和の計算〜Saclay 法〜

ここでは他の和の計算方法として Saclay 法と呼ばれるものを説明します (最後に見る手順を Saclay 法として一般的に言われることが多いですが、基本的に同じことをするので一括して Saclay 法としてしまいます)。ループの計算において伝播関数が 2 個以上あるときに便利で、特に基本的な公式の形があるというわけではない計算方法です。この方法では「有限温度でのグリーン関数」で出てきたスペクトル関数や時間成分だけを変換したグリーン関数を利用します。

計算すべき和の形としてボソンの伝播関数が 2 個ある場合を使います (「和の計算」でやったものと同じ)

$$I(\omega_n) = T\sum_m D(\omega_n - \omega_m)D(\omega_m)$$

$$D(\omega_m) = \frac{1}{\omega_m^2 + E^2} \quad (E = \sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 + m^2})$$

$$D(\omega_n - \omega_m) = \frac{1}{(\omega_n - \omega_m)^2 + E'^2}$$

$D(\omega_n)$ に運動量を入れていないのは、ここでは無関係なので表記を簡潔にするためです。まずは伝播関数の時間成分のみをフーリエ変換して

$$\begin{aligned} I(\omega_n) &= T\sum_m \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' e^{i(\omega_n - \omega_m)\tau} e^{i\omega_m \tau'} D(\tau)D(\tau') \\ &= T\sum_m \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau} e^{i(\tau' - \tau)\omega_m} D(\tau)D(\tau') \end{aligned}$$

$$D(\tau) = \langle T(\phi(\tau)\phi(0))\rangle_\beta$$

この式を計算するために和の関係式を使うのでそれを簡単に導出します。まず和の関係式 (ポアソンの総和則の一般形)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi mx} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-2i\pi mz}dz$$

これの $f(x) = \delta(x)$ を考えることで

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x+n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi mx} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)e^{-2i\pi mz}dz \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x+n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi mx} \end{aligned}$$

なので、$x \to x/\beta$ と置き換えれば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x/\beta + n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi mx/\beta}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x + n\beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_m x}$$

という関係式が導けます。なので (n は $-\infty$ から $+\infty$ までなので符号を逆にしても問題ない)

$$T \sum_m e^{i\omega_m(\tau' - \tau)} = \sum_j \delta(\tau' - \tau - j\beta)$$

を使うことで

$$\begin{aligned} I(\omega_n) &= \sum_j \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau} \delta(\tau' - \tau - j\beta) D(\tau) D(\tau') \\ &= \sum_j \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau} \delta(\tau' - (\tau + j\beta)) D(\tau) D(\tau') \end{aligned}$$

τ, τ' の積分範囲 $[0, \beta]$ より、τ の値の範囲に対してデルタ関数内で $\tau' - (\tau + j\beta) = 0$ とできる $j = 0$ だけが値を返せて

$$\begin{aligned} I(\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau} \delta(\tau' - \tau) D(\tau) D(\tau') \\ &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} D(\tau) D(\tau) \end{aligned}$$

そして $D(\tau)$ は、実時間でのフーリエ変換

$$D^>(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt D^>(t) e^{ik_0 t}$$

そして、これの逆変換

$$D^>(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} D^>(k_0) e^{-ik_0 t}$$

において、$t \to -i\tau$ と置き換えればいいので

$$D(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} D^>(k_0) e^{-k_0 \tau} \tag{1}$$

$$D(\tau) = D^>(-i\tau) \qquad (0 \le \tau \le \beta)$$

となっていることが分かります (二行目の関係は「虚時間法」参照)。さらにスペクトル関数を使えば $D^{>}(k_0)$ は

$$D^{>}(k_0) = (1 + n_B(k_0))\rho(k_0) \quad (n_B(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}) \tag{2}$$

