和の計算～Saclay 法 2～

Saclay 法を使って、2 つ伝播関数があるときの QED あたりで出てくる残りのパターンを計算します。
　フェルミオン-フェルミオンの場合は

$$I_{FF}(\omega_n)=T\sum_m S_F(\omega_n-\omega_m)S_F(\omega_m)$$

$$S_F(\omega_m)=\frac{1}{\omega_m^2+E^2}\qquad(\omega_m=2\pi T(m+\frac{1}{2})\ ,\ E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2)$$

$S_F(\omega_n)$ は元のフェルミオンの伝播関数

$$\frac{-1}{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}=\frac{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}+m}{\omega_n^2+E^2}$$

から分子を抜いたものです。また、フェルミオンが出てくる QED では、フェルミオン-フェルミオンのループが現われる時の外線はボソンのはずなので、ω_n はボソンだとします ($\omega_n=2\pi nT$)。フーリエ変換は全く同じなので、一気に飛んで

$$\begin{aligned}I_{FF}(\omega_n)&=T\sum_m\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_m\tau}e^{i(\omega_n-\omega_m)\tau'}S_F(\tau)S_F(\tau')\\&=\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}S_F(\tau)S_F(\tau)\end{aligned}$$

これに

$$S_F(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}e^{-p_0\tau}S_F(p_0)\ ,\ S_F(p_0)=(1-n_F(p_0))\rho_F(p_0)$$

$$\rho_F(p_0)=2\pi\epsilon(p_0)\delta(p^2-m^2)\qquad(\epsilon(k_0)=\theta(k_0)-\theta(-k_0))$$

この関係を使って

$$\begin{aligned}I_{FF}(\omega_n)&=\int_0^\beta d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0dq_0}{(2\pi)^2}e^{i\omega_n\tau}e^{-p_0\tau}e^{-q_0\tau}S_F(p_0)S_F(q_0)\\&=\int_0^\beta d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0dq_0}{(2\pi)^2}e^{(i\omega_n-p_0-q_0)\tau}(1-n_F(p_0))(1-n_F(q_0))\rho_F(p_0)\rho_F(q_0)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0dq_0}{(2\pi)^2}\frac{1}{i\omega_n-p_0-q_0}(e^{(i\omega_n\tau-p_0-q_0)\beta}-1)(1-n_F(p_0))(1-n_F(q_0))\rho_F(p_0)\rho_F(q_0)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0dq_0}{(2\pi)^2}\frac{1}{i\omega_n-p_0-q_0}(e^{-(p_0+q_0)\beta}-1)(1-n_F(p_0))(1-n_F(q_0))\rho_F(p_0)\rho_F(q_0)\end{aligned}$$

