有限密度での自己エネルギー

フェルミオンの化学ポテンシャルがあるときの自己エネルギーがどうなるのか見ます。ここでも厳密には扱わずにHTL 近似をとることにします。その結果として HTL 近似は化学ポテンシャルがいるときでも同じように行えることがわかります。
「光子の自己エネルギー」と「電子の自己エネルギー」での話を利用するので、そっちも見てください。
運動量の記号として電子では p、光子では k を使っています。ただし、外線に対してはどちらの場合でも ω_n としています。

- 光子の自己エネルギー

光子の自己エネルギーは

$$\Pi_{\mu\nu}(i\omega_n,\boldsymbol{k}) = e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{4(p_\mu(p-k)_\nu+p_\nu(p-k)_\mu-p\cdot(p-k)g_{\mu\nu})+4m^2}{(p^2-m^2)((p-k)^2-m^2)}$$

$$p_0=i\omega_l=2i\pi T(l+\frac{1}{2})\ ,\ k_0=i\omega_n=2i\pi Tn$$

HTL 近似と同じことをするので、質量 m と分子の k_μ を無視して

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k}) &= e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{4(p_\mu p_\nu+p_\nu p_\mu-p\cdot pg_{\mu\nu})}{(p^2-m^2)((p-k)^2)}\\ &= e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{8p_\mu p_\nu}{p^2(p-k)^2}-\frac{4g_{\mu\nu}}{(p-k)^2})\\ &= A_{\mu\nu}-B_{\mu\nu}\end{aligned}$$

$B_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}B_{\mu\nu} &= 4e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{g_{\mu\nu}}{(p-k)^2}\\ &= 4g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(i\omega_l+\mu-i\omega_n)^2-\boldsymbol{q}^2}\\ &= 4g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dp_0\frac{1}{(p_0-i\omega_n)^2-\boldsymbol{q}^2}\\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon}dp_0\frac{1}{(p_0-i\omega_n)^2-\boldsymbol{q}^2}n_F(p_0-\mu)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon}dp_0\frac{1}{(p_0-i\omega_n)^2-\boldsymbol{q}^2}n_F(-p_0+\mu)\Big]\end{aligned}$$

第一項は解析接続後に温度依存性がなくなるので、無視して

$$
\begin{aligned}
B_{\mu\nu} &= 4g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon}dp_0\frac{1}{(p_0-i\omega_n)^2-\boldsymbol{q}^2}n_F(p_0-\mu) \\
&\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon}dp_0\frac{1}{(p_0-i\omega_n)^2-\boldsymbol{q}^2}n_F(-p_0+\mu)\Big] \\
&= 4g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon}dp_0\frac{1}{p_0-i\omega_n-|\boldsymbol{q}|}\frac{1}{p_0-i\omega_n+|\boldsymbol{q}|}n_F(p_0-\mu) \\
&\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon}dp_0\frac{1}{p_0-i\omega_n-|\boldsymbol{q}|}\frac{1}{p_0-i\omega_n+|\boldsymbol{q}|}n_F(-p_0+\mu)\Big] \\
&= 4g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{q}|-i\omega_n+|\boldsymbol{q}|}n_F(i\omega_n+|\boldsymbol{q}|-\mu) \\
&\qquad -\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{q}|-i\omega_n-|\boldsymbol{q}|}n_F(-i\omega_n+|\boldsymbol{q}|+\mu)\Big] \\
&= 4g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{q}|}[n_F^+(|\boldsymbol{q}|)+n_F^-(|\boldsymbol{q}|)] \\
&= 4g_{\mu\nu}e^2\int d\Omega_3\int\frac{d|\boldsymbol{p}|}{(2\pi)^3}\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2|\boldsymbol{p}|}[n_F^+(|\boldsymbol{p}|)+n_F^-(|\boldsymbol{p}|)]
\end{aligned}
$$

$$
\Big(n_F^{\pm}(E)=\frac{1}{e^{\beta(E\pm\mu)}+1}\Big)
$$

$A_{\mu\nu}$ は

$$
A_{\mu\nu}=8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2(p-k)^2}
$$

$\mu,\nu=i,j$ では $(E_{\boldsymbol{p}}=|\boldsymbol{p}|,\ E_{\boldsymbol{q}}=|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}|)$