と書けます。(1)(2) を使うことで I は

$$\begin{aligned}
I(\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} D(\tau) D(\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{dk_0'}{2\pi} \int_0^\beta d\tau e^{-k_0\tau} e^{-k_0'\tau} e^{i\omega_n\tau} (1 + n_B(k_0))(1 + n_B(k_0'))\rho(k_0)\rho(k_0') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{dk_0'}{2\pi} \int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n - k_0 - k_0')\tau} \big(1 + n_B(k_0)\big)\big(1 + n_B(k_0')\big)\rho(k_0)\rho(k_0')
\end{aligned}$$

τ 積分は単純に実行できるので

$$I(\omega_n) = \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{dk_0'}{2\pi} \frac{1}{i\omega_n - k_0 - k_0'} (e^{(i\omega_n - k_0 - k_0')\beta} - 1)\big(1 + n_B(k_0)\big)\big(1 + n_B(k_0')\big)\rho(k_0)\rho(k_0')$$

そして

$$e^{i\omega_n\beta} = e^{i2\pi} = \cos 2\pi = 1$$

なので

$$I(\omega_n) = \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{dk_0'}{2\pi} \frac{1}{i\omega_n - k_0 - k_0'} (e^{-(k_0 + k_0')\beta} - 1)(1 + n_B(k_0))(1 + n_B(k_0'))\rho(k_0)\rho'(k_0')$$

$(1 + n_B(k_0))(1 + n_B(k_0'))$ は単純に計算すると

$$\begin{aligned}
&1 + n_B(k_0) + n_B(k_0') + n_B(k_0)n_B(k_0') \\
&= \frac{e^{\beta k_0'} - 1}{e^{\beta k_0} - 1} \frac{e^{\beta k_0} - 1}{e^{\beta k_0'} - 1} + \frac{e^{\beta k_0} - 1}{e^{\beta k_0} - 1} \frac{1}{e^{\beta k_0'} - 1} + \frac{e^{\beta k_0'} - 1}{e^{\beta k_0} - 1} \frac{1}{e^{\beta k_0'} - 1} + \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \frac{1}{e^{\beta k_0'} - 1} \\
&= \frac{[(e^{\beta k_0} - 1)(e^{\beta k_0'} - 1) + e^{\beta k_0} - 1 + e^{\beta k_0'} - 1] + 1}{(e^{\beta k_0} - 1)(e^{\beta k_0'} - 1)} \\
&= \frac{[e^{\beta k_0} e^{\beta k_0'} - e^{\beta k_0'} - e^{\beta k_0} + 1 + e^{\beta k_0} - 1 + e^{\beta k_0'} - 1] + 1}{(e^{\beta k_0} - 1)(e^{\beta k_0'} - 1)} \\
&= \frac{e^{\beta k_0} e^{\beta k_0'}}{(e^{\beta k_0} - 1)(e^{\beta k_0'} - 1)}
\end{aligned} \tag{3}$$

外からかかっている exp をかければ

$$e^{-(k_0+k_0')\beta}\frac{e^{\beta k_0}e^{\beta k_0'}}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}=\frac{1}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}$$

なので (3) に $(e^{-(k_0+k_0')\beta}-1)$ を掛けた場合は

$$\frac{1}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}-\frac{e^{\beta k_0}e^{\beta k_0'}}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}=\frac{-e^{\beta k_0}e^{\beta k_0'}+1}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}$$

これは

$$\begin{aligned}(1+f(k_0)+f(k_0'))=1+\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}+\frac{1}{e^{\beta k_0'}-1} &= \frac{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}+\frac{e^{\beta k_0'}+e^{\beta k_0}-2}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}\\ &= \frac{e^{\beta(k_0+k_0')}+1-e^{\beta k_0}-e^{\beta k_0'}+e^{\beta k_0'}+e^{\beta k_0}-2}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}\\ &= \frac{e^{\beta(k_0+k_0')}-1}{(e^{\beta k_0}-1)(e^{\beta k_0'}-1)}\end{aligned}$$

