電子の自己エネルギー

光子の自己エネルギーと同じように、電子の自己エネルギーを HTL 近似で求めます。HTL 近似の手続きは光子のときとほとんど同じなので、分かりづらければ見比べてください。
電子の自己エネルギーを求めることで、ゼロ温度では出てこない、フェルミオンの集団励起 (collective excitation) としての新しい状態を見ることができます。

電子の自己エネルギーは (ファインマンゲージ)

$$-\Sigma(i\omega_n,\boldsymbol{p})=T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(-e\gamma^\mu)\frac{-1}{(p_\alpha-k_\alpha)\gamma^\alpha-m}\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}(-e\gamma^\nu)$$

$$p_0=i\omega_n=2i\pi T(n+\frac{1}{2})\ ,\ k_0=i\omega_l=2i\pi lT$$

変形して

$$\begin{aligned}\Sigma(i\omega_n,\boldsymbol{p})&=e^2T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\gamma^\mu\frac{(p_\alpha-k_\alpha)\gamma^\alpha+m}{(p-k)^2-m^2}\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}\gamma^\nu\\&=e^2T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-2(p_\alpha-k_\alpha)\gamma^\alpha+4m}{((p-k)^2-m^2)k^2}\qquad(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu=-2\gamma^\alpha)\end{aligned}$$

これの和は「和の計算〜Saclay 法 2〜」でのフェルミオン-ボソンの場合での結果を使えばいいだけです。そして、ここでも結局運動量積分が厳密に実行できないという目にあうので、最初に HTL 近似をしてしまいます。HTL 近似を行うには、質量と外線の運動量は小さいとすればいいので

$$\begin{aligned}\Sigma(i\omega_n,\boldsymbol{p})&\simeq e^2T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{2k_\alpha\gamma^\alpha}{(p-k)^2k^2}\\&=2e^2T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k_0\gamma_0+k_i\gamma^i}{((p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2)(k_0^2-\boldsymbol{k}^2)}\\&=2e^2T\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i\omega_l\gamma_0+k_i\gamma^i}{((\omega_n-\omega_l)^2+E_q^2)(\omega_l^2+E_k^2)}\qquad(E_q=|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}|\ ,\ E_k=|\boldsymbol{k}|)\\&=2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(iI_1+I_2)\end{aligned}$$

I_1 は分子に松原振動数がいる場合を使うことで

$$\begin{aligned}I_1=T\sum_l\frac{\omega_l\gamma_0}{((\omega_n-\omega_l)^2+E_q^2)(\omega_l^2+E_k^2)}&=\gamma_0\sum_{a_1,a_2=\pm1}\frac{ia_2}{4E_q}\frac{1+n_B(a_1E_k)-n_F(a_2E_q)}{i\omega_n-a_1E_k-a_2E_q}\\&=\gamma_0\frac{i}{4E_q}\Big[\frac{1+n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k-E_q}-\frac{1+n_B(-E_k)-n_F(-E_q)}{i\omega_n+E_k+E_q}\\&\qquad-\frac{1+n_B(E_k)-n_F(-E_q)}{i\omega_n-E_k+E_q}+\frac{1+n_B(-E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k-E_q}\Big]\end{aligned}$$

フェルミオンとボソンの分布関数は

$$n_F(-E)=1-n_F(E)\ ,\ n_B(-E)=-(1+n_B(E))$$

なので

$$\begin{aligned}
I_1=&\gamma_0\frac{i}{4E_q}\big[\frac{1+n_B(E_k)-(1+n_F(E_q))}{i\omega_n-E_k-E_q}-\frac{1-(1+n_B(E_k))-(1-n_F(E_q))}{i\omega_n+E_k+E_q}\\
&-\frac{1+n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k+E_q}+\frac{1-(1+n_B(E_k))-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k-E_q}\big]\\
=&\gamma_0\frac{i}{4E_q}\big[\frac{1+n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k-E_q}+\frac{1+n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k+E_q}\\
&-\frac{n_B(E_k)+n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k+E_q}-\frac{n_B(E_k)+n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k-E_q}\big]\\
=&\gamma_0\frac{i}{4E_q}\big[\big(1+n_B(E_k)-n_F(E_q)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-E_k-E_q}+\frac{1}{i\omega_n+E_k+E_q}\big)\\
&-\big(n_B(E_k)+n_F(E_q)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-E_k+E_q}+\frac{1}{i\omega_n+E_k-E_q}\big)\big]
\end{aligned}$$