ω_n はボソンなので $e^{i\omega_n\beta}=+1$。フェルミオンの分布関数の関係

$$e^{-\beta p_0} = \frac{n_F(p_0)}{1-n_F(p_0)}$$

より

$$\begin{aligned}
(e^{-(p_0+q_0)\beta}-1)(1-n_F(p_0))(1-n_F(q_0)) &= (\frac{n_F(q_0)n_F(p_0)}{(1-n_F(q_0))(1-n_F(p_0))}-1)(1-n_F(p_0))(1-n_F(q_0)) \\
&= (n_F(q_0)n_F(p_0)-(1-n_F(p_0))(1-n_F(q_0))) \\
&= -(1-n_F(p_0)-n_F(q_0))
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
I(\omega_n) =& -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0dq_0}{(2\pi)^2}\frac{1-n_F(p_0)-n_F(q_0)}{i\omega_n-p_0-q_0}\rho_F(p_0)\rho_F(q_0) \\
=& -\int_{-\infty}^{\infty}dp_0dq_0\frac{\epsilon(p_0)\epsilon(q_0)}{i\omega_n-p_0-q_0}[1-n_F(p_0)-n_F(q_0)]\delta(p^2-m^2)\delta(q^2-m^2) \\
=& -\int_{-\infty}^{\infty}dp_0dq_0\frac{\epsilon(p_0)\epsilon(q_0)}{i\omega_n-p_0-q_0}\frac{1}{4|p_0||q_0|}[1-n_F(p_0)-n_F(q_0)] \\
&\times[\delta(p_0+E_p)+\delta(p_0-E_p)][\delta(q_0+E_q)+\delta(q_0-E_q)] \\
=& -\int_{-\infty}^{\infty}dp_0dq_0\frac{\epsilon(p_0)\epsilon(q_0)}{i\omega_n-p_0-q_0}\frac{1}{4|p_0||q_0|}[1-n_F(p_0)-n_F(q_0)] \\
&\times[\delta(p_0+E_p)\delta(q_0+E_q)+\delta(p_0-E_p)\delta(q_0+E_q)+\delta(p_0+E_p)\delta(q_0-E_q)+\delta(p_0-E_p)\delta(q_0-E_q)] \\
=& -[\frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n+E_p+E_q}+\frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n-E_p+E_q} \\
&+\frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_p-E_q}+\frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_p-E_q}] \\
=& -\frac{1}{4E_pE_q}[\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n+E_p+E_q}-\frac{1-n_F(E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n-E_p+E_q} \\
&-\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_p-E_q}+\frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_p-E_q}]
\end{aligned}$$

次に、分子に和をとる松原振動数がある場合を扱います。このままフェルミオン-フェルミオンでやるなら

$$I'_{FF}(\omega_n) = T\sum_m \omega_m S_F(\omega_n-\omega_m)S_F(\omega_m)$$

という形です。このとき、ω_m が邪魔して今までのようにデルタ関数への置き換えが出来ないので、式変形を行います。$S_F(\omega_m)$ のフーリエ変換は

$$S_F(\omega_m) = \int_0^{\beta} d\tau S_F(\tau)e^{i\omega_m\tau}$$

これの $e^{i\omega_m\tau}$ 部分から ω_m が落ちてくれると上手くいきそうなので

$$\int_0^\beta d\tau \frac{dS_F(\tau)}{d\tau} e^{i\omega_m\tau}$$

という積分を考えてみます。これは部分積分すれば

$$\int_0^\beta d\tau \frac{dS_F(\tau)}{d\tau} e^{i\omega_m\tau} = [S_F(\tau)e^{i\omega_m\tau}]_0^\beta - \int_0^\beta d\tau S_F(\tau) i\omega_m e^{i\omega_m\tau}$$

第一項は反周期性 $e^{i\omega_m\beta} = -1, S_F(\tau - \beta) = -S_F(\tau)$ を考えると

$$S_F(\beta)e^{i\omega_m\beta} - S_F(0) = -S_F(\beta) - S_F(0) = S_F(0) - S_F(0) = 0$$

なので

$$i\int_0^\beta d\tau \frac{dS_F(\tau)}{d\tau} e^{i\omega_m\tau} = \omega_m \int_0^\beta d\tau S_F(\tau) e^{i\omega_m\tau} = \omega_m S_F(\omega_m)$$

よって

$$\omega_m S_F(\omega_m) = i\int_0^\beta d\tau \frac{dS_F(\tau)}{d\tau} e^{i\omega_m\tau} \tag{1}$$

となっていることが分かります。$S_F(\tau)$ は

$$S_F(\tau) = \frac{1}{2E}((1 - n_F(E))e^{-E\tau} - n_F(E)e^{E\tau}) \quad (E^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + m^2) \tag{2}$$

であることから

$$\frac{dS_F(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2E}(-E(1 - n_F(E))e^{-E\tau} - En_F(E)e^{E\tau}) = \frac{-1}{2}((1 - n_F(E))e^{-E\tau} + n_F(E)e^{E\tau}) \tag{3}$$