つまり

$$(e^{-(k_0+k_0')\beta}-1)(1+f(k_0)+f(k_0')+f(k_0)f(k_0'))=-(1+f(k_0)+f(k_0'))$$

このように書き換えられます。
もしくは、分布関数の関係

$$e^{-\beta k_0}=\frac{n_B(k_0)}{1+n_B(k_0)}$$

を使ってしまえば

$$\begin{aligned}(e^{-(k_0+k_0')\beta}-1)(1+n_B(k_0))(1+n_B(k_0')) &= \Big(\frac{n_B(k_0)n_B(k_0')}{(1+n_B(k_0))(1+n_B(k_0'))}-1\Big)\big(1+n_B(k_0)\big)\big(1+n_B(k_0')\big)\\ &= n_B(k_0)n_B(k_0')-(1+n_B(k_0))(1+n_B(k_0'))\\ &= -\big(1+n_B(k_0)+n_B(k_0')\big)\end{aligned}$$

となるので、かなり簡単に同じ関係が出てきます。
というわけで

$$I(\omega_n)=-\int\frac{dk_0}{2\pi}\frac{dk_0'}{2\pi}\frac{1}{i\omega_n-k_0-k_0'}\big(1+n_B(k_0)+n_B(k_0')\big)\rho(k_0)\rho(k_0')$$

スペクトル関数は相互作用のない自由な場合のやつを使えばいいので

$$\rho(k_0) = 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k_0^2 - E^2) \quad (\epsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0) \ \ \theta : \text{階段関数}\ )$$

これより

$$\begin{aligned}
I(\omega_n) &= -\int dk_0 dk_0' \frac{1 + n_B(k_0) + n_B(k_0')}{i\omega_n - k_0 - k_0'} \epsilon(k_0)\delta(k_0^2 - E^2)\epsilon(k_0')\delta(k_0'^2 - E'^2) \\
&= -\int dk_0 dk_0' \frac{1 + n_B(k_0) + n_B(k_0')}{i\omega_n - k_0 - k_0'} \frac{\epsilon(k_0)\epsilon(k_0')}{4|k_0||k_0'|}[\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)][\delta(k_0' + E') + \delta(k_0' - E')] \\
&= -\int dk_0 dk_0' \frac{1 + n_B(k_0) + n_B(k_0')}{i\omega_n - k_0 - k_0'} \frac{\epsilon(k_0)\epsilon(k_0')}{4|k_0||k_0'|}\big[\delta(k_0 + E)\delta(k_0' + E') + \delta(k_0 - E)\delta(k_0' + E') \\
&\qquad\qquad + \delta(k_0 + E)\delta(k_0' - E') + \delta(k_0 - E)\delta(k_0' - E')\big] \\
&= -\Big[\frac{1 + n_B(-E) + n_B(-E')}{i\omega_n + E + E'}\frac{1}{4EE'} - \frac{1 + n_B(E) + n_B(-E')}{i\omega_n - E + E'}\frac{1}{4EE'} \\
&\qquad - \frac{1 + n_B(-E) + n_B(E')}{i\omega_n + E - E'}\frac{1}{4EE'} + \frac{1 + n_B(E) + n_B(E')}{i\omega_n - E - E'}\frac{1}{4EE'}\Big]
\end{aligned}$$

$\epsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0)$ なので、$\delta(k_0 - E)\delta(k_0' + E')$ のように E の符号が混ざっている項は符号が反転します $(E, E' > 0)$。
分布関数の関係

