和の計算〜メリン変換 2〜

ここでの話は「Feynman parametrization and Mellin summation at finite temperature」(arXiv:0804.3414v3[hep-ph]) を参考にしています。ここでの記号は基本的に同じものを使っていますが、ω_n と ω_l は個人的な趣味で反対にしています。
この論文の狙いは有限温度の計算にファインマンパラメータを使っでも、正しい結果を導けるということを示すものです。しかし、ここでは単にどうやってメリン変換とファインマンパラメータを使って計算していくのかということだけを示していきます (後半で出てくる Π_2 ではメリン変換とは無関係な計算をする代わりに、ファインマンパラメータを使う時の注意点が出てくるので若干触れることになりますが)。
ただ計算していくだけなので、興味のない人は最後の部分だけ見てください。最後に有限温度の計算でファインマンパラメータを使う時の注意点を書いています。その時に松原振動数の周期性と書いていますが、これは松原振動数が $2\pi nT$ のようにかけるために、三角関数関係が周期性を持つということです。

ϕ^4 理論の 1 ループの自己エネルギーではファインマンパラメータを使う意味がないので、ϕ^3 理論の自己エネルギーを使います。ϕ^3 理論での自己エネルギーは QED の自己エネルギーと同じ形で

$$\Pi(\omega_n,|\boldsymbol{p}|)=\frac{\lambda^2}{2}T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Delta_F(\omega_l,|\boldsymbol{k}|)\Delta_F(\omega_l-\omega_n,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|)$$

$$(\omega_l=2\pi lT\ ,\ \omega_n=2\pi nT)$$

となっています (温度グリーン関数に $\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+\Pi$ と入れるなら、左辺をマイナスに取るべきですが、害がないのでこのまま使用します)。「和の計算」では $\omega_l+\omega_n,|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}|$ と取っていましたが、内線の向きが違うだけです。ボソンの温度グリーン関数 $\Delta_F(\omega_l,|\boldsymbol{k}|)$ は

$$\Delta_F(\omega_l,|\boldsymbol{k}|)=\frac{1}{\omega_l^2+|\boldsymbol{k}|^2+m^2}$$

なので

$$\Pi(\omega_n,|\boldsymbol{p}|)=\frac{\lambda^2}{2}T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_l^2+E_{\boldsymbol{k}}^2}\frac{1}{(\omega_l-\omega_n)^2+E^2}$$

$$(E_{\boldsymbol{k}}^2=|\boldsymbol{k}|^2+m^2\ ,\ E^2=|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|^2+m^2)$$

これの和の計算をメリン変換を使って行います。和の範囲を取りやすくするために

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}=\sum_{l=-\infty}^{-|n|-1}+\sum_{l=|n|+1}^{\infty}+\sum_{l=-|n|}^{+|n|}$$

と分離します。これの第一項と第二項に対応する部分を Π_1、第三項に対応する部分を Π_2 とします。Π_1 に対してはメリン変換を使い、Π_2 は普通に和を計算します。ちなみに Π_2 の計算のほうが面倒です。
　まず、第一項と第二項から計算していきます。これは

$$\Pi_1(\omega_n, |\boldsymbol{p}|) = \frac{\lambda^2}{2} T \Big(\sum_{l=-\infty}^{-|n|-1} + \sum_{l=|n|+1}^{\infty} \Big) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_l^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2} \frac{1}{(\omega_l - \omega_n)^2 + E^2}$$

ここで、ファインマンパラメータによる置き換えをします。ゼロ温度と同じようにファインマンパラメータを使うことで

$$\Pi_1 = \frac{\lambda^2}{2} T \Big(\sum_{l=-\infty}^{-|n|-1} + \sum_{l=|n|+1}^{\infty} \Big) \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(1-x)(\omega_l^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2) + x((\omega_l - \omega_n)^2 + E^2)]^2}$$