(1) を使えば、通常通りに計算できるので

$$
\begin{aligned}
I'_{FF}(\omega_n) &= T\sum_m \omega_m S_F(\omega_n-\omega_m)S_F(\omega_m) \\
&= iT\sum_m\int_0^\beta d\tau \frac{dS_F(\tau)}{d\tau}e^{i\omega_m\tau}S_F(\omega_n-\omega_m) \\
&= iT\sum_m\int_0^\beta d\tau d\tau' e^{i\omega_m\tau}e^{i(\omega_n-\omega_m)\tau'}\frac{dS_F(\tau)}{d\tau}S_F(\tau') \\
&= iT\sum_m\int_0^\beta d\tau d\tau' e^{i(\tau-\tau')\omega_m}e^{i\omega_n\tau'}\frac{dS_F(\tau)}{d\tau}S_F(\tau') \\
&= i\sum_J\int_0^\beta d\tau d\tau'\delta(\tau'-\tau-j\beta)e^{i\omega_n\tau'}\frac{dS_F(\tau)}{d\tau}S_F(\tau') \\
&= i\int_0^\beta d\tau d\tau'\delta(\tau'-\tau)e^{i\omega_n\tau'}\frac{dS_F(\tau)}{d\tau}S_F(\tau') \\
&= i\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\frac{dS_F(\tau)}{d\tau}S_F(\tau)
\end{aligned}
$$

これに (2)(3) を代入して計算していっても、出てきますが面倒なので簡単に話が進むように整理します。ここからの話は今まで Saclay 法で扱ってきた計算をまとめるのに役立ちます

(2) は「和の計算〜Saclay 法〜」の最後で見た方法と同じように書き換えると

$$S_F(\tau)=\frac{1}{2E}((1-n_F(E))e^{-E\tau}-n_F(E)e^{E\tau})=\Delta_F^+(\tau)+\Delta_F^-(\tau)$$

$$\Delta_F^+(\tau)=\frac{1}{2E}(1-n_F(E))e^{-E\tau}\ ,\ \Delta_F^-(\tau)=\frac{-1}{2E}(1-n_F(-E))e^{E\tau}$$

なので

$$S_F(\tau)=\sum_{a=\pm1}\Delta_F^a(\tau)=\sum_{a=\pm1}\frac{a}{2E}(1-n_F(aE))e^{-aE\tau}$$

と書けます。で、これの微分である (3) は

$$\frac{dS_F(\tau)}{d\tau}=\frac{-1}{2}(1-n_F(E))e^{-E\tau}+\frac{-1}{2}(1-n(-E))e^{E\tau}$$

これも和を使って書けば

$$\frac{dS_F(\tau)}{d\tau}=\sum_{a=\pm1}(-a)E\Delta_F^a(\tau)$$

そうすると (1) は

$$\begin{aligned}\omega_m S_F(\omega_m) &= i\int_0^\beta d\tau \frac{dS_F(\tau)}{d\tau}e^{i\omega_m\tau}\\ &= i\sum_{a=\pm1}\int_0^\beta d\tau(-a)E\Delta_F^a(\tau)e^{i\omega_m\tau}\\ &= i\sum_{a=\pm1}(-a)E\int_0^\beta d\tau\Delta_F^a(\tau)e^{i\omega_m\tau}\\ &= i\sum_{a=\pm1}(-a)E\Delta_F^a(\omega_m)\end{aligned}$$

となるので、$I'_{FF}(\omega_n)$ は (区別をはっきりさせるために $\Delta_F^{a_1,a_2}$ に E_1, E_2 と書いておきます)

$$\begin{aligned}I'_{FF}(\omega_n) &= T\sum_m \omega_m S_F(\omega_n-\omega_m)S_F(\omega_m)\\ &= iT\sum_m\sum_{a_1=\pm1}S_F(\omega_n-\omega_m,E_2)(-a_1)E_1\Delta_F^{a_1}(\omega_m,E_1)\\ &= iT\sum_m\sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm1}(-a_1)E_1\Delta_F^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_F^{a_1}(\omega_m,E_1)\\ &= iE_1\sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm1}(-a_1)T\sum_m\Delta_F^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_F^{a_1}(\omega_m,E_1)\end{aligned}$$

