和の計算

虚時間法を扱う限り付きまとってくるのが和の計算方法を見ていきます。ここまでに、虚時間法による記述はユークリッドな 0 温度での場の理論のファインマン則をそのまま流用できることは見ました。そうすると、ループ積分が有限温度でも現れることが予想できると思います。そして、今の場合積分の 0 成分は和に置き換わるために、ファインマン図のループが現れるときには必ず和の計算をしないといけないことになります。和の計算にはいくつかの公式がありますが、必ず公式通りの形にもっていけるか分かりませんし、明らかに面倒な計算を必要とします。というわけで、別の方法を使って和の計算を行います。
ここでは標準的に用いられる方法を示していくことにします。

　ここで見ていく方法は「有限温度でのグリーン関数」で出てきたように、留数定理を使って和を積分に変えるというものです。まず、計算する和の形が

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(p_0=2i\pi nT)$$

このようになっているとします。和を積分に変えるとき、前はボソンの分布関数の形を使ったんですが、ここでは双曲線関数を使います。物性なんかでは分布関数をそのまま使ってしまいますが、素粒子の場合は双曲線関数を使った方が便利です (使用する 2 点相関関数の違いの差)。というわけで、留数定理によって積分に置き換えると

$$\frac{T}{2\pi i}\int_C dp_0 f(p_0)\frac{1}{2T}\coth(\frac{1}{2}\beta p_0)$$

このようになります。積分経路 C は $2i\pi nT$ の各極を左回りに囲んでいるようになっています。$\coth(\beta p_0/2)$ が極として $2i\pi nT$ を持っているので、このように置き換えられます。極が $2i\pi nT$ であることは

$$\begin{aligned}\coth(\frac{1}{2}\beta p_0)=\frac{\cosh(\frac{1}{2}\beta p_0)}{\sinh(\frac{1}{2}\beta p_0)} &= \frac{e^{\beta p_0/2}+e^{-\beta p_0/2}}{e^{\beta p_0/2}-e^{-\beta p_0/2}}\\ &= \frac{1+e^{-\beta p_0}}{1-e^{-\beta p_0}}\\ &= \frac{e^{\beta p_0}+1}{e^{\beta p_0}-1}\end{aligned}$$

から分かります。そして、$\coth(\dfrac{1}{2}\beta p_0)$ の留数は coth のテーラー展開

$$\coth(\frac{1}{2}\beta p_0)=\frac{2}{\beta}\frac{1}{p_0}+\frac{\beta}{6}p_0-\cdots$$

から素直に $2/\beta$ となっていることが分かります (第一項で 1 位の極を持つので、その係数が留数)。よって、留数定理によって

$$\begin{aligned}\frac{T}{2\pi i}\int_C dp_0 f(p_0)\frac{1}{2T}\coth(\frac{1}{2}\beta p_0) &= 2\pi i\frac{T}{2\pi i}\frac{1}{2T}\frac{2}{\beta}\sum_n f(p_0=i\omega_n)\quad (i\omega_n=2i\pi nT)\\ &= T\sum_n f(p_0=i\omega_n)\end{aligned}$$

となり、ちゃんと元に戻ります。

複素積分を実行するために、積分経路 C を原点から $+\epsilon$ 動かして $-i\infty$ から $+i\infty$ という線と、$-\epsilon$ 動かして $+i\infty$ から $-i\infty$ に向かっている線となっているように書き換えます (元の経路は虚軸上の各極をそれぞれ左回りに囲んでいる)。なので、積分経路によって分解すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{T}{2\pi i}\int_C dp_0 f(p_0)\frac{1}{2T}\coth(\frac{1}{2}\beta p_0) \\
&\quad \Rightarrow \ \frac{1}{2\pi i}\int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dp_0 f(p_0)(-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{-\beta p_0}-1})+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0)(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta p_0}-1})
\end{aligned}
$$

となります。$\coth(\beta p_0/2)$ は

$$
\begin{aligned}
\coth(\frac{1}{2}\beta p_0) &= \frac{1+e^{-\beta p_0}}{1-e^{-\beta p_0}} \\
&= -\frac{e^{-\beta p_0}+1}{e^{-\beta p_0}-1} \\
&= -\frac{e^{-\beta p_0}-1+2}{e^{-\beta p_0}-1} \\
&= -1-\frac{2}{e^{-\beta p_0}-1}
\end{aligned}
$$