これを次元正則化による形にするために変形します。今の場合 3 次元積分なので $|\boldsymbol{k}|^2$ が出てくるように変形していくことで

$$\begin{aligned}
&(1-x)(\omega_l^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2) + x((\omega_l - \omega_n)^2 + E^2) \\
&= \omega_l^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2 - x(\omega_l^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2) + x(\omega_l^2 + \omega_n^2 - 2\omega_n\omega_l + E^2) \\
&= \omega_l^2 + |\boldsymbol{k}|^2 + m^2 - x(|\boldsymbol{k}|^2 + m^2) + x(\omega_n^2 - 2\omega_n\omega_l + |\boldsymbol{p}|^2 + |\boldsymbol{k}|^2 - 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} + m^2) \\
&= |\boldsymbol{k}|^2 - 2x(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}) + \omega_l^2 + x(\omega_n^2 - 2\omega_n\omega_l + |\boldsymbol{p}|^2) + m^2 \\
&= (\boldsymbol{k} - x\boldsymbol{p})^2 - x^2|\boldsymbol{p}|^2 + x|\boldsymbol{p}|^2 + \omega_l^2 + x\omega_n^2 - 2x\omega_n\omega_l + m^2 \\
&= \boldsymbol{k}'^2 - x^2|\boldsymbol{p}|^2 + x|\boldsymbol{p}|^2 + x\omega_n^2 - x^2\omega_n^2 + x^2\omega_n^2 + \omega_l^2 - 2x\omega_n\omega_l + m^2 \\
&= \boldsymbol{k}'^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (\omega_l - x\omega_n)^2 + m^2
\end{aligned}$$

途中で $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} - x\boldsymbol{p}$ と置き換えています。これ以降 $\boldsymbol{k}'$ は $\boldsymbol{k}$ と書きます。これを和の形に合わせて変形させると

$$\sum_{l=-\infty}^{-|n|-1} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (\omega_l - x\omega_n)^2 + m^2]^2}$$

$$+ \sum_{l=|n|+1}^{\infty} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (\omega_l - x\omega_n)^2 + m^2]^2}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{-|n|-1} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (2\pi T)^2(l - xn)^2 + m^2]^2}$$

$$+ \sum_{l=|n|+1}^{\infty} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (2\pi T)^2(l - xn)^2 + m^2]^2}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (2\pi T)^2(-l - |n| - 1 - xn)^2 + m^2]^2}$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (2\pi T)^2(l + |n| + 1 - xn)^2 + m^2]^2}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (2\pi T)^2(l + |n| + 1 + xn)^2 + m^2]^2}$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + (2\pi T)^2(l + |n| + 1 - xn)^2 + m^2]^2}$$

よって

$$\Pi_1 = \frac{\lambda^2}{2} T \int_0^1 dx (S_+ + S_-)$$

となります。$S_\pm$ は

$$S_\pm = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + \omega_{l\pm}^2 + m^2]^2}$$

$$\omega_{l\pm}^2 = (2\pi T)^2 (l + |n| + 1 \pm xn)^2$$

で、積分部分を

$$f(\omega_{l\pm}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\boldsymbol{k}^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + \omega_{l\pm}^2 + m^2]^2}$$

と書けば

$$S_\pm = \sum_{l=0}^{\infty} f(\omega_{l\pm})$$

という和の計算をすればいいことになります。
　そうすると、メリン変換

$$M[f;s]=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx \qquad (a<\mathrm{Re}s<b) \tag{1}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{-s}M[f;s]ds \qquad (a<c<b) \tag{2}$$

を使うことで

$$\begin{aligned}S_\pm&=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\sum_{l=0}^\infty(\frac{1}{\omega_{l\pm}})^sM[f;s]ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\frac{1}{2\pi T})^s\sum_{l=0}^\infty(\frac{1}{l+|n|+1\pm xn})^sM[f;s]ds\end{aligned}$$

となって、これの和は Hurwitz のゼータ関数

$$\xi(s,a)=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(k+a)^s}$$

を使えばいいです。Hurwitz のゼータ関数も Re$s>1$ という条件があるので、$c>1$ という条件が出てきます。Hurwitz のゼータ関数によって和は

$$\sum_{l=0}^\infty(\frac{1}{l+|n|+1\pm xn})^s=\xi(s,|n|+1\pm xn)$$

と書けるので

$$S_\pm=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\frac{1}{2\pi T})^s\xi(s,|n|+1\pm xn)M[f;s]ds \tag{3}$$

