellin Summation in High-Temperature Calculations」(hep-ph/0011012v1) を参考にしています。注意として、この論文は相当雑に書かれているようで、曖昧な箇所がチラホラあったので、個人的な解釈をかなり入れてここの話を作っています。
次元正則化を使っているので、ゼロ温度の計算を知っている人にとっては他の方法に比べてなじみやすいかもしれません。特殊なのは、基本的に高温近似との対応が取れているものであるという点と、計算途中でゼロ温度項と温度項に分けるということがほとんどできないという点です。
利点としては、次元正則化を使っているので、一気に発散項も計算できるという点があります。
数学的な取り扱いを相当大雑把にしているので、厳密さはあまりないです。

基本的な発想は和を積分に変えるというものです。「和の計算」では留数の和になるように積分に変えていましたが、ここではメリン (Mellin) 変換 (もしくはメラン変換) を使います。メリン変換を使った和の計算方法はあまり見ないかもしれませんが、昔から知られているものです。
メリン変換は

$$M[f;s]=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx \qquad (a<\mathrm{Re}\ s<b) \tag{1}$$
$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}M[f;s]ds \qquad (a<c<b) \tag{2}$$

というようにして定義されます。これを利用していきます。
有限温度で必要な和の形は

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(\omega_n)$$

こんなのです。で、ここで $f(\omega_n)$ の形として

$$f(\omega_n)=\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{\omega_n^{2t}}{(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)^\sigma}$$

このような実数スカラー場による形を考えます ($\omega_n=2\pi nT$)。次元正則化を使うので、$f(\omega_n)$ の積分は 3 次元でなく d 次元にしています。また、分子の ω_n が奇数の累乗のとき n の和を取ると消えるので、$2t$ としています (t は $1,2,\ldots$)。そうすると、$f(\omega_n)$ は $1\sim\infty$ までの和を取って、2 倍して、$n=0$ の場合を足せばいいので

$$I=2T\sum_{n=1}^{\infty}f(\omega_n)$$

このような和を考えることにします。
メリン変換の式 (2) において、$x=\omega_n$ とすれば

$$f(\omega_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\omega_n^{-s}M[f;s]ds$$

なので、I は

$$
\begin{aligned}
I &= 2T\sum_{n=1}^{\infty} f(\omega_n) \\
&= \frac{T}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega_n^{-s} M[f;s]ds \\
&= \frac{T}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2\pi T)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^s M[f;s]ds \\
&= \frac{T}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2\pi T)^{-s}\zeta(s) M[f;s]ds
\end{aligned} \tag{3}
$$

$\zeta(s)$ はリーマンのゼータ関数で

$$
\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}\ s > 1)
$$

となっています。ゼータ関数の $s=1$ で特異点を持つという性質のために、$c>1$ という条件を課すことになります。

$M[f;s]$ はメリン変換の式 (1) から

$$
\begin{aligned}
M[f;s] &= \int_0^{\infty} dx\ x^{s-1}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{x^{2t}}{(x^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)^{\sigma}} \\
&= \int_0^{\infty} dx\ x^{2t+s-1}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{(x^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)^{\sigma}}
\end{aligned}
$$

この x 積分を d 次元積分に対応した形にします。d 次元単位球の表面積が

$$
\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}
$$

となっていることを使い、x を $2t+s$ 次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ の絶対値 $|\boldsymbol{x}|$ だとすることで

$$
\int_0^{\infty} d|\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{x}|^{2t+s-1} = \frac{1}{\Omega_d}\int d^{2t+s}x
$$

と書き換えられて

$$
M[f;s] = \frac{\Gamma(t+s/2)}{2\pi^{(2t+s)/2}}\int d^{2t+s}x\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)^{\sigma}}
$$

これは見方を変えると、$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{p}^2$ が $2t+s+d$ 次元のベクトルの二乗となっているように見えるので、新しく $q^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{p}^2$ を $2t+s+d$ 次元のベクトルとすることで

$$
M[f;s] = \frac{\Gamma(t+s/2)}{2\pi^{(2t+s)/2}}\int \frac{d^{2t+s+d}q}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2+m^2)^{\sigma}}
$$