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{p^2(p-k)^2} \\
&= 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{((i\omega_l+\mu)^2+E_p^2)((i\omega_l+\mu-i\omega_n)^2-E_q^2)} \\
&= -8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{4E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\Big(-\frac{1-n_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}}+\frac{1-n_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}} \\
&\qquad +\frac{n_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n-E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}}-\frac{n_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n+E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}}\Big)
\end{aligned}
$$

分布関数を含まない項を無視して、分母に対して HTL 近似を使えば

$$A_{ij} = -8e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p_i p_j}{4E_{\boldsymbol{p}} E_{\boldsymbol{q}}} \Big(\frac{n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n + 2|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{n_F^-(|\boldsymbol{p}|) + n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n - 2|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta}$$
$$+ \frac{n_F^-(|\boldsymbol{p}|) - n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{n_F^+(|\boldsymbol{p}|) - n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} \Big)$$

分布関数部分の HTL 近似よる展開は

$$n_F^\pm(|\boldsymbol{p}|) - n_F^\pm(E_{\boldsymbol{q}}) = n_F^\pm(|\boldsymbol{p}|) - n_F^\pm(|\boldsymbol{p}|) + \frac{dn_F^\pm(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta = \frac{dn_F^\pm(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta$$

$$n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + n_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) = n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + n_F^-(|\boldsymbol{p}|) - \frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta$$

$$n_F^-(|\boldsymbol{p}|) + n_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) = n_F^-(|\boldsymbol{p}|) + n_F^+(|\boldsymbol{p}|) - \frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta$$

これを使うと第三項と第四項は

$$\begin{aligned}
\frac{n_F^-(|\boldsymbol{p}|) - n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{n_F^+(|\boldsymbol{p}|) - n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} &= \frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} \\
&= -\frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} \\
&= -(\frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|} + \frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|})\frac{|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta}
\end{aligned}$$

第一項と第二項では

$$\begin{aligned}
&\frac{n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n + 2|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{n_F^-(|\boldsymbol{p}|) + n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n - 2|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} \\
&\qquad = \frac{n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{2|\boldsymbol{p}|} - \frac{n_F^-(|\boldsymbol{p}|) + n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{-2|\boldsymbol{p}|} \\
&\qquad = \frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}(n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + n_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + n_F^-(|\boldsymbol{p}|) + n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})) \\
&\qquad = \frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}\Big(2n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + 2n_F^-(|\boldsymbol{p}|) - \frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta - \frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\Big) \\
&\qquad = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}(n_F^+(|\boldsymbol{p}|) + n_F^-(|\boldsymbol{p}|)) + \frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}(-\frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|} + \frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|})|\boldsymbol{k}|\cos\theta
\end{aligned}$$

と近似されます。これの第二項の角度積分が、$\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ に対して

$$\int d^3p\ p_i p_j \cos\theta = -\int d^3p p_i p_j \cos\theta$$

となっているので、第二項は角度積分で 0 になります。よって

$$A_{ij}=-8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{4|\boldsymbol{p}|^2}\Big[\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}(n_F^+(|\boldsymbol{p}|)+n_F^-(|\boldsymbol{p}|))-\Big(\frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}+\frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\Big)\frac{|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\Big]$$