$$n_B(-E) = -(1 + n_B(E))$$

を使って

$$\begin{aligned}
I(\omega_n) &= -\frac{1}{4EE'}\Big[\frac{1 - (1 + n_B(E)) - (1 + n_B(E'))}{i\omega_n + E + E'} - \frac{1 + n_B(E) - (1 + n_B(E'))}{i\omega_n - E + E'} \\
&\qquad - \frac{1 - (1 + n_B(E)) + n_B(E')}{i\omega_n + E - E'} + \frac{1 + n_B(E) + n_B(E')}{i\omega_n - E - E'}\Big] \\
&= -\frac{1}{4EE'}\Big[\frac{-1 - n_B(E) - n_B(E')}{i\omega_n + E + E'} - \frac{n_B(E) - n_B(E')}{i\omega_n - E + E'} - \frac{-n_B(E) + n_B(E')}{i\omega_n + E - E'} + \frac{1 + n_B(E) + n_B(E')}{i\omega_n - E - E'}\Big] \\
&= -\frac{1}{4EE'}\Big[\big(1 + n_B(E) + n_B(E')\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n - E - E'} - \frac{1}{i\omega_n + E + E'}\Big) \\
&\qquad + \big(n_B(E) - n_B(E')\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n + E - E'} - \frac{1}{i\omega_n - E + E'}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

これで和の計算が実行できたことになり、「和の計算」でやったものと同じ結果を導いています。
ちなみに、和の計算が出来たので、外線の運動量 $i\omega_n$ を解析接続によって連続値 p_0 に持っていけて

$$I(p_0) = -\frac{1}{4EE'}\Big[\big(1+n_B(E)+n_B(E')\big)\big(\frac{1}{p_0-E-E'}-\frac{1}{p_0+E+E'}\big)$$

$$+\big(n_B(E)-n_B(E')\big)\big(\frac{1}{p_0+E-E'}-\frac{1}{p_0-E+E'}\big)\Big]$$

次にフェルミオンが絡んでいる場合として、フェルミオン-ボソンの場合でやってみます。出発点は

$$I(\omega_n) = T\sum_m S_F(\omega_n-\omega_m)D(\omega_m) \tag{4}$$

$$D(\omega_m) = \frac{1}{\omega_m^2+E_B^2} \quad (\omega_m = 2\pi nT\ ,\ E_B^2 = \boldsymbol{k}^2+m_B^2)$$

$$S_F(\omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2+E_F^2} \quad (\omega_n = 2\pi T(n+\frac{1}{2})\ ,\ E_F^2 = \boldsymbol{p}^2+m_F^2)$$

ここでは元のフェルミオンの伝播関数

$$\frac{-1}{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m_F} = \frac{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}+m_F}{\omega_n^2+E_F^2}$$

から分子の部分を抜いたものを使います。なんでかというと、分子に和を取らなくてはいけない松原振動数 ω_m が乗っている項と和を取る必要のないもので構成される項とに分離できるために、別々に計算できるからです。和を取る項が乗っている場合は

$$T\sum_m \omega_m S_F(\omega_n-\omega_m)D(\omega_m)$$

のようにして計算します。
(4) の計算においてやることは最初の場合と一緒で、フーリエ変換して

$$\begin{aligned}
I(\omega_n) &= T\sum_m\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_m\tau}e^{i(\omega_n-\omega_m)\tau'}D(\tau)S_F(\tau') \\
&= T\sum_m\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau' e^{i(\tau-\tau')\omega_m}e^{i\omega_n\tau'}D(\tau)S_F(\tau') \\
&= \sum_j\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\delta(\tau-\tau'-j\beta)e^{i\omega_n\tau'}D(\tau)S_F(\tau') \\
&= \sum_j\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\delta(\tau-(\tau'+j\beta))e^{i\omega_n\tau'}D(\tau)S_F(\tau')
\end{aligned}$$

この場合でも、τ, τ' の積分範囲 $[0,\beta]$ より、$j=0$ だけが値を返せて

$$
\begin{aligned}
I(\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau'} \delta(\tau - \tau') D(\tau) S_F(\tau') \\
&= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} D(\tau) S_F(\tau)
\end{aligned}
$$