もしくは

$$
\frac{1}{2}\coth(\frac{1}{2}\beta p_0) = \frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta p_0}-1}
$$

となっています。第一項側の p_0 を $-p_0$ に変えれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{-1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(-p_0)(-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{\beta p_0}-1})+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0)(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta p_0}-1}) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(-p_0)(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta p_0}-1})+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0)(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta p_0}-1}) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{1}{2}[f(p_0)+f(-p_0)]+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 [f(p_0)+f(-p_0)]\frac{1}{e^{\beta p_0}-1}
\end{aligned}
$$

和をここまで持ってくるためには、ここでの $f(p_0)$ は無限大で十分早く収束しており、虚軸上に極を持っていないことが条件になっています (虚軸上に極がないから第一項では ϵ を消せる)。この形を見てみると分かることは、第一項には温度が含まれていなく (正確には、ファインマン則での外線の運動量の 0 成分に松原振動数がいる場合がある)、第二項にはボソンの分布関数として温度依存性が含まれているということです。つまり、ゼロ温度部分と温度依存部分に分離されたことになります。そして、$f(p_0)$ には 2 点相関関数が入ってくるので、第一項はゼロ温度での場の理論のループ積分そのものの形になっていることも分かります。つまり、くり込みを行わなければ、有限温度でのループ計算も発散しているということです。しかし、熱力学的な量を含む項以外は無視できるということと、くり込みがゼロ温度の場の理論の枠組みで可能だということによって、有限温度で起こるこの発散は除去可能になっています。このことは別のところで触れます。

ここではこのように分布関数を含まない項と含む項とに分離して書けた場合、それぞれをゼロ温度項、温度依存項のように表現することにします。

同様のことはフェルミオンでも行えます。この場合は coth を tanh に変えればいいだけです。tanh を書き換えれば

$$
\begin{aligned}
\tanh(\frac{1}{2}\beta p_0) = \frac{\sinh(\frac{1}{2}\beta p_0)}{\cosh(\frac{1}{2}\beta p_0)} &= \frac{e^{\beta p_0/2} - e^{-\beta p_0/2}}{e^{\beta p_0/2} + e^{-\beta p_0/2}} \\
&= \frac{1 - e^{-\beta p_0}}{1 + e^{-\beta p_0}} \\
&= -\frac{e^{-\beta p_0} - 1}{e^{-\beta p_0} + 1} \\
&= -\frac{e^{-\beta p_0} + 1 - 2}{e^{-\beta p_0} + 1} \\
&= -1 + \frac{2}{e^{-\beta p_0} + 1}
\end{aligned}
$$

もしくは

$$
\frac{1}{2}\tanh(\frac{1}{2}\beta p_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1}
$$

であることから ($p_0 = 2i\pi T(n + 1/2)$ で極を持っている)、フェルミオンの場合では

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{1}{2}[f(p_0) + f(-p_0)] - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 [f(p_0) + f(-p_0)]\frac{1}{e^{\beta p_0} + 1}
$$

となることが分かります。

ボソンとフェルミオンをまとめて書くと、和の計算は

$$
T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{1}{2}[f(p_0) + f(-p_0)] + \eta_{B,F}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 [f(p_0) + f(-p_0)] n_{B,F}(p_0)
$$

$$
\eta_B = +1 \quad , \eta_F = -1
$$

$$
n_B(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \ , \ n_F(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1}
$$

このように積分を使った形になります (B がボソン、F がフェルミオン、$i\omega_n$ はボソン、フェルミオンの場合に対応)。

化学ポテンシャル μ がある場合では、$p_0 = i\omega_n + \mu$ なので、p_0 の原点を μ 動かして同じことをすればいいだけで、ボソンなら

$$
\begin{aligned}
&\int_C dp_0 f(p_0)\frac{1}{2T}\coth(\frac{1}{2}\beta(p_0 - \mu)) \\
&= \frac{T}{2\pi i}\int_{i\infty+\mu-\epsilon}^{-i\infty+\mu-\epsilon} dp_0 f(p_0)\frac{1}{2T}\coth(\frac{1}{2}\beta(p_0 - \mu)) + \frac{T}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} dp_0 f(p_0)\frac{1}{2T}\coth(\frac{1}{2}\beta(p_0 - \mu)) \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} dp_0 f(p_0)(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta(p_0-\mu)} - 1}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} dp_0 f(p_0)(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)} - 1})
\end{aligned}
$$