　$M[f;s]$ は (1) から

$$\begin{aligned}M[f;s]=&\int_0^\infty y^{s-1}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{[\boldsymbol{k}^2+x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+y^2+m^2]^2}dy\\=&\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\Omega_s}d^sy\frac{1}{[\boldsymbol{k}^2+y^2+x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2]^2}\\=&\frac{2\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int d^sy\frac{1}{[\boldsymbol{k}^2+y^2+x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2]^2}\end{aligned}$$

二行目で y 積分を s 次元積分に置き換えていて、Ω_s は s 次元単位球の表面積です。
　次元正則化によって積分を実行するために、3 次元 $\boldsymbol{k}$ 積分を d 次元にして

$$M[f;s] = \frac{\Gamma(s/2)}{2\pi^{s/2}}\mu^{3-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int d^sy\frac{1}{[\boldsymbol{k}^2+y^2+x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2]^2}$$
$$= \frac{\Gamma(s/2)}{2\pi^{s/2}}\mu^{3-d}\int\frac{d^{d+s}k}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k^2+x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2]^2}$$

μ は次元合わせの質量パラメータです。$\boldsymbol{k}$ を新しく、$k^2=\boldsymbol{k}^2+y^2$ の $d+s$ 次元ベクトルと定義しなおしています。この積分を実行すると

$$M[f;s] = \frac{\Gamma(s/2)}{2\pi^{s/2}}\mu^{3-d}\frac{\pi^{(d+s)/2}}{(2\pi)^d}\Big(\frac{1}{x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2}\Big)^{2-\frac{d+s}{2}}\frac{\Gamma(2-\frac{d+s}{2})}{\Gamma(2)}$$
$$= \mu^{3-d}\frac{\Gamma(s/2)}{2(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{1}{x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2}\Big)^{2-\frac{d+s}{2}}\frac{\Gamma(2-\frac{d+s}{2})}{\Gamma(2)}$$

$M[f;s]$ が発散しないためには、ガンマ関数から $4-d-s>0$ となっている必要があります。

　この $M[f;s]$ を (3) にいれることで

$$S_\pm = \frac{1}{2\pi i}\mu^{3-d}\frac{1}{2(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\frac{1}{2\pi T})^s\xi(s,|n|+1\pm xn)\Gamma(s/2)\Gamma(2-\frac{d+s}{2})$$
$$\times\,(\frac{1}{x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2})^{2-\frac{d+s}{2}}ds$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{\mu^{3-d}}{2(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)}(\frac{1}{x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2})^{2-\frac{d}{2}}$$
$$\times\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\xi(s,|n|+1\pm xn)\Gamma(s/2)\Gamma(2-\frac{d+s}{2})(\frac{(2\pi T)^2}{x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2})^{-\frac{s}{2}}ds$$

s 積分は複素積分によって実行します。このとき、問題になってくるのが、s の無限大で収束してくれるかです。それをになっているのは

$$(\frac{x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2}{(2\pi T)^2})^{\frac{s}{2}}$$

の部分です。これが 1 よりも小さければ収束してくれるはずです。そのためには T^2 が十分大きければいいので、自動的に高温極限を取ることになります。1 つ注意として、今の場合 ω_n の中に T がいるので、たとえ T を大きく取ったとしてもその項が分母の T を打ち消してしまいます。しかし、和の計算は終了しているので、解析接続するのだと考えて、$p_0,|\boldsymbol{p}|,m\ll T$ だとすればいいように思えます (p_0 は $i\omega_n$ を解析接続したもの)。しかし、この形では特異点がどうなっているのか明確には分からないので、この段階で解析接続を行うのは危険と言えば危険です。このため、$x(1-x)$ は x の範囲が $0\sim1$ ということから、よっぽど n を大きく取らない限りこの項は 1 より小さい数を返すので、$|\boldsymbol{p}|,m\ll T$ で 1 より小さな値を十分返してくれると考えた方がこの段階では無難です。