そして、それぞれの関係として

$$
S_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-p_0\tau} S_F^{>}(p_0) \ , \ S_F^{>}(p_0) = (1 - n_F(p_0))\rho_F(p_0)
$$

$$
D(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} D^{>}(k_0) \ , \ D^{>}(k_0) = (1 + n_B(k_0))\rho_B(k_0)
$$

$$
n_F(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} \ , \ n_B(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}
$$

ここでのフェルミオンのスペクトル関数は

$$
\rho_F(p_0) = 2\pi \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2)
$$

というように $(\not{p} + m)$ を抜いたものです (このスペクトル関数を使って伝播関数を求めれば $S_F(\omega_n)$ の形になる)。
代入すれば

$$
\begin{aligned}
I(\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \int \frac{dk_0 dp_0}{(2\pi)^2} e^{-k_0\tau} e^{-p_0\tau} \big(1 + n_B(k_0)\big)\big(1 - n_F(p_0)\big)\rho_B(k_0)\rho_F(p_0) \\
&= \int_0^\beta d\tau \int \frac{dk_0 dp_0}{(2\pi)^2} e^{-(k_0 + p_0 - i\omega_n)\tau} \big(1 + n_B(k_0)\big)\big(1 - n_F(p_0)\big)\rho_B(k_0)\rho_F(p_0) \\
&= \int \frac{dk_0 dp_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{-k_0 - p_0 + i\omega_n} \big(e^{-(k_0+p_0)\beta} e^{i\omega_n \beta} - 1\big)\big(1 + n_B(k_0)\big)\big(1 - n_F(p_0)\big)\rho_B(k_0)\rho_F(p_0) \\
&= \int \frac{dk_0 dp_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{-k_0 - p_0 + i\omega_n} \big(-e^{-(k_0+p_0)\beta} - 1\big)\big(1 + n_B(k_0)\big)\big(1 - n_F(p_0)\big)\rho_B(k_0)\rho_F(p_0)
\end{aligned}
$$

ω_n はフェルミオンによるものなので

$$
e^{i\omega_n \beta} = -1
$$

となっています。フェルミオンの分布関数の関係

$$
e^{-\beta p_0} = \frac{n_F(p_0)}{1 - n_F(p_0)}
$$

を使って

$$(-e^{-(k_0+p_0)\beta}-1)(1+n_B(k_0))(1-n_F(p_0))$$

$$=-\Big(\frac{n_B(k_0)n_F(p_0)}{(1+n_B(k_0))(1-n_F(p_0))}+1\Big)\big(1+n_B(k_0)\big)\big(1-n_F(p_0)\big)$$

$$=-\big[n_B(k_0)n_F(p_0)+\big(1+n_B(k_0)\big)\big(1-n_F(p_0)\big)\big]$$

$$=-\big(1+n_B(k_0)-n_F(p_0)\big)$$

なので $(E_B, E_F > 0)$

$$I(\omega_n)=-\int\frac{dk_0dp_0}{(2\pi)^2}\frac{1}{i\omega_n-k_0-p_0}\big(1+n_B(k_0)-n_F(p_0)\big)\rho_B(k_0)\rho_F(p_0)$$

$$=-\int\frac{dk_0dp_0}{(2\pi)^2}\frac{\epsilon(k_0)\epsilon(p_0)}{i\omega_n-k_0-p_0}\big(1+n_B(k_0)-n_F(p_0)\big)2\pi\delta(k_0^2-E_B^2)2\pi\delta(p_0^2-E_F^2)$$

$$=-\int dk_0dp_0\frac{\epsilon(k_0)\epsilon(p_0)}{i\omega_n-k_0-p_0}\big(1+n_B(k_0)-n_F(p_0)\big)\delta(p_0^2-E_F^2)\delta(k_0^2-E_B^2)$$

$$=-\int dk_0dp_0\frac{1}{4|k_0||p_0|}\frac{\epsilon(k_0)\epsilon(p_0)}{i\omega_n-k_0-p_0}\big(1+n_B(k_0)-n_F(p_0)\big)$$