と書くことができます。この積分は、場の量子論の「次元正則化」で出てくる積分そのものなので

$$
\begin{aligned}
M[f;s] &= \frac{\Gamma(t+s/2)}{2\pi^{(2t+s)/2}}\frac{\pi^{(2t+s+d)/2}}{(2\pi)^d}(\frac{1}{m^2})^{\sigma-\frac{2t+s+d}{2}}\frac{\Gamma(\sigma-\frac{2t+s+d}{2})}{\Gamma(\sigma)} \\
&= \frac{\Gamma(t+s/2)}{2^{d+1}\pi^{d/2}}(\frac{1}{m})^{2\sigma-2t-s-d}\frac{\Gamma(\sigma-t-\frac{s+d}{2})}{\Gamma(\sigma)} \\
&= \frac{\Gamma(t+s/2)}{2(4\pi)^{d/2}}(\frac{1}{m})^{2\sigma-2t-s-d}\frac{\Gamma(\sigma-t-\frac{s+d}{2})}{\Gamma(\sigma)}
\end{aligned}
$$

この式から $M[f;s]$ が発散していないためには

$$2\sigma-2t-s-d>0$$

となっている必要があることが分かります。また、この制限から、大本の次元 d が

$$d<2\sigma-2t-s$$

となっていればいいことが分かります。しかし、ここでは次元正則化を使うので、$M[f;s]$ を求める積分を実行する段階ではこの制限が常に満たされているとすることができます。そして、c に対する制限は

$$1<c<2\sigma-2t-d$$

となります。これも次元正則化の d 次元においては常に成立させられます (実際の計算ではゼロ温度との対応から予想できるように、次元を決めるときに発散を含むことになります)。

というわけで、$M[f;s]$ を (3) に代入することで

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{T}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(2\pi T)^{-s}\zeta(s)M[f;s]ds \\
&= \frac{T}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(2\pi T)^{-s}\zeta(s)\frac{\Gamma(t+s/2)}{2(4\pi)^{d/2}}(\frac{1}{m})^{2\sigma-2t-s-d}\frac{\Gamma(\sigma-t-\frac{s+d}{2})}{\Gamma(\sigma)}ds \\
&= \frac{m^{d-2\sigma+2t}}{2\pi i(4\pi)^{d/2}\Gamma(\sigma)}T\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\frac{2\pi T}{m})^{-s}\zeta(s)\Gamma(t+s/2)\Gamma(\sigma-t-\frac{s+d}{2})ds
\end{aligned}
$$

s の積分は留数定理を使えばいいです。極を持つガンマ関数は $\Gamma(\sigma-t-(s+d)/2)$ の方なので、これの極を拾うようにします。ガンマ関数は 0 と負の整数のときに極を持つので

$$s=2\sigma-2t-d+2k\quad(0,1,2,\dots,\infty)$$

これが s の複素平面上での極となっています。というわけで、右半円を通るような経路を考えればいいです。このとき、付け加えた右半円からの寄与がなければ問題は起きません。単純に考えれば $(m/2\pi T)^s$ が $m/2\pi T<1$ のとき、$|s|\to\infty$ で収束してくれそうですので、右半円をつけても平気です。この $m/2\pi T<1$ は高温極限に対応するものです。また、実軸上で c だけ原点から動いており、$c>1$ なので、ゼータ関数の極を拾わずにすんでいます。

見やすくするために s 積分を

$$s=2\sigma-2t-d-2z=\rho-2z$$

と変数変換すると (積分部分だけ抜き出します)

$$
\begin{aligned}
&-2\int_{c+i\infty}^{c-i\infty}(\frac{2\pi T}{m})^{-s}\zeta(s)\Gamma(t+s/2)\Gamma(\sigma-t-\frac{s+d}{2})dz \\
&= -2\int_{-(c-\rho)/2+i\infty}^{-(c-\rho)/2-i\infty}(\frac{2\pi T}{m})^{-(\rho-2z)}\zeta(\rho-2z)\Gamma(t+(\rho-2z)/2)\Gamma(z)dz \\
&= 2\int_{-(c-\rho)/2-i\infty}^{-(c-\rho)/2+i\infty}(\frac{2\pi T}{m})^{-(\rho-2z)}\zeta(\rho-2z)\Gamma(t+(\rho-2z)/2)\Gamma(z)dz
\end{aligned}
$$

z の複素平面上で $|c-\rho|$ から左半円を作るように経路を取ります。そうすれば、$z=0,-1,-2,\ldots,-\infty$ の極が拾えます ($c-\rho$ は積分の収束条件 $1<c<\rho$ より、$c-\rho<0$)。ガンマ関数の $z=-k$ の留数は (1 位の極)

$$
\mathrm{Res}\Gamma(z)|_{z=-k}=\frac{(-1)^k}{k!}
$$

このようになっているので、留数定理より

$$
2\pi i\times 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{2\pi T}{m})^{-(\rho+2k)}\zeta(\rho+2k)\Gamma(t+(\rho+2k)/2)
$$