I_2 は分子に松原振動数がいないものによって

$$\begin{aligned}
T\sum_l\frac{k_i\gamma^i}{((\omega_n-\omega_l)^2+E_q^2)(\omega_l^2+E_k^2)}=&-(k_i\gamma^i)\sum_{a_1,a_2=\pm1}\frac{a_1a_2}{4E_kE_q}\frac{1+n_B(a_1E_k)-n_F(a_2E_q)}{i\omega_n-a_1E_k-a_2E_q}\\
=&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4E_kE_q}\big[\frac{1+n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k-E_q}+\frac{1+n_B(-E_k)-n_F(-E_q)}{i\omega_n+E_k+E_q}\\
&-\frac{1+n_B(E_k)-n_F(-E_q)}{i\omega_n-E_k+E_q}-\frac{1+n_B(-E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k-E_q}\big]\\
=&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4E_kE_q}\big[\frac{1+n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k-E_q}+\frac{1-(1+n_B(E_k))-(1-n_F(E_q))}{i\omega_n+E_k+E_q}\\
&-\frac{1+n_B(E_k)-(1-n_F(E_q))}{i\omega_n-E_k+E_q}-\frac{1-(1+n_B(E_k))-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k-E_q}\big]\\
=&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4E_kE_q}\big[\frac{1+n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k-E_q}+\frac{-n_B(E_k))-1+n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k+E_q}\\
&-\frac{n_B(E_k)+n_F(E_q)}{i\omega_n-E_k+E_q}-\frac{-n_B(E_k)-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_k-E_q}\big]\\
=&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4E_kE_q}\big[\big(1+n_B(E_k)-n_F(E_q)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-E_k-E_q}-\frac{1}{i\omega_n+E_k+E_q}\big)\\
&-\big(n_B(E_k)+n_F(E_q)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-E_k+E_q}-\frac{1}{i\omega_n+E_k-E_q}\big)\big]
\end{aligned}$$

ここで、「光子の自己エネルギー」で出てきたのと同じようにして、$|\boldsymbol{p}| \ll |\boldsymbol{k}|$ という近似を行うことで (「光子の自己エネルギー」のときとは $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{k}$ が反対になっているので見比べるときは注意してください)

$$E_q = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{k}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos\theta} \simeq |\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{p}|\cos\theta \tag{1a}$$

$$n_F(E_q) \simeq n_F(|\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{p}|\cos\theta) \simeq n_F(|\boldsymbol{k}|) - \frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta \tag{1b}$$

$$\left(\begin{array}{l} i\omega_n - E_k - E_q \simeq i\omega_n - |\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{p}|\cos\theta = i\omega_n - 2|\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{p}|\cos\theta \\ i\omega_n + E_k + E_q \simeq i\omega_n + |\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{p}|\cos\theta = i\omega_n + 2|\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{p}|\cos\theta \\ i\omega_n - E_k + E_q \simeq i\omega_n - |\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{p}|\cos\theta = i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta \\ i\omega_n + E_k - E_q \simeq i\omega_n + |\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{p}|\cos\theta = i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta \end{array} \right. \tag{1c}$$

これらの関係を I_1 と I_2 に使います。ここからは分布関数を含んでいない項は無視します。

I_1 では

$$\begin{aligned} I_1 =& \gamma_0 \frac{i}{4E_q}\Big[\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) - n_F(|\boldsymbol{k}|) + \frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - 2|\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{1}{i\omega_n + 2|\boldsymbol{k}| - |\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big) \\ & - \big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|) - \frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\Big] \\ \simeq& \gamma_0 \frac{i}{4E_q}\Big[\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) - n_F(|\boldsymbol{k}|) + \frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{-2|\boldsymbol{k}|} + \frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\big) \\ & - \big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|) - \frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\Big] \\ =& -\gamma_0 \frac{i}{4E_q}\Big[\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|) - \frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\Big] \end{aligned}$$

前からかかっている $1/E_q$ は $1/|\boldsymbol{k}|$ だとしてしまいます。そして、k_i には全空間積分が掛かっているので符号を変えてもいいということと、それに伴って $|\boldsymbol{p}|\cos\theta$ の符号が反転するということから、$n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)$ 項は

$$\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big) = 2\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta}$$

残っている項は

$$\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} + \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}) = 0$$