$$\times[\delta(p_0+E_F)+\delta(p_0-E_F)][\delta(k_0-E_B)+\delta(k_0+E_B)]$$

$$=-\int dk_0dp_0\frac{1}{4|k_0||p_0|}\frac{\epsilon(k_0)\epsilon(p_0)}{i\omega_n-k_0-p_0}\big(1+n_B(k_0)-n_F(p_0)\big)$$

$$\times\big[\delta(p_0+E_F)\delta(k_0-E_B)+\delta(p_0+E_F)\delta(k_0+E_B)+\delta(p_0-E_F)\delta(k_0-E_B)+\delta(p_0-E_F)\delta(k_0+E_B)\big]$$

$$=-\frac{-1}{4E_FE_B}\frac{1+n_B(E_B)-n_F(-E_F)}{i\omega_n-E_B+E_F}-\frac{1}{4E_FE_B}\frac{1+n_B(-E_B)-n_F(-E_F)}{i\omega_n+E_B+E_F}$$

$$-\frac{1}{4E_BE_F}\frac{1+n_B(E_B)-n_F(E_F)}{i\omega_n-E_B-E_F}-\frac{-1}{4E_BE_F}\frac{1+n_B(-E_B)-n_F(E_F)}{i\omega_n+E_B-E_F}$$

$$=\frac{1}{4E_BE_F}\Big[\frac{1+n_B(E_B)-n_F(-E_F)}{i\omega_n-E_B+E_F}-\frac{1+n_B(-E_B)-n_F(-E_F)}{i\omega_n+E_B+E_F}$$

$$-\frac{1+n_B(E_B)-n_F(E_F)}{i\omega_n-E_B-E_F}+\frac{1+n_B(-E_B)-n_F(E_F)}{i\omega_n+E_B-E_F}\Big]$$

これが、例えば電子の自己エネルギーの計算において分子に和をとる松原振動数がいない場合の結果です。この程度の場合では、「和の計算」で示した方法でもこの Saclay 法でも手間的にはそれほど変わりません。頂点のように 3 つ伝播関数が付いている場合なんかでは Saclay 法の方が若干手間は減ります。

ここまで見てきたのとは別の道順も見ておきます。まず、ボソンとフェルミオンの各伝播関数を

$$D(\tau)=\Delta_{B_1}+\Delta_{B_2}\ ,\ S_F(\tau)=\Delta_{F_1}+\Delta_{F_2}$$

$$\Delta_{B_1} = \frac{1}{2E_B}(1+n_B(E_B))e^{-E_B\tau}\ ,\ \Delta_{B_2} = \frac{-1}{2E_B}(1+n_B(-E_B))e^{E_B\tau}$$

$$\Delta_{F_1} = \frac{1}{2E_F}(1-n_F(E_F))e^{-E_F\tau}\ ,\ \Delta_{F_2} = \frac{-1}{2E_F}(1-n_F(-E_F))e^{E_F\tau}$$

このように分離します (単純に見やすくするためにしているだけなので、それ以上の意味はないです)。これは「有限温度でのグリーン関数」で出てきたものを

$$n_B(-E) = -(1+n_B(E))\ ,\ n_F(-E) = 1-n_F(E)$$

を使って変形しているだけです。ここでの $S_F(\tau)$ も通常のフェルミオンの伝播関数

$$\frac{i\omega_n\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} + m}{\omega_n^2 + E^2}$$