この変形を見ても分かるように

$$\sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm1}T\sum_m\Delta_F^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_F^{a_1}(\omega_m,E_1)$$

この部分は上で計算した分子に和を取る松原振動数がのっていないフェルミオン-フェルミオンの場合にあたります。a_1, a_2 の和を無視して、今までのようにこの部分を計算すると

$$\begin{aligned}&T\sum_m\Delta_F^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_F^{a_1}(\omega_m,E_1)\\ &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\Delta_F^{a_1}(\tau,E_1)\Delta_F^{a_2}(\tau,E_2)\\ &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\frac{a_1}{2E_1}(1-n_F(a_1E_1))e^{-a_1E_1\tau}\frac{a_2}{2E_2}(1-n_F(a_2E_2))e^{-a_2E_2\tau}\\ &= \int_0^\beta d\tau\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}(1-n_F(a_1E_1))(1-n_F(a_2E_2))e^{(i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2)\tau}\\ &= \frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}(1-n_F(a_1E_1))(1-n_F(a_2E_2))(e^{(i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2)\beta}-1)\\ &= \frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}(1-n_F(a_1E_1))(1-n_F(a_2E_2))(e^{-(a_1E_1+a_2E_2)\beta}-1)\\ &= -\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1-n_F(a_1E_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}\end{aligned}$$

これに、$a_1, a_2 = \pm 1$ の和を取れば、上で計算したものに一致します。やっていることは「和の計算〜Saclay 法〜」の最後に扱った方法と同じで、ここでは a_1, a_2 の和を取らず変形していったというだけです。

この形を使うことで

$$
\begin{aligned}
I'_{FF}(\omega_n) &= T\sum_m \omega_m S_F(\omega_n-\omega_m)S_F(\omega_m) \\
&= iE_1\sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm1}(-a_1)T\sum_m \Delta_F^{a_1}(\omega_m,E_1)\Delta_F^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2) \\
&= \sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm1} i(-a_1)E_1\frac{-a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1-n_F(a_1E_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2} \\
&= \sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm1}\frac{ia_2}{4E_2}\frac{1-n_F(a_1E_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}
\end{aligned}
$$

後は、和を展開すればいいだけです。

残っているパターンは、ボソン-ボソン、フェルミオン-ボソンでの分子に松原振動数がいる場合です。これらの場合も同じで、部分積分を利用して式変形を行えばいいというだけです。

ボソン-ボソンでは

$$
I'_{BB}(\omega_n) = T\sum_m \omega_m D(\omega_n-\omega_m)D(\omega_m)
$$

これも部分積分を利用することで (ボソンの場合は周期性を使う)

$$
\omega_m D(\omega_m) = i\int_0^\beta d\tau \frac{dD(\tau)}{d\tau}e^{i\omega_m\tau}
$$

と書けるので、結局

$$
I'_{BB}(\omega_n) = \sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm2}(-ia_1E_1)T\sum_m \Delta_B^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_B^{a_1}(\omega_m,E_1)
$$

Δ_B はボソンの場合を表わしていて (「有限温度でのグリーン関数」、「和の計算〜Saclay 法〜」参照)

$$
D(\tau) = \sum_{a=\pm1}\Delta_B^a = \sum_{a=\pm1}\frac{a}{2E}(1+n_B(aE))e^{-aE\tau}
$$