　次に問題になるのが、c の範囲ですが、これは $M[f;s]$ が発散しないための条件

$$4-d-s>0$$

から、$d=3-2\epsilon$ とすることで、c に対して

$$1 < c < 1 + 2\epsilon$$

という制限をつけることになります (下限の 1 は Hurwitz のゼータ関数からの制限)。

　これで、複素積分を行うときには右半円をつければいいということになります。そうすると、右半円部分での極はガンマ関数

$$\Gamma(2 - \frac{d+s}{2}) = \Gamma(2 - \frac{3-2\epsilon+s}{2})$$

から出てくるので

$$s = 1 + 2\epsilon + 2a \quad (a = 0, 1, 2, \cdots)$$

が極の位置になります。これによって $S_\pm$ は

$$\begin{aligned} S_\pm =& \frac{\mu^{2\epsilon}}{2(4\pi)^{(3-2\epsilon)/2}}\Big(\frac{1}{x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + m^2}\Big)^{2-\frac{3-2\epsilon}{2}} \\ &\times \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(-1)^a}{a!}\xi(1 + 2\epsilon + 2a, |n| + 1 \pm xn)\Gamma(\frac{1+2\epsilon+2a}{2})\Big(\frac{(2\pi T)^2}{x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + m^2}\Big)^{-\frac{1+2\epsilon+2a}{2}} \\ =& \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{(3-2\epsilon)/2}}(2\pi T)^{-1-2\epsilon} \\ &\times \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(-1)^a}{a!}\xi(1 + 2\epsilon + 2a, |n| + 1 \pm xn)\Gamma(\frac{1+2\epsilon+2a}{2})\Big(\frac{(2\pi T)^2}{x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + m^2}\Big)^{-a} \end{aligned}$$

ガンマ関数の留数は

$$\mathrm{Res}\Gamma(z)|_{z=-k} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

によって求められます (今の場合ではさらに 2 倍する必要があります)。求められた $S_\pm$ は ϵ が 0 でない限り特異性を持たないので、解析接続するのに何の問題もありません。というわけで、後は a に関する和のいくつかの項を拾っていけばいいです。

　次に、Π_2 の計算をします。こっちはメリン変換とか次元正則化とかなしに計算していきます。Π_2 は

$$\Pi_2(\omega_n, |\boldsymbol{p}|) = \frac{\lambda^2}{2}T\sum_{l=-|n|}^{+|n|}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_l^2 + E_{\boldsymbol{k}}^2}\frac{1}{(\omega_l - \omega_n)^2 + E^2}$$

これもまずはファインマンパラメータによって

$$\Pi_2 = \frac{\lambda^2}{2} T \sum_{l=-|n|}^{+|n|} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\omega_l - x\omega_n)^2 + (\boldsymbol{k} - x\boldsymbol{p})^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + m^2]^2}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} T \sum_{l=-|n|}^{+|n|} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\omega_l - x\omega_n)^2 + z + m^2]^2}$$

和の計算をするために

$$\frac{1}{[(\omega_l - x\omega_n)^2 + z + m^2]^2} = -\frac{\partial}{\partial m^2} \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n)^2 + z + m^2}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial m^2} \frac{1}{2i(z+m^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) - i(z+m^2)^{1/2}} - \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) + i(z+m^2)^{1/2}}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial m^2} \frac{1}{2iy^{1/2}} \left(\frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) - iy^{1/2}} - \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) + iy^{1/2}}\right)$$

$$\left(y = (\boldsymbol{k} - x\boldsymbol{p})^2 + x(1-x)(\omega_n^2 + |\boldsymbol{p}|^2) + m^2\right)$$

と変形して

$$\Pi_2 = -\frac{\lambda^2}{2} T \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial m^2} \frac{1}{2iy^{1/2}} \sum_{l=-|n|}^{+|n|} \left(\frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) - iy^{1/2}} - \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) + iy^{1/2}}\right)$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2} T \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial m^2} \frac{1}{2iy^{1/2}} L$$

L を計算していきます。変形していくと

$$L = \sum_{l=-|n|}^{+|n|} \left(\frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) - iy^{1/2}} - \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) + iy^{1/2}}\right)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) - iy^{1/2}} - \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) + iy^{1/2}}\right)$$

$$- \sum_{l=-\infty}^{-|n|-1} \left(\frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) - iy^{1/2}} - \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) + iy^{1/2}}\right) - \sum_{l=|n|+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) - iy^{1/2}} - \frac{1}{(\omega_l - x\omega_n) + iy^{1/2}}\right)$$