の分子部分を抜いているものです。なので、(4) の計算です。
そうすると $D(\tau)S_F(\tau)$ は

$$\begin{aligned}
D(\tau)S_F(\tau) =& \Delta_{B_1}\Delta_{F_1} + \Delta_{B_2}\Delta_{F_2} + \Delta_{B_1}\Delta_{F_2} + \Delta_{B_2}\Delta_{F_1} \\
=& \frac{1}{4E_BE_F}(1+n_B(E_B))(1-n_F(E_F))e^{-(E_B+E_F)\tau} \\
&+ \frac{1}{4E_BE_F}(1+n_B(-E_B))(1-n_F(-E_F))e^{(E_B+E_F)\tau} \\
&- \frac{1}{4E_BE_F}(1+n_B(E_B))(1-n_F(-E_F))e^{(-E_B+E_F)\tau} \\
&- \frac{1}{4E_BE_F}(1+n_B(-E_B))(1-n_F(E_F))e^{(E_B-E_F)\tau}
\end{aligned}$$

I はこれを積分するので

$$\begin{aligned}
I(\omega_n) =& \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}D(\tau)S_F(\tau) \\
=& \frac{1}{4E_BE_F}\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\Big[\big(1+n_B(E_B)\big)\big(1-n_F(E_F)\big)e^{-(E_B+E_F)\tau} + \big(1+n_B(-E_B)\big)\big(1-n_F(-E_F)\big)e^{(E_B+E_F)\tau} \\
&- \big(1+n_B(E_B)\big)\big(1-n_F(-E_F)\big)e^{(-E_B+E_F)\tau} - \big(1+n_B(-E_B)\big)\big(1-n_F(E_F)\big)e^{(E_B-E_F)\tau}\Big] \\
=& \frac{1}{4E_BE_F}\int_0^\beta d\tau\Big[\big(1+n_B(E_B)\big)\big(1-n_F(E_F)\big)e^{-(E_B+E_F-i\omega_n)\tau} + \big(1+n_B(-E_B)\big)\big(1-n_F(-E_F)\big)e^{(E_B+E_F+i\omega_n)\tau} \\
&- \big(1+n_B(E_B)\big)\big(1-n_F(-E_F)\big)e^{(-E_B+E_F+i\omega_n)\tau} - \big(1+n_B(-E_B)\big)\big(1-n_F(E_F)\big)e^{(E_B-E_F+i\omega_n)\tau}\Big]
\end{aligned}$$

τ 積分を実行して、$e^{i\omega_n\beta}=-1$ であることから

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{4E_BE_F}\Big[\frac{(1+n_B(E_B))(1-n_F(E_F))}{-(E_B+E_F-i\omega_n)}(-e^{-(E_B+E_F)\beta}-1) \\
&+\frac{(1+n_B(-E_B))(1-n_F(-E_F))}{E_B+E_F+i\omega_n}(-e^{(E_B+E_F)\beta}-1) \\
&-\frac{(1+n_B(E_B))(1-n_F(-E_F))}{-E_B+E_F+i\omega_n}(-e^{(-E_B+E_F)\beta}-1) \\
&-\frac{(1+n_B(-E_B))(1-n_F(E_F))}{E_B-E_F+i\omega_n}(-e^{(E_B-E_F)\beta}-1)\Big]
\end{aligned}
$$

そして、

- $-e^{-(E_B+E_F)\beta}-1=-\Big(\frac{n_B(E_B)n_F(E_F)}{(1+n_B(E_B))(1-n_F(E_F))}+1\Big)$
- $$\begin{aligned}-e^{(E_B+E_F)\beta}-1&=-\Big((\frac{1}{n_B(E_B)}+1)(\frac{1}{n_F(E_F)}-1)+1\Big)\\ &=-(\frac{1}{n_B(E_B)n_F(E_F)}-\frac{1}{n_B(E_B)}+\frac{1}{n_F(E_F)})\end{aligned}$$
- $-e^{(-E_B+E_F)\beta}-1=-\Big(\frac{n_B(E_B)}{1+n_B(E_B)}(\frac{1}{n_F(E_F)}-1)+1\Big)$
- $-e^{(E_B-E_F)\beta}-1=-\Big(\frac{n_F(E_F)}{1-n_F(E_F)}(\frac{1}{n_B(E_B)}+1)+1\Big)$