となります。このときの $f(p_0)$ は和の段階では $f(p_0=i\omega_n+\mu)$ です。なので、ボソンでは $(\omega_n=2\pi Tn)$

$$
\begin{aligned}
&T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(p_0=i\omega_n+\mu)\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dp_0\frac{1}{2}(f(p_0)+f(-p_0))+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}dp_0\frac{1}{2}f(p_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}dp_0\frac{1}{2}f(-p_0)\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon}dp_0f(p_0)\frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}-1}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon}dp_0f(p_0)\frac{1}{e^{\beta(\mu-p_0)}-1}
\end{aligned}
$$

となっています。フェルミオンでは $(\omega_n=2\pi T(n+1/2))$

$$
\begin{aligned}
&T\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(p_0=i\omega_n+\mu)\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dp_0\frac{1}{2}(f(p_0)+f(-p_0))+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}dp_0\frac{1}{2}f(p_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}dp_0\frac{1}{2}f(-p_0)\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon}dp_0f(p_0)\frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon}dp_0f(p_0)\frac{1}{e^{\beta(\mu-p_0)}+1}
\end{aligned}
$$

経路 $C_\pm$ は $-i\infty\pm\mu$ から $i\infty\pm\mu$ にいき、そこから $i\infty$ を経由して $-i\infty$ にいき、$-i\infty\pm\mu$ に戻る経路です。これは第一項の積分範囲を $-i\infty\sim i\infty$ に書き換えるために出てきた項です。経路 C_+ は

$$
\int_{-i\infty+\mu}^{i\infty+\mu}dp_0f(p_0)+\int_{i\infty+\mu}^{i\infty}dp_0f(p_0)+\int_{i\infty}^{-i\infty}dp_0f(p_0)+\int_{-i\infty}^{-i\infty+\mu}dp_0f(p_0)
$$

というようになっており、無限大で $f(p_0)$ が 0 になっているなら、第二項と第四項は 0 になります。つまり、これに

$$
\int_{-i\infty}^{i\infty}dp_0f(p_0)
$$

を足すことで第一項のみになります。$-\mu$ でも同様です。そして、この経路 $C_\pm$ による項は $\mu=0$ で消えます。

一応経路 $C_\pm$ での第二項と第四項が消える説明もしておきます。見やすくするために $ip_0=p_4$ とすれば、第二項は

$$
\int_{i\infty+\mu}^{i\infty}dp_0f(p_0)=-i\int_{-\infty+i\mu}^{-\infty}dp_4f(p_4)
$$

この積分は複素平面上のものなので、$p_4=z=x+iy$ とし、無限大を実数 R に置き換えます。そうすると、この経路での積分は y 積分のみなので

$$
\int_{-R+i\mu}^{-R}dzf(x+iy)=i\int_{\mu}^{0}dyf(-R+iy)
$$

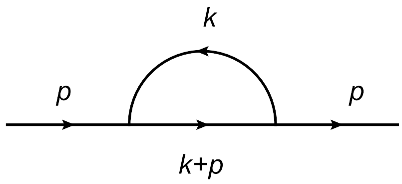
であることが分かります。なので、$f(-R+iy)$ が $R\to\infty$ で 0 になるならこの積分は 0 になります。

具体的にボソンだとして 2 点相関関数を入れてやってみます。このとき相互作用としては、ϕ^3 理論を使うことにします。これのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3$$

このように与えられます。なんで ϕ^3 理論を使うのかというと、これは QED と同じ相互作用の形をしているので QED のテストモデルのようなものだからです (ϕ^3 理論で試して上手くいったら QED でも同じように実行するといったかんじです)。同じというのは QED の相互作用項が $e\overline{\psi}\not{A}\psi$ という場が 3 つくっついた 3 点相互作用で、ϕ^3 理論も 3 点相互作用だということからです。しかし、スカラー場の計算では ϕ^4 理論の方が簡単です (計算方法が分かってるなら ϕ^3 理論で細かく見るより直接 QED でやった方が手っ取り早い場合もあります)。