今の場合での $B_{\mu\nu},A_{ij}$ と「光子の自己エネルギー」での場合とを並べてみると

$$B_{\mu\nu}=4g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}(n_F^+(|\boldsymbol{p}|)+n_F^-(|\boldsymbol{p}|))$$

$$A_{ij}=-8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{4|\boldsymbol{p}|^2}\Big[\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}(n_F^+(|\boldsymbol{p}|)+n_F^-(|\boldsymbol{p}|))-\Big(\frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}+\frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\Big)\frac{|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\Big]$$

$$B_{\mu\nu}=8g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}n_F(|\boldsymbol{p}|)$$

$$A_{ij}=-8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{2p_ip_j}{4|\boldsymbol{p}|^2}\Big[\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\Big]$$

上 2 つが今の場合で、下 2 つが「光子の自己エネルギー」です。これらから分布関数に $\pm\mu$ がいることは以外は同じ格好をしていることが分かります。つまり、HTL 近似による近似の手続きは μ がいようがいなかろうが構造自体は同じになっています (A_{00},A_{0i} でも同様)。このため、角度積分は全く同じになるので、残った問題は μ がいる分布関数の積分が行えるのかということになります。

必要な積分は

$$L_1=\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|[n_F^+(|\boldsymbol{p}|)+n_F^-(|\boldsymbol{p}|)]\ ,\ L_2=\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^2(\frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}+\frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|})$$

この 2 つです。μ が含まれているフェルミオン分布関数の積分は厳密に行えないんですが、この形では行うことができます。L_1 では

$$
\begin{aligned}
L_1 = &\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|(\frac{1}{e^{\beta(|\boldsymbol{p}|-\mu)}+1}+\frac{1}{e^{\beta(|\boldsymbol{p}|+\mu)}+1}) \\
= &\frac{1}{\beta}(\int_{-\beta\mu}^\infty dx\frac{x/\beta+\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_{\beta\mu}^\infty dx\frac{x/\beta-\mu}{e^{\beta x}+1}) \quad (\beta(|\boldsymbol{p}|\pm\mu)=x) \\
= &\frac{1}{\beta}(\int_{-\beta\mu}^0 dx\frac{x/\beta+\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_0^\infty dx\frac{x/\beta+\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_{\beta\mu}^\infty dx\frac{x/\beta-\mu}{e^{\beta x}+1}) \\
= &\frac{1}{\beta}(-\int_{\beta\mu}^0 dx\frac{-x/\beta+\mu}{e^{-\beta x}+1}+\int_0^\infty dx\frac{x/\beta+\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_{\beta\mu}^\infty dx\frac{x/\beta-\mu}{e^{\beta x}+1}) \\
= &\frac{1}{\beta}(\int_0^{\beta\mu} dx(-x/\beta+\mu)(1-\frac{1}{e^{\beta x}+1})+\int_0^\infty dx\frac{x/\beta+\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_{\beta\mu}^\infty dx\frac{x/\beta-\mu}{e^{\beta x}+1}) \\
= &\frac{1}{\beta}(\int_0^{\beta\mu} dx(-x/\beta+\mu)+\int_0^\infty dx\frac{x/\beta+\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_0^{\beta\mu} dx\frac{x/\beta-\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_{\beta\mu}^\infty dx\frac{x/\beta-\mu}{e^{\beta x}+1}) \\
= &\frac{1}{\beta}(\int_0^{\beta\mu} dx(-x/\beta+\mu)+\int_0^\infty dx\frac{x/\beta+\mu}{e^{\beta x}+1}+\int_0^\infty dx\frac{x/\beta-\mu}{e^{\beta x}+1}) \\
= &\frac{1}{\beta}(\int_0^{\beta\mu} dx(-x/\beta+\mu)+\frac{2}{\beta}\int_0^\infty dx\frac{x}{e^{\beta x}+1}) \\
= &\frac{1}{\beta}(-\frac{1}{2\beta}\beta^2\mu^2+\beta\mu^2+\frac{2}{\beta}\frac{\pi^2}{12}) \\
= &\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{\beta^2}\frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