これの第一項は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+ix} \frac{1}{n+iy} = \frac{\pi}{x-y} (\coth(\pi x) - \coth(\pi y))$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega_l - x\omega_n - iy^{1/2}} - \frac{1}{\omega_l - x\omega_n + iy^{1/2}}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi T}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{l + i(ix\omega_n - y^{1/2})/2\pi T} - \frac{1}{l + i(ix\omega_n + y^{1/2})/2\pi T}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi T}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{2iy^{1/2}/2\pi T}{[l + i(ix\omega_n - y^{1/2})/2\pi T][l + i(ix\omega_n + y^{1/2})/2\pi T]} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi T}2iy^{1/2}\frac{\pi}{-2y^{1/2}}\Big(\coth(\pi\frac{ix\omega_n - y^{1/2}}{2\pi T}) - \coth(\pi\frac{ix\omega_n + y^{1/2}}{2\pi T})\Big) \\
&\quad = \frac{-i\pi}{2\pi T}\Big(\coth(\frac{ix\omega_n - y^{1/2}}{2T}) - \coth(\frac{ix\omega_n + y^{1/2}}{2T})\Big)
\end{aligned}
$$

残っている第二項と第三項は

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{l=-\infty}^{-|n|-1}\left(\frac{1}{\omega_l - x\omega_n - iy^{1/2}} - \frac{1}{\omega_l - x\omega_n + iy^{1/2}}\right) - \sum_{l=|n|+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega_l - x\omega_n - iy^{1/2}} - \frac{1}{\omega_l - x\omega_n + iy^{1/2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=-\infty}^{-|n|-1}\left(\frac{1}{l - (x\omega_n + iy^{1/2})/2\pi T} - \frac{1}{l - (x\omega_n - iy^{1/2})/2\pi T}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=|n|+1}^{\infty}\left(\frac{1}{l - (x\omega_n + iy^{1/2})/2\pi T} - \frac{1}{l - (x\omega_n - iy^{1/2})/2\pi T}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-l - |n| - (x\omega_n + iy^{1/2})/2\pi T} - \frac{1}{-l - |n| - (x\omega_n - iy^{1/2})/2\pi T}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l + |n| - (x\omega_n + iy^{1/2})/2\pi T} - \frac{1}{l + |n| - (x\omega_n - iy^{1/2})/2\pi T}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l + |n| + x\omega_n/2\pi T + iy^{1/2}/2\pi T} - \frac{1}{l + |n| + x\omega_n/2\pi T - iy^{1/2}/2\pi T}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l + |n| - x\omega_n/2\pi T - iy^{1/2}/2\pi T} - \frac{1}{l + |n| - x\omega_n/2\pi T + iy^{1/2}/2\pi T}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{-2iy^{1/2}/2\pi T}{(l + |n| + x\omega_n/2\pi T)^2 + (y^{1/2}/2\pi T)^2} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2iy^{1/2}/2\pi T}{(l + |n| - x\omega_n/2\pi T)^2 + (y^{1/2}/2\pi T)^2}
\end{aligned}
$$

ここでディガンマ関数 $\psi(z+1)$ (z は複素数、$z = a + ib$) の級数展開

$$
\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n(n+z)}\right) \quad (\gamma : \text{オイラー定数}\ )
$$

から

$$
\begin{aligned}
\psi(z+1)-\psi(z^*+1)= &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^*}{n(n+z^*)} \\
= &\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a+ib}{n(n+a+ib)}-\frac{a-ib}{n(n+a-ib)}) \\
= &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+ib)n(n+a-ib)-(a-ib)n(n+a+ib)}{n^2(n+a)^2+n^2b^2} \\
= &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2ibn^2}{n^2(n+a)^2+n^2b^2} \\
= &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2ib}{(n+a)^2+b^2}
\end{aligned}
$$