というわけで、ϕ^3 理論での自己エネルギーの図は QED と同じで



こんなのです。ループ部分を光子に変えれば電子の自己エネルギーになることが分かると思います。これを式にすれば (対称因子は 1/2, 伝播関数はボソンのものを使えばいい)

$$\begin{aligned}
\Pi(p_0, \boldsymbol{p}) &= \frac{g^2}{2\beta}\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-1}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2}\frac{-1}{(p_0+k_0)^2 - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2 - m^2} \\
&= \frac{g^2}{2\beta}\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2}\frac{1}{(p_0+k_0)^2 - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2 - m^2}
\end{aligned}$$

$$k_0 = 2\pi i T n \ , \ p_0 = 2\pi i T l$$

これをまずは単純に和の公式を使って計算してみます ($p_4 = 2\pi T l$)

$$
\begin{aligned}
\Pi(p_0,\boldsymbol{p}) &= \frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi Tn)^2+\boldsymbol{k}^2+m^2}\frac{1}{(p_4+2\pi Tn)^2+(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2+m^2}\\
&= \frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\pi^2T^2n^2+E_{\boldsymbol{k}}^2}\frac{1}{(p_4+2\pi Tn)^2+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}^2}\qquad(E_{\boldsymbol{k}}^2=\boldsymbol{k}^2+m^2\ ,\ E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}^2=(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2+m^2)\\
&= \frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\beta^2}{4\pi^2}\frac{1}{n^2+(\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}})^2}\frac{\beta^2}{4\pi^2}\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)^2+(\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})^2}\\
&= (\frac{\beta}{2\pi})^4\frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\\
&= (\frac{\beta}{2\pi})^4\frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i\pi}{\beta E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\Big]\\
&\qquad\times\frac{i\pi}{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big]\\
&= -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\Big]\\
&\qquad\times\Big[\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big]\\
&= -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\\
&\qquad-\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{(\frac{\beta}{2\pi}p_4+n)-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big]\\
&= -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})}-\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})}\\
&\qquad-\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})}+\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})}\Big]
\end{aligned}
$$

ここで和の公式

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n+ix}\frac{1}{n+iy}=\frac{\pi}{x-y}(\coth(\pi x)-\coth(\pi y))
$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
\Pi(p_4,\boldsymbol{p}) = -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big[&\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}})}-\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}})}\\
&-\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}})}+\frac{1}{n-i\frac{\beta}{2\pi}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{n+i\frac{\beta}{2\pi}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}})}\Big]\\
= -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big[&\frac{\pi}{\frac{\beta}{2\pi}(E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}})}\big(\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\\
&-\frac{\pi}{\frac{\beta}{2\pi}(E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}})}\big(\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\\
&-\frac{\pi}{\frac{\beta}{2\pi}(-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}})}\big(\coth(-\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\\
&+\frac{\pi}{\frac{\beta}{2\pi}(-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}})}\big(\coth(-\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\Big]\\
= -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\frac{2\pi}{\beta}\Big[&\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}\big(\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\\
&-\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}\big(\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\\
&-\frac{\pi}{-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}\big(-\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\\
&+\frac{\pi}{-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}\big(-\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}))\big)\Big]\\
= -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\frac{2\pi}{\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}&\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\\
\times\Big[\Big(&\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{-\pi}{E_{\boldsymbol{k}}-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\coth\big(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}}\big)\\
&+\Big(\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{\pi}{-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\coth\big(\frac{\beta}{2}(-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}})\big)\\
&+\Big(-\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{\pi}{-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\coth\big(\frac{\beta}{2}(-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}})\big)\Big]
\end{aligned}
$$

$p_4=2\pi Tl$ から coth の周期性によって

$$
\begin{aligned}
\Pi(p_4,\boldsymbol{p}) = -(\frac{\beta}{2\pi})^2\frac{g^2}{2\beta}\frac{2\pi}{\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}&\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\\
\times\Big[\Big(&\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{-\pi}{E_{\boldsymbol{k}}-ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}-ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})\\
&+\Big(\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{\pi}{-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4+E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k+p}})\\
&-\Big(-\frac{\pi}{E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{\pi}{-E_{\boldsymbol{k}}+ip_4-E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k+p}})\Big]
\end{aligned}
$$

和の計算はここで終わってもいいんですが、後で見やすくするための式変形をしていきます

$$
\begin{aligned}
\Pi(p_4,\boldsymbol{p}) = &-\frac{g^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \\
&\times\Big[(\frac{-1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{-1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad+(\frac{-1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{-1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})\Big] \\
= &-\frac{g^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \\
&\times\Big[(\frac{-1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})(\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})+\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})) \\
&\quad+(\frac{-1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})(\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}})-\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}))\Big]
\end{aligned}
$$