L_2 でも同じようにすることで

$$
\begin{aligned}
L_2 = &\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^2(\frac{dn_F^+(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}+\frac{dn_F^-(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}) \\
= &|\boldsymbol{p}|^2(n_F^+(|\boldsymbol{p}|+n_F^-(|\boldsymbol{p}|))|_0^\infty-2\int d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|(n_F^+(|\boldsymbol{p}|+n_F^-(|\boldsymbol{p}|)) \\
= &-2\int d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|(n_F^+(|\boldsymbol{p}|+n_F^-(|\boldsymbol{p}|)) \\
= &-2(\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{\beta^2}\frac{\pi^2}{6}) \\
= &-(\mu^2+\frac{\pi^2}{3\beta^2})
\end{aligned}
$$

L_1, L_2 の積分は μ と T が混ざらずに出てきています。これは $\mu=0$ としたときの計算に、単純に μ の項が足されているだけです。このことを踏まえると結局のところ μ がいるときの変更は光子の熱的質量に対してだけ行われることがわかるので、光子の熱的質量 M を

$$
M=\frac{e^2T^2}{6}\ \Rightarrow\ M=e^2(\frac{T^2}{6}+\frac{\mu^2}{2\pi^2})
$$

とするだけで終わります。この変更ですむというのは、例えば $B_{\mu\nu}$ において角度積分までを実行すると

$$B_{\mu\nu}=\frac{4g_{\mu\nu}e^2}{2(2\pi)^3}\int d\Omega(\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{\beta^2}\frac{\pi^2}{6})=g_{\mu\nu}e^2(\frac{1}{2\pi^2}\mu^2+\frac{T^2}{6})$$

$$B_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\frac{e^2T^2}{6}$$

となっていることから分かります (上が今の場合で、下が「光子の自己エネルギー」の場合)。

- 電子の自己エネルギー

　電子の自己エネルギーの場合も見ていきます。しかし、光子の自己エネルギーで HTL 近似の近似の仕方は μ とは無関係に行われていることから、同じように電子の熱的質量を変更すればいいのだと予想できます。で、実際にやってみるとこの予想通りの結果になります。ただし、一部制限が加わります。

　ファインマンゲージでの電子の自己エネルギーは

$$\Sigma(i\omega_n,\boldsymbol{p})=e^2T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-2(i\omega_n+\mu-k_0)\gamma^0-2(p_i-k_i)\gamma^i+4m}{((i\omega_n+\mu-k_0)^2-E_{\boldsymbol{q}}^2)((i\omega_l)^2-E_{\boldsymbol{k}}^2)}$$

$$(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}\ ,\ E_{\boldsymbol{q}}=|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}|\ ,\ E_{\boldsymbol{k}}=|\boldsymbol{k}|)$$

p がフェルミオンで、k が光子です ($p_0=\omega_n=2\pi T(n+1/2),k_0=\omega_l=2i\pi lT$)。HTL 近似の手続きに従うなら、$i\omega_n$ は連続的な p_0 だとみなして、無視します。しかし、今の場合では p_0 を無視するだけでは μ は生き残ります。これでは非常にわずらわしいので、μ に対して $\mu\ll T$ という制限を加えて、分子の $i\omega_n+\mu$ を無視します。そうすると分子には μ がいなくなって

$$\begin{aligned}\Sigma(i\omega_n,\boldsymbol{p})\simeq&\ -2e^2T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-i\omega_l\gamma^0+(p_i-k_i)\gamma^i}{((i\omega_n+\mu-k_0)^2-E_{\boldsymbol{q}}^2)((i\omega_l)^2-E_{\boldsymbol{k}}^2)}\\&=a\gamma_0+b_i\gamma_i\end{aligned}$$

となります。全部をやる必要もないので、γ_0 項だけ行います。これの和は「有限密度でのフェルミオン」でやっているので、それを使うことで

$$\begin{aligned}a=2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}}\Big[&-\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n+\mu+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n+\mu-E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}\\&+\frac{1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n+\mu-E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{1+n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{i\omega_n+\mu+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}\Big]\end{aligned}$$