$$
\Delta_B^+ = \frac{1}{2E}(1+n_B(E))e^{-E\tau}\ ,\ \Delta_B^- = \frac{-1}{2E}(1+n_B(-E))e^{E\tau}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
&T\sum_m \Delta_B^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_B^{a_1}(\omega_m,E_1)\\
&\qquad=\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\Delta_B^{a_1}(\tau,E_1)\Delta_B^{a_2}(\tau,E_2)\\
&\qquad=\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\frac{a_1}{2E_1}(1+n_B(a_1E_1))e^{-a_1E_1\tau}\frac{a_2}{2E_2}(1+n_B(a_2E_2))e^{-a_2E_2\tau}\\
&\qquad=\int_0^\beta d\tau\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}(1+n_B(a_1E_1))(1+n_B(a_2E_2))e^{(i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2)\tau}\\
&\qquad=\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}(1+n_B(a_1E_1))(1+n_B(a_2E_2))(e^{-(a_1E_1+a_2E_2)}-1)\\
&\qquad=-\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1+n_B(a_1E_1)+n_B(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}\qquad(e^{-\beta E}=\frac{n_B(E)}{1+n_B(E)})
\end{aligned}
$$

この場合でも a_1,a_2 の和を取れば、分子に松原振動数がない場合のボソン-ボソンに一致します。これを入れて

$$
\begin{aligned}
I'_{BB}(\omega_n) &= \sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm2}(-ia_1E_1)\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1+n_B(a_1E_1)+n_B(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}\\
&= \sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm2}\frac{ia_2}{4E_2}\frac{1+n_B(a_1E_1)+n_B(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}
\end{aligned}
$$

最後のフェルミオン-ボソンは

$$
I'_{FB}(\omega_n)=T\sum_m\omega_mS_F(\omega_n-\omega_m)D(\omega_m)
$$

これはボソン部分を変形させればいいので

$$
\begin{aligned}
I'_{FB}(\omega_n) &= T\sum_m\omega_mS_F(\omega_n-\omega_m,E_2)D(\omega_m,E_1)\\
&= \sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm2}(-ia_1E_1)T\sum_m\Delta_F^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_B^{a_1}(\omega_m,E_1)
\end{aligned}
$$

分子なしの部分は

$$T\sum_m \Delta_F^{a_2}(\omega_n-\omega_m,E_2)\Delta_B^{a_1}(\omega_m,E_1)$$

$$=\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\frac{a_2}{2E_2}(1-n_F(a_2E_2))e^{-a_2E_2\tau}\frac{a_1}{2E_1}(1+n_B(a_1E_1))e^{-a_1E_1\tau}$$

$$=\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}(1-n_F(a_2E_2))(1+n_B(a_1E_1))e^{(i\omega_n-a_2E_2-a_1E_1)\tau}$$

$$=\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}(1-n_F(a_2E_2))(1+n_B(a_1E_1))(e^{(-a_2E_2-a_1E_1)\beta}-1)$$

$$=-\frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1+n_B(a_1E_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}$$

よって

$$\begin{aligned}
I'_{FB}(\omega_n) &= T\sum_m \omega_m S_F(\omega_n-\omega_m)D(\omega_m)\\
&= \sum_{a_1=\pm1}\sum_{a_2=\pm2}\frac{ia_2}{4E_2}\frac{1+n_B(a_1E_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n-a_1E_1-a_2E_2}
\end{aligned}$$

これで、基本的な伝播関数を 2 個使う場合で出てくるパターンは終わりです。

まとめると $(\omega_n = 2\pi nT)$

$$\text{フェルミオン：} S_F(\omega_m, E) = \frac{1}{\omega_m^2 + E^2} \qquad (\omega_m = 2\pi T(m + \frac{1}{2})\ ,\ E^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + m_F^2)$$

$$\text{ボソン：} D(\omega_m, k) = \frac{1}{\omega_m^2 + k^2} \qquad (\omega_m = 2\pi mT\ ,\ k^2 = |\boldsymbol{k}|^2 + m_B^2)$$