ここで、coth を exp を使って書くことにすれば

$$
\coth(\frac{\beta}{2}E_{\boldsymbol{k}}) = -1-\frac{2}{e^{-\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1} = 1+\frac{2}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\Pi(p_4,\boldsymbol{p}) = &-\frac{g^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \\
&\times\Big[(\frac{-1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})(1+\frac{2}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}+1+\frac{2}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1}) \\
&\quad+(\frac{-1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})(1+\frac{2}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}-1-\frac{2}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1})\Big] \\
= &-\frac{g^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \\
&\times\Big[(\frac{-1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})(1+\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}+\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1}) \\
&\quad+(\frac{-1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}})(\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}-\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1})\Big] \\
= &-\frac{g^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \\
&\times\Big[\big(\frac{-1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_B(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})\big) \\
&\quad+\big(\frac{-1}{ip_4-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{ip_4+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_B(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})\big)\Big] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
n_B(E_{\boldsymbol{k}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}\ ,\ n_B(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1}
$$

この形を見てみると、明らかに n_B を持つ項と持たない項に分離されていることが分かります。つまり、n_B を持つ温度依存項と持たないゼロ温度項に分かれて出てきています (外線 p_4 には松原振動数による T がいる)。

次に、和を積分に変えた場合で実行してみます。

$$\Pi(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{g^2}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0+k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}$$

これの和を積分に変えれば

$$\begin{aligned}\Pi(p_0,\boldsymbol{p})=&\frac{g^2}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\\&\Big[\int_{-i\infty}^{i\infty}dk_0\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0+k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}+\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}\Big)\\&+\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon}dk_0\Big(\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0+k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}+\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}\Big)\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}\Big]\\=&\,\Pi_{T=0}+\Pi_T\end{aligned}$$

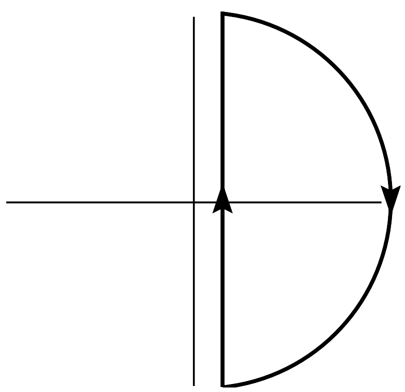
$\Pi_{T=0}$ がゼロ温度の場合に対応し、Π_T が温度に依存するものだとします。$\Pi_{T=0}$ はゼロ温度の場合に対応するものなので、無視しておきます。そのため、これから計算するものは和の公式を使った場合での温度依存項と対応しているはずです。Π_T の計算は留数定理を使えば簡単にできます。

$$\begin{aligned}\Pi_T=&\frac{g^2}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon}dk_0\Big[\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}\\&+\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0+k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}\Big]\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}\\=&\frac{g^2}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(I_1+I_2)\end{aligned}$$

第一項は

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2}\frac{1}{(p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2}\frac{1}{e^{\beta k_0}-1} \\
&= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{1}{k_0^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\frac{1}{(p_0-k_0)^2-E_{\boldsymbol{k+p}}^2}\frac{1}{e^{\beta k_0}-1} \quad (E_{\boldsymbol{k}}^2=\boldsymbol{k}^2+m^2\ ,\ E_{\boldsymbol{k+p}}^2=(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2+m^2) \\
&= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{1}{k_0+E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{k_0-E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{(p_0-k_0)-E_{\boldsymbol{k+p}}}\frac{1}{(p_0-k_0)+E_{\boldsymbol{k+p}}}\frac{1}{e^{\beta k_0}-1} \\
&= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{-1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left(\frac{1}{k_0+E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{1}{k_0-E_{\boldsymbol{k}}}\right)\frac{-1}{2E_{\boldsymbol{k+p}}}\left(\frac{1}{(p_0-k_0)+E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{1}{(p_0-k_0)-E_{\boldsymbol{k+p}}}\right)\frac{1}{e^{\beta k_0}-1} \\
&= \frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \left(\frac{1}{k_0+E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{1}{k_0-E_{\boldsymbol{k}}}\right)\left(\frac{1}{(p_0-k_0)+E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{1}{(p_0-k_0)-E_{\boldsymbol{k+p}}}\right)\frac{1}{e^{\beta k_0}-1} \\
&= \frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \Big(\frac{1}{k_0+E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{p_0-k_0+E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{1}{k_0+E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{p_0-k_0-E_{\boldsymbol{k+p}}} \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{k_0-E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{p_0-k_0+E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{1}{k_0-E_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{p_0-k_0-E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta k_0}-1} \\
&= \frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \Big(\frac{1}{k_0+E_{\boldsymbol{k}}}\frac{-1}{k_0-p_0-E_{\boldsymbol{k+p}}}-\frac{1}{k_0+E_{\boldsymbol{k}}}\frac{-1}{k_0-p_0+E_{\boldsymbol{k+p}}} \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{k_0-E_{\boldsymbol{k}}}\frac{-1}{k_0-p_0-E_{\boldsymbol{k+p}}}+\frac{1}{k_0-E_{\boldsymbol{k}}}\frac{-1}{k_0-p_0+E_{\boldsymbol{k+p}}}\Big)\frac{1}{e^{\beta k_0}-1} \\
&= \frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k+p}}}(A_1+A_2+A_3+A_4)
\end{aligned}
$$