となっていることを使えば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{-2iy^{1/2}/2\pi T}{(l+|n|+x\omega_n/2\pi T)^2+(y^{1/2}/2\pi T)^2}-\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2iy^{1/2}/2\pi T}{(l+|n|-x\omega_n/2\pi T)^2+(y^{1/2}/2\pi T)^2} \\
&=\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{-2ib}{(l+a)^2+b^2}+\frac{1}{2\pi T}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{-2ib}{(l+a')^2+b^2} \\
&=\frac{1}{2\pi T}\big[-\psi(a+i\frac{y^{1/2}}{2\pi T})+\psi(a-i\frac{y^{1/2}}{2\pi T})-\psi(a'+i\frac{y^{1/2}}{2\pi T})+\psi(a'-i\frac{y^{1/2}}{2\pi T})\big] \\
&=\frac{1}{2\pi T}\big[-\psi(|n|+1+i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})+\psi(|n|+1+i\frac{-i\omega_n x-y^{1/2}}{2\pi T}) \\
&\qquad -\psi(|n|+1-i\frac{-i\omega_n x-y^{1/2}}{2\pi T})+\psi(|n|+1-i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})\big]
\end{aligned}
$$

このように和は計算されます。よって

$$
\begin{aligned}
L =&\frac{-i\pi}{2\pi T}\Big(\coth(\frac{i\omega_n x-y^{1/2}}{2T})-\coth(\frac{i\omega_n x+y^{1/2}}{2T})\Big) \\
&+\frac{1}{2\pi T}\Big[-\psi(|n|+1+i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})+\psi(|n|+1+i\frac{-i\omega_n x-y^{1/2}}{2\pi T}) \\
&\qquad -\psi(|n|+1-i\frac{-i\omega_n x-y^{1/2}}{2\pi T})+\psi(|n|+1-i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})\Big]
\end{aligned}
$$

これを Π_2 に入れれば

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 =& -\frac{\lambda^2}{2}T\int_0^1 dx\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{1}{2iy^{1/2}}\Big[\frac{-i\pi}{2\pi T}\Big(\coth(\frac{i\omega_n x-y^{1/2}}{2T})-\coth(\frac{i\omega_n x+y^{1/2}}{2T})\Big)\\
&\qquad+\frac{1}{2\pi T}\Big[-\psi(|n|+1+i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})+\psi(|n|+1-i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})\\
&\qquad\qquad+\psi(|n|+1+i\frac{-i\omega_n x-y^{1/2}}{2\pi T})-\psi(|n|+1-i\frac{-i\omega_n x-y^{1/2}}{2\pi T})\Big]\Big]\\
=& -\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{1}{4y^{1/2}}\Big[\coth(\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2T})+\coth(\frac{i\omega_n x+y^{1/2}}{2T})\\
&\qquad+\frac{i}{\pi}\psi(|n|+1+i\frac{i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})-\frac{i}{\pi}\psi(|n|+1-i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})\\
&\qquad+\frac{i}{\pi}\psi(|n|+1+i\frac{-i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})-\frac{i}{\pi}\psi(|n|+1-i\frac{i\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})\Big]\\
=& -\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{1}{4y^{1/2}}\\
&\times\sum_{s=\pm1}\Big[\coth(\frac{si\omega_n x+y^{1/2}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{si\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{si\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})\Big]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ω_n と $|n|$ を分けて書いていることには注意してください。松原振動数としての ω_n と和の計算上出てくる $|n|$ を区別しています。この理由は下の (5) を見れば分かります。

この式において、m^2 の微分は

$$
\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{y^{1/2}}
$$

というかかり方をしています (F は $is\omega_n x+y^{1/2}$ を変数にもつ関数)。これは

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{y^{1/2}} &= \frac{F'(is\omega_n x+y^{1/2})}{y^{1/2}}\frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{\partial y}{\partial m^2}-\frac{1}{2}F(is\omega_n x+y^{1/2})y^{-3/2}\frac{\partial y}{\partial m^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{F'(is\omega_n x+y^{1/2})}{y}-\frac{1}{2}F(is\omega_n x+y^{1/2})y^{-3/2}
\end{aligned}
$$

となります (F' は F の変数による微分)。y は

$$
y=(\boldsymbol{k}-x\boldsymbol{p})^2+x(1-x)(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2)+m^2
$$

なので、m^2 で微分すれば 1 になります。これは x での微分

$$
\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y(si\omega_n+\frac{1}{2y^{1/2}}\frac{\partial y}{\partial x})}
$$