なので、各項の分子を計算していくと

- 第一項

$$
\begin{aligned}
&-\big(1+n_B(E_B)\big)\big(1-n_F(E_F)\big)\Big(\frac{n_B(E_B)n_F(E_F)}{(1+n_B(E_B))(1-n_F(E_F))}+1\Big) \\
&=-\big(n_B(E_B)n_F(E_F)+(1+n_B(E_B))(1-n_F(E_F))\big) \\
&=-\big(1+n_B(E_B)-n_F(E_F)\big)
\end{aligned}
$$

- 第二項

$$
-\big(1+n_B(-E_B)\big)\big(1-n_F(-E_F)\big)\big(\frac{1}{n_B(E_B)n_F(E_F)}-\frac{1}{n_B(E_B)}+\frac{1}{n_F(E_F)}\big)
$$

$$
=-\big(1+n_B(-E_B)\big)\big(1-n_F(-E_F)\big)\big(\frac{-1}{(1+n_B(-E_B))(1-n_F(-E_F))}+\frac{1}{1+n_B(-E_B)}+\frac{1}{1-n_F(-E_F)}\big)
$$

$$
=-\big(-1+1-n_F(-E_F)+1+n_B(-E_B)\big)
$$

$$
=-\big(1+n_B(-E_B)-n_F(-E_F)\big)
$$

- 第三項

$$
-\big(1+n_B(E_B)\big)\big(1-n_F(-E_F)\big)\big(\frac{n_B(E_B)}{1+n_B(E_B)}(\frac{1}{n_F(E_F)}-1)+1\big)
$$

$$
=-\big(1-n_F(-E_F)\big)\big(n_B(E_B)(\frac{1}{n_F(E_F)}-1)+1+n_B(E_B)\big)
$$

$$
=-\big(1-n_F(-E_F)\big)\big(n_B(E_B)\frac{1}{1-n_F(-E_F)}+1\big)
$$

$$
=-\big(1+n_B(E_B)-n_F(-E_F)\big)
$$

- 第四項

$$
-\big(1+n_B(-E_B)\big)\big(1-n_F(E_F)\big)\big(\frac{n_F(E_F)}{1-n_F(E_F)}(\frac{1}{n_B(E_B)}+1)+1\big)
$$

$$
=-\big(1+n_B(-E_B)\big)\big(n_F(E_F)\frac{-1}{1+n_B(-E_B)}+1\big)
$$

$$
=-\big(1+n_B(-E_B)-n_F(E_F)\big)
$$

全部あわせることで

$$
\begin{aligned}
I =&\frac{1}{4E_BE_F}\Big[\frac{-(1+n_B(E_B)-n_F(E_F))}{-(-i\omega_n+E_B+E_F)}+\frac{-(1+n_B(-E_B)-n_F(-E_F))}{i\omega_n+E_B+E_F} \\
&\qquad -\frac{-(1+n_B(E_B)-n_F(-E_F))}{i\omega_n-E_B+E_F}-\frac{-(1+n_B(-E_B)-n_F(E_F))}{i\omega_n+E_B-E_F}\Big] \\
=&\frac{1}{4E_BE_F}\Big[-\frac{1+n_B(E_B)-n_F(E_F)}{i\omega_n-E_B-E_F}-\frac{1+n_B(-E_B)-n_F(-E_F)}{i\omega_n+E_B+E_F} \\
&\qquad +\frac{1+n_B(E_B)-n_F(-E_F)}{i\omega_n-E_B+E_F}+\frac{1+n_B(-E_B)-n_F(E_F)}{i\omega_n+E_B-E_F}\Big]
\end{aligned}
$$

となって同じ結果が出てきます。上での場合とこの場合は、$D(\tau), S_F(\tau)$ を表現するのにスペクトル関数を使うか時間成分の変換によって求められたものを使うのかというだけの違いです。