これの積分経路は k_0 の複素平面の右半円です (時計回りなので符号を反転させます)。そして、p_0 は $p_0=2\pi iTl$ となっていて実軸上にいないために、$E_{\boldsymbol{k}}, E_{\boldsymbol{k+p}}>0$ をマイナスに持っていかないです。



それぞれの項を別々に計算すると

$$A_1 = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{1}{k_0 + E_{\boldsymbol{k}}} \frac{-1}{k_0 - p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \quad (\text{極 } k_0 = -E_{\boldsymbol{k}}\text{は経路の内側にいない})$$

$$= -2\pi i \frac{-1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta(p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})} - 1}$$

$$A_2 = 0 \quad (\text{極 } k_0 = -E_{\boldsymbol{k}}, k_0 = p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}\text{は経路の内側にいない})$$

$$A_3 = -\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{1}{k_0 - E_{\boldsymbol{k}}} \frac{-1}{k_0 - p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}$$

$$= 2\pi i [\frac{-1}{E_{\boldsymbol{k}} - p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} + \frac{-1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta(p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})} - 1}]$$

$$A_4 = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{1}{k_0 - E_{\boldsymbol{k}}} \frac{-1}{k_0 - p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \quad (\text{極 } k_0 = p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}\text{は経路の内側にいない})$$

$$= -2\pi i \frac{-1}{E_{\boldsymbol{k}} - p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1}$$

というわけで

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \Big[\frac{1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta(p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})} - 1} + \frac{-1}{E_{\boldsymbol{k}} - p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \\
&\qquad + \frac{-1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta(p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})} - 1} + \frac{1}{E_{\boldsymbol{k}} - p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \Big] \\
&= \frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \Big[\frac{1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta(p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})} - 1} + \frac{1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \\
&\qquad + \frac{-1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta(p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})} - 1} + \frac{-1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \Big] \\
&= \frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \Big[\frac{1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} - 1} + \frac{1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \\
&\qquad + \frac{-1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} - 1} + \frac{-1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \Big] \quad (e^{\beta p_0} = 1) \\
&= \frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \Big[(\frac{1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} + \frac{-1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}) \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \\
&\qquad + (\frac{-1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{k}}} + \frac{1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{k}}}) \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} - 1} \Big]
\end{aligned}$$

もう片方の I_2 は I_1 の p_0 の符号を反転させればいいだけなので

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} \Big[&(\frac{-1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} + \frac{1}{p_0 + E_{\boldsymbol{k}} + E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}) \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \\
&+ (\frac{1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{k}}} + \frac{-1}{p_0 - E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{k}}}) \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}} - 1} \Big]
\end{aligned}$$

あわせると

$$
\begin{aligned}
I_1+I_2=&\frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\big(\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{-1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{-1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}\\
&\qquad+\big(\frac{-1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}+\frac{-1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1}\Big]\\
=&\frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\big(\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}+\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1}\big)\\
&\qquad+\big(\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}-1}-\frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-1}\big)\Big]\\
=&\frac{2\pi i}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\big(\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_B(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})\big)\\
&\qquad+\big(\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_B(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})\big)\Big]
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\Pi_T=&\frac{g^2}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(I_1+I_2)\\
=&\frac{g^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\Big[\big(\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_B(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})\big)\\
&\qquad+\big(\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}}}\big)\big(n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_B(E_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}})\big)\Big]
\end{aligned}
$$

この結果を (1) と比べてみると、n_B を含む項と一致していることが分かります ($ip_4=p_0$)。これは $\Pi_{T=0}$ を分離して計算していることから予想される結果どおりです。というわけで、和の公式を使って計算したものと同じ結果を導いていることになります。