と一致しています。計算してみれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y(si\omega_n+\frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{\partial y}{\partial x})} &= \frac{F'(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y(si\omega_n+\frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{\partial y}{\partial x})}(si\omega_n x+\frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{\partial y}{\partial x}) \\
&\quad -\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{2(si\omega_n y+\frac{1}{2}y^{1/2}\frac{\partial y}{\partial x})^2}(si\omega_n\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{4}y^{-1/2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2+\frac{1}{2}y^{1/2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) \\
&= \frac{F'(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y} \\
&\quad -\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{2(-\omega_n^2y^2+\frac{1}{4}y(\frac{\partial y}{\partial x})^2+si\omega_n y^{3/2}\frac{\partial y}{\partial x})}(si\omega_n\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{4}y^{-1/2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2-y^{1/2}\omega_n^2) \\
&= \frac{F'(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y} \\
&\quad -\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y^{3/2}(-\omega_n^2y^{1/2}+\frac{1}{4}y^{-1/2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2+si\omega_n\frac{\partial y}{\partial x})}(si\omega_n\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{4}y^{-1/2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2-y^{1/2}\omega_n^2) \\
&= \frac{F'(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y}-\frac{F(is\omega_n x+y^{1/2})}{2y^{3/2}}
\end{aligned}
$$

となって一致していることが分かります。これを使えば x 積分を消せて

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 =& -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4}\sum_{s=\pm1}\frac{1}{2(si\omega_n y+\frac{1}{2}y^{1/2}\frac{\partial y}{\partial x})} \\
&\times\Big[\coth(\frac{is\omega_n x+y^{1/2}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{is\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{is\omega_n x+y^{1/2}}{2\pi T})\Big]\Big|_0^1 \\
=& \Pi_2(x=1)-\Pi_2(x=0)
\end{aligned}
$$

$\Pi_2(x=1)$ と $\Pi_2(x=0)$ の計算に使うものを先に出しておくと

$$
\begin{aligned}
&y(x=1)=(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2+m^2=E^2 \\
&y(x=0)=|\boldsymbol{k}|^2+m^2=E_{\boldsymbol{k}}^2 \\
&\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=1}=-\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2-2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} \\
&\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0}=\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2-2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$x=1$ の項は (見やすくするために E を $E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}$ と書きます)

$$
\begin{aligned}
\Pi_2(x=1)=&-\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{8}\sum_{s=\pm1}\frac{1}{si\omega_n E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}^2+\frac{1}{2}E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}(-\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2-2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})} \\
&\times\Big[\coth(\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}}{2\pi T})\Big]
\end{aligned}
$$

これの角度積分を行うために $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}$ を新しく $\boldsymbol{k}$ と置き換えて

$$
\begin{aligned}
\Pi_2(x=1) = & -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{8}\sum_{s=\pm1}\frac{1}{si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}^2+\frac{1}{2}E_{\boldsymbol{k}}(-\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2-2\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}))} \\
& \times\Big[\coth(\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big] \\
= & -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{8}\sum_{s=\pm1}\frac{1}{si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}^2+\frac{1}{2}E_{\boldsymbol{k}}(-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2-2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})} \\
& \times\Big[\coth(\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big] \\
= & -\frac{\lambda^2}{2}2\pi\sum_{s=\pm1}\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^3}\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8}\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{1}{si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}(-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos\theta)} \\
& \times\Big[\coth(\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big] \\
= & -\frac{\lambda^2}{2}\sum_{s=\pm1}\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8}\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}\log\frac{-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2+2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2+2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|} \\
& \times\Big[\coth(\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big]
\end{aligned}
$$

$x=0$ の項は

$$
\begin{aligned}
\Pi_2(x=0) = & -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{8}\sum_{s=\pm1}\frac{1}{si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}^2+\frac{1}{2}E_{\boldsymbol{k}}(|\boldsymbol{p}|^2-2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}+\omega_n^2)} \\
& \times\Big[\coth(\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big] \\
= & -\frac{\lambda^2}{2}\sum_{s=\pm1}\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{1}{si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}^2+\frac{1}{2}E_{\boldsymbol{k}}(\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos\theta)} \\
& \times\Big[\coth(\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big] \\
= & -\frac{\lambda^2}{2}\sum_{s=\pm1}\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8}\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}\log\frac{\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2+2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{\omega_n^2+|\boldsymbol{p}|^2+2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|} \\
& \times\Big[\coth(\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big] \\
= & \frac{\lambda^2}{2}\sum_{s=\pm1}\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8}\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}\log\frac{-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2-2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2-2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|} \\
& \times\Big[\coth(\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big]
\end{aligned}
$$