となります。よって

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{2m^{-\rho}}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\sigma)}T\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{2\pi T}{m})^{-(\rho+2k)}\zeta(\rho+2k)\Gamma(t+(\rho+2k)/2) \\
&= \frac{2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\sigma)}(2\pi T)^{-\rho}T\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{2\pi T}{m})^{-2k}\zeta(\rho+2k)\Gamma(\sigma+k-d/2) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ρ は $\rho=2\sigma-2t-d$ です。これが、$f(\omega_n)$ の和に対する d 次元での一般的な結果になります。後は次元 d を知りたい次元に近づければばいいです。

というわけで、$t=0,\sigma=1$ の場合を行います。この時の式は、$d=3$ で

$$
J=T\sum_{n\neq0}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}+T\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\boldsymbol{p}^2+m^2}=J_1+J_2 \qquad (5)
$$

これの第一項は明らかに発散を含んでいます。J_2 は適当に計算して後でくっつければいいので無視していきます。

J_1 に対して、d 次元で積分を行った結果 (4) を使うことで

$$
\begin{aligned}
J_1 &= T\sum_{n\neq0}\mu^{3-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2} \\
&= \frac{2\mu^{3-d}}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(1)}(2\pi T)^{-2+d}T\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{2\pi T}{m})^{-2k}\zeta(2-d+2k)\Gamma(1+k-d/2)
\end{aligned}
$$

μ は次元合わせの質量パラメータです (後で $d=3$ にするので $3-d$ となっています)。J_1 を $d=3$ にしたとき、問題になってくるのは $k=1$ の場合です。他の場合は問題なくゼータ関数とガンマ関数は定義できるんですが、$k=1$ ではゼータ関数が定義できません。なので、$3-2\epsilon$ として微小にずらすことで

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{2\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{(3-2\epsilon)/2}}(2\pi T)^{1-2\epsilon}T\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{2\pi T}{m})^{-2k}\zeta(2k-1+2\epsilon)\Gamma(k-1/2+\epsilon) \\
&= 2\frac{2\pi T^2}{(4\pi)^{3/2}(4\pi)^{-\epsilon}}(\frac{4\pi^2T^2}{\mu^2})^{-\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{2\pi T}{m})^{-2k}\zeta(2k-1+2\epsilon)\Gamma(k-1/2+\epsilon) \\
&= \frac{T^2}{(4\pi)^{1/2}}(\frac{\pi T^2}{\mu^2})^{-\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{2\pi T}{m})^{-2k}\zeta(2k-1+2\epsilon)\Gamma(k-1/2+\epsilon)
\end{aligned}
$$

これをみれば、$k=1$ のときに特異性が現れることがすぐに分かります。というわけで、ϵ を微小としてゼータ関数の特異点周りの極限は

$$\zeta(1+2\epsilon)=\frac{1}{2\epsilon}+\gamma \quad (\lim_{s\to 1}(\zeta(s)-\frac{1}{s-1})=\gamma)$$

γ はオイラー定数です。ついでに、ガンマ関数と $(\pi T^2/\mu^2)^{-\epsilon}$ も展開して

$$\Gamma(1/2+\epsilon)=\Gamma(1/2)(1-\epsilon(2\log 2+\gamma))$$

$$(\frac{\pi T^2}{\mu^2})^{-\epsilon}=\exp[\epsilon\log(\frac{\mu^2}{\pi T^2})]=1+\epsilon\log(\frac{\mu^2}{\pi T^2})$$

「圧力への寄与」でも出てきましたが、一応ガンマ関数の展開の仕方を書いておくと

$$\Gamma(1/2+\epsilon)=\Gamma(1/2)+\frac{d\Gamma(z)}{dz}|_{z=1/2}\epsilon=\Gamma(1/2)+\Gamma(1/2)\psi_0(\frac{1}{2})\epsilon$$