$i\omega_n+\mu$ を p_0 と書くことにして、$p_0\ll T$ での HTL 近似を行えば

$$\begin{aligned}a\simeq2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}}\Big[&-\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}})+n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\\&+\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0-2|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}+\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}})-n_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0+2|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\Big]\end{aligned}$$

分布関数を含まない項は無視しています。各分布関数に対する近似は

$$n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + n_F^{\pm}(E_{\boldsymbol{q}}) = n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{\pm}(|\boldsymbol{k}|) - \frac{dn_F^{\pm}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta$$
$$n_B(E_{\boldsymbol{k}}) - n_F^{\pm}(E_{\boldsymbol{q}}) = n_B(|\boldsymbol{k}|) - n_F^{\pm}(|\boldsymbol{k}|) + \frac{dn_F^{\pm}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta$$

なので、第一項と第二項は、第一項で $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ と置き換えることで

$$\begin{aligned}
&-\Big(\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + n_F^{+}(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0 - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + n_F^{-}(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0 + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}\Big) \\
&= (2n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{+}(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{-}(|\boldsymbol{k}|) + \frac{dn_F^{+}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta - \frac{dn_F^{-}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta)\frac{1}{p_0 + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}
\end{aligned}$$

第三項と第四項は

$$\begin{aligned}
\frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}}) - n_F^{-}(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0 - 2|\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{n_B(E_{\boldsymbol{k}}) - n_F^{+}(E_{\boldsymbol{q}})}{p_0 + 2|\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} &= -\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}(n_B(E_{\boldsymbol{k}}) - n_F^{-}(E_{\boldsymbol{q}}) - n_B(E_{\boldsymbol{k}}) + n_F^{+}(E_{\boldsymbol{q}})) \\
&= -\frac{|\boldsymbol{p}|\cos\theta}{2|\boldsymbol{k}|}(-n_F^{-}(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{+}(|\boldsymbol{k}|) + \frac{dn_F^{-}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|} - \frac{dn_F^{+}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|})
\end{aligned}$$

この部分は角度積分で消えるので

$$a \simeq 2e^2\gamma_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|}\Big[(2n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{+}(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{-}(|\boldsymbol{k}|))\frac{1}{p_0 + |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \Big(\frac{dn_F^{+}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|} - \frac{dn_F^{-}(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}\Big)\frac{|\boldsymbol{p}|\cos\theta}{p_0 + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}\Big]$$

HTL 近似では $|\boldsymbol{k}| \sim T$ の領域を拾いたいということと $\mu \ll T$ としていることを考えれば、第二項の積分は寄与しない (実際に第二項は T^2, μ^2 のオーダにならない) とみなせて

$$a \simeq 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|}\big(2n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{+}(|\boldsymbol{k}|) + n_F^{-}(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{1}{p_0 + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}$$

となります。「電子の自己エネルギー」での同じ部分を抜き出すと

$$2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}$$

となっています (「電子の自己エネルギー」での I_1 の部分)。これを見て分かるようにここでも角度積分は同じになっています。$n_F^{\pm}$ に対する $|\boldsymbol{k}|$ 積分は上でやったのと同じ格好なので、角度積分を分離すると

$$
\begin{aligned}
a &\simeq \frac{2e^2}{4(2\pi)^3}\int d\Omega(\frac{\pi^2T^2}{3}+\frac{1}{2}\mu^2+\frac{\pi^2T^2}{6})\frac{1}{p_0+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= e^2(\frac{1}{32\pi^3}\mu^2+\frac{T^2}{32\pi})\int d\Omega\frac{1}{p_0+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}
\end{aligned}
$$

$\mu=0$ とすれば「電子の自己エネルギー」の結果と一致するので、フェルミオンの熱的質量を

$$
M=\frac{e^2T^2}{8}\ \Rightarrow\ M=\frac{e^2}{8}(T^2+\frac{\mu^2}{\pi^2})
$$

とすればいいことになります。このとき、$\mu\ll T$ としていることに注意してください。