というわけで、$\Pi_1(x=0)$ 側の s の符号を逆にすれば対数部分を一致させられるので

$$\Pi_2 = -\frac{\lambda^2}{2}\sum_{s=\pm 1}\int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8}\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}\log\frac{-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2-2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{-\omega_n^2-|\boldsymbol{p}|^2-2si\omega_n E_{\boldsymbol{k}}-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}$$
$$\times\Big[\coth(\frac{-is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2T})+\coth(\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2T})$$
$$-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{-is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{-is\omega_n+E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})$$
$$+\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1+is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})-\frac{is}{\pi}\psi(|n|+1-is\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2\pi T})\Big]$$

この場合は $\boldsymbol{k}$ 積分が実行できずに残ります。この結果は特異性を持っていないので、問題なく解析接続できます。しかし、$i\omega_n \to p_0$ と解析接続する前に、coth 部分とディガンマ関数部分の松原振動数による周期性を考慮する必要があります。これは松原振動数によって生じる周期性をちゃんと取り込まないと間違った結果を出すためです。

ディガンマ関数部分は

$$\begin{aligned}\psi(a+1+ib)-\psi(a+1-ib) &= \sum_{l=1}^\infty \frac{2ib}{(l+a)^2+b^2}\\ &= \sum_{l=a+1}^\infty \frac{2ib}{l^2+b^2}\\ &= \sum_{l=1}^\infty \frac{2ib}{l^2+b^2}-\sum_{l=1}^a\frac{2ib}{l^2+b^2}\\ &= i2\pi\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi b}+\frac{1}{e^{2\pi b}-1}\big)-\sum_{l=1}^a\frac{2ib}{l^2+b^2}\\ &= i2\pi\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi b}+\frac{1}{2}(\coth(\pi b)-1)\big)-\sum_{l=1}^a\frac{2ib}{l^2+b^2}\\ &= i\big(-\frac{1}{b}+\pi\coth\pi b\big)-\sum_{l=1}^a\frac{2ib}{l^2+b^2}\end{aligned} \tag{5}$$

途中で

$$\frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{x/2\pi}{n^2+(x/2\pi)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x-1}$$

$$\coth(\frac{x}{2})=1+\frac{2}{e^x-1}$$

を使っています。このように変形すれば coth が含まれていることが分かり、実際に周期性を考えなければいけないことが分かります。なので、解析接続する前にこれによる周期性をちゃんと考えなくてはいけません。また、例えば $a=|n|$ だとすれば、明確に $|n|$ と $i\omega_n$ が区別されることも分かります。

ここで求められた Π は、$p_0=0$，$|\boldsymbol{p}|\to 0$ の極限で他の方法の結果と一致します。結局のところ厳密に求めきることはできないので、わざわざこんな面倒な方法を取る理由はあまりない気がします。

そもそもこの計算を示している論文は、有限温度の計算でファインマンパラメータを使っても正しい結果が導けるということを示すのが主目的です。これは 1990 年代にファインマンパラメータを使った計算は間違っている

ということが示されたためです。しかし、ここで見てきたようにファインマンパラメータを使っても正しい結果が導けます。それではなんで間違った結果を導いていたのかというと、松原振動数による周期性を無視して解析接続を行っていたことと、ファインマンパラメータの範囲を式の対称性から $0 \sim 1/2$ に取っていたためだと主張しています。この周期性と積分範囲による問題の詳しい話は原論文のイントロや appendix を読んでください。

一応どういうことなのか簡単に言っておきます。松原振動数による周期性の問題は、coth は松原振動数によって変形できるといったことから起きます。この周期性を無視して解析接続してしまうと間違った結果が導かれます。この事情のために (4) において $|n|$ と ω_n を区別しています (明確に区別されることを見るにはディガンマ関数を和の形にすればいい。(5) 参照)。そして、ファインマンパラメータの範囲を変えてしまうと問題になるのは、積分の端点で特異性を持ってしまうためです。

というわけで、ファインマンパラメータを使う時の注意は、余計なことをせずに素直に計算しろということです。