ψ_0 はポリガンマ関数で、$\psi_0(1/2)=-2\log 2-\gamma$ となっています。これらを代入して、$\epsilon\to 0$ で消えない項を取り出すと

$$
\begin{aligned}
J_1(k=1) &= -\frac{T^2}{(4\pi)^{1/2}}(\frac{\pi T^2}{\mu^2})^{-\epsilon}(\frac{2\pi T}{m})^{-2}\zeta(1+2\epsilon)\Gamma(1/2+\epsilon) \\
&= -\frac{T^2}{(4\pi)^{1/2}}(\frac{2\pi T}{m})^{-2}\Gamma(1/2)(1+\epsilon\log(\frac{\mu^2}{\pi T^2}))(\frac{1}{2\epsilon}+\gamma)(1-\epsilon(2\log 2+\gamma)) \\
&= -\frac{T^2}{(4\pi)^{1/2}}(\frac{2\pi T}{m})^{-2}\Gamma(1/2)\big(\frac{1}{2\epsilon}+\gamma+\frac{1}{2}\log(\frac{\mu^2}{\pi T^2})-\frac{1}{2}(2\log 2+\gamma)\big) \\
&= -\frac{m^2\pi^{1/2}}{(4\pi)^{1/2}(2\pi)^2}\frac{1}{2}\big(\frac{1}{\epsilon}+\gamma+\log(\frac{\mu^2}{\pi T^2})-2\log 2\big) \\
&= -\frac{m^2}{16\pi^2}\big(\frac{1}{\epsilon}+\gamma-\log 4\pi+2\log\frac{\mu}{T}\big)
\end{aligned}
$$

これと、$k=0$ の場合を足せば

$$
\begin{aligned}
J_1(k=0,1) &= \frac{T^2}{(4\pi)^{1/2}}\zeta(-1)\Gamma(-1/2) - \frac{m^2}{16\pi^2}\big(\frac{1}{\epsilon} + \gamma - \log 4\pi + 2\log\frac{\mu}{T}\big) \\
&= \frac{T^2}{(4\pi)^{1/2}}\frac{-1}{12}(-2\pi^{1/2}) - \frac{m^2}{16\pi^2}\big(\frac{1}{\epsilon} + \gamma - \log 4\pi + 2\log\frac{\mu}{T}\big) \\
&= \frac{T^2}{12} - \frac{m^2}{16\pi^2}\big(\frac{1}{\epsilon} + \gamma - \log 4\pi + 2\log\frac{\mu}{T}\big) \\
&= \frac{T^2}{12} - \frac{m^2}{16\pi^2}\big(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + 2\log\frac{\mu}{4\pi T} + 2\gamma\big)
\end{aligned}
$$

ここで気がつくのは、第一項が高温近似を行ったときの温度依存項と一致している点です (ここでの計算は「リングダイアグラム」の Π_1 を 12λ で割ったものに対応)。というわけで、メリン変換を使った方法では、k の和のいくつかの項を取り出せば (今の場合は $k=0$ だけで最初のオーダが出てくる)、高温近似を行ったものと対応をとることができます (J_2 は T のオーダからの寄与)。

第二項には発散項がいるので、まともに次元正則化を行った場合と比較してみます。場の量子論の「くり込み〜ϕ^4 理論〜」での自己エネルギーの計算結果は (ここと対応させるために ϵ を 2 倍しています)

$$
\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2} = \int\frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{p_E^2+m^2} = -\frac{m^2}{16\pi^2\epsilon} - \frac{m^2}{16\pi^2}\Big(1-\gamma+\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)\Big)
$$

「リンダイアグラム」で示したように、元の式 (5) をゼロ温度部分と有限温度部分を切り離した時、この計算が現われます。発散項を見比べると一致していることが分かります (定数項もある程度一致します)。

やってきたことは、和をメリン変換によって積分に変え、積分を実行するというものなので、「和の計算」の方法と基本的な方針は同じです。メリン変換の方法では積分が実行できる代わりに留数の和が残り、「和の計算」の方法では和がなくなる代わりに積分が残るという違いがあるだけです。で、メリン変換の方法ではいくつかの和の項を取り出せば、高温近似を取って積分したものと対応するということです。