- ボソン-ボソン

$$\begin{aligned}
I_{BB}(\omega_n) =& T\sum_m D(\omega_m, k_1) D(\omega_n - \omega_m, k_2) \\
=& -\sum_{a_1, a_2 = \pm 1} \frac{a_1 a_2}{4k_1 k_2} \frac{1 + n_B(a_1 k_1) + n_B(a_2 k_2)}{i\omega_n - a_1 k_1 - a_2 k_2} \\
=& -\frac{1}{4k_1 k_2}\Big[\big(1 + n_B(k_1) + n_B(k_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n - k_1 - k_2} - \frac{1}{i\omega_n + k_1 + k_2}\Big) \\
&\qquad + \big(n_B(k_1) - n_B(k_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n + k_1 - k_2} - \frac{1}{i\omega_n - k_1 + k_2}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{BB}(\omega_n) =& T\sum_m \omega_m D(\omega_m, k_1) D(\omega_n - \omega_m, k_2) \\
=& \sum_{a_1, a_2 = \pm 1} \frac{i a_2}{4k_2} \frac{1 + n_B(a_1 k_1) + n_B(a_2 k_2)}{i\omega_n - a_1 k_1 - a_2 k_2} \\
=& \frac{i}{4k_2}\Big[\big(1 + n_B(k_1) + n_B(k_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n - k_1 - k_2} + \frac{1}{i\omega_n + k_1 + k_2}\Big) \\
&\qquad - \big(n_B(k_1) - n_B(k_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n + k_1 - k_2} + \frac{1}{i\omega_n - k_1 + k_2}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

- フェルミオン-ボソン

$$\begin{aligned}
I_{FB}(\omega_n) =& T\sum_m D(\omega_m, k_1) S_F(\omega_n - \omega_m, E_2) \\
=& -\sum_{a_1, a_2 = \pm 1} \frac{a_1 a_2}{4k_1 E_2} \frac{1 + n_B(a_1 k_1) - n_F(a_2 E_2)}{i\omega_n - a_1 k_1 - a_2 E_2} \\
=& -\frac{1}{4k_1 E_2}\Big[\big(1 + n_B(k_1) - n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n - k_1 - E_2} - \frac{1}{i\omega_n + k_1 + E_2}\Big) \\
&\qquad + \big(n_B(k_1) + n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n + k_1 - E_2} - \frac{1}{i\omega_n - k_1 + E_2}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I'_{FB}(\omega_n) =& T\sum_m \omega_m D(\omega_m, k_1) S_F(\omega_n-\omega_m, E_2) \\
=& \sum_{a_1,a_2=\pm 1} \frac{ia_2}{4E_2}\frac{1+n_B(a_1k_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n - a_1k_1 - a_2E_2} \\
=& \frac{i}{4E_2}\Big[\big(1+n_B(k_1)-n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n-k_1-E_2}+\frac{1}{i\omega_n+k_1+E_2}\Big) \\
& \qquad - \big(n_B(k_1)+n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n-k_1+E_2}+\frac{1}{i\omega_n+k_1-E_2}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

- フェルミオン-フェルミオン

$$
\begin{aligned}
I_{FF}(\omega_n) =& T\sum_m S_F(\omega_m, E_1) S_F(\omega_n-\omega_m, E_2) \\
=& -\sum_{a_1,a_2=\pm 1} \frac{a_1a_2}{4E_1E_2}\frac{1-n_F(a_1E_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n - a_1E_1 - a_2E_2} \\
=& -\frac{1}{4E_1E_2}\Big[\big(1-n_F(E_1)-n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n-E_1-E_2}-\frac{1}{i\omega_n+E_1+E_2}\Big) \\
& \qquad + \big(n_F(E_1)-n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n-E_1+E_2}-\frac{1}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I'_{FF}(\omega_n) =& T\sum_m \omega_m S_F(\omega_m, E_1) S_F(\omega_n-\omega_m, E_2) \\
=& \sum_{a_1,a_2=\pm 1} \frac{ia_2}{4E_2}\frac{1-n_F(a_1E_1)-n_F(a_2E_2)}{i\omega_n - a_1E_1 - a_2E_2} \\
=& \frac{i}{4E_2}\Big[\big(1-n_F(E_1)-n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n-E_1-E_2}+\frac{1}{i\omega_n+E_1+E_2}\Big) \\
& \qquad + \big(n_F(E_1)-n_F(E_2)\big)\Big(\frac{1}{i\omega_n-E_1+E_2}+\frac{1}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$