となるので、I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 &= -\gamma_0 \frac{i}{2|\boldsymbol{k}|}\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\ &= -\gamma_0 \frac{i}{2|\boldsymbol{k}|}\big(n_B(|\boldsymbol{k}|) + n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

「光子の自己エネルギー」のところと合わせるために $|\boldsymbol{p}|\cos\theta$ の符号を反転させています。
同様にして I_2 は

$$
\begin{aligned}
I_2 =&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|^2}\Big[\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(|\boldsymbol{k}|)+\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-2|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+2|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\\
&\qquad-\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\Big]\\
\simeq&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|^2}\Big[\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(|\boldsymbol{k}|)+\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{-2|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\big)\\
&\qquad-\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\Big]\\
=&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|^2}\Big[\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(|\boldsymbol{k}|)+\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\frac{-1}{4|\boldsymbol{k}|}\\
&\qquad-\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

今度は k_i が単独で全体にかかってきているので、$\cos\theta$ を含まない項は全空間積分で消えるので

$$
\begin{aligned}
I_2 =&-(k_i\gamma^i)\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|^2}\Big[-\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}\frac{|\boldsymbol{p}|\cos\theta}{4|\boldsymbol{k}|}\\
&\qquad-\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

第一項は角度積分によって消えます。そして第二項に対して k_i の符号を反転させることで、$n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)$ 項は

$$
\begin{aligned}
&(k_i\gamma^i)\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\\
&=(k_i\gamma^i)\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\big(\frac{-1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\\
&=-(k_i\gamma^i)\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{2}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}
\end{aligned}
$$

残った項は

$$
\begin{aligned}
&-(k_i\gamma^i)\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}|\boldsymbol{p}|\cos\theta\big(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\big)\\
&=-\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}\Big(\frac{(k_i\gamma^i)|\boldsymbol{p}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{(k_i\gamma^i)|\boldsymbol{p}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\Big)\\
&=0
\end{aligned}
$$

なので、I_2 は

$$I_2 = -(k_i\gamma^i)\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|^2}\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{2}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \tag{3}$$

次に I_1 と I_2 の運動量積分を行います。使うのは

$$\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|n_B(|\boldsymbol{k}|) = 2\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|)$$

$$\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|) = \frac{\pi^2T^2}{12}$$

I_1 はそのままなので (2) から (Ω は三次元角度積分)

$$\begin{aligned}
2ie^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}I_1 &= 2ie^2\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|^2 I_1 \\
&= 2\gamma_0 e^2\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{2|\boldsymbol{k}|}(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|))\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= 2\gamma_0 e^2\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ \frac{|\boldsymbol{k}|}{2}(2n_F(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|))\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= 2\gamma_0 e^2\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{3}{2}\frac{\pi^2T^2}{12}\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= \frac{\gamma_0 e^2}{4}\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{\pi^2T^2}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}
\end{aligned}$$

I_2 では (3) から

$$\begin{aligned}
2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}I_2 &= 2e^2\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|^2 I_2 \\
&= -2e^2\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|k_i\gamma^i\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{4|\boldsymbol{k}|^2}\frac{dn_F(|\boldsymbol{k}|)}{d|\boldsymbol{k}|}\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{2}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= -2e^2\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{k_i\gamma^i}{4}\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)\big)\frac{2}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= -e^2\gamma^i\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{e_i}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ |\boldsymbol{k}|\big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(|\boldsymbol{k}|)\big) \qquad (e_i=\frac{k_i}{|\boldsymbol{k}|}) \\
&= -e^2\gamma^i\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{e_i}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\ 3|\boldsymbol{k}|n_F(|\boldsymbol{k}|) \\
&= -\frac{e^2\gamma^i}{4}\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{e_i\pi^2T^2}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}
\end{aligned}$$

というわけで

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= 2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(iI_1+I_2) \\
&= \frac{\gamma_0 e^2}{4}\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{\pi^2T^2}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{e^2\gamma^i}{4}\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{\pi^2T^2e_i}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= \frac{e^2T^2}{32\pi}\int d\Omega\Big(\frac{\gamma_0}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}-\frac{e_i\gamma^i}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta}\Big)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

これの角度積分も普通に実行できます。第一項は「光子の自己エネルギー」での角度積分と同じなので

$$
\begin{aligned}
\int d\Omega\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} &= 2\pi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= 2\pi\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}dP\frac{1}{-|\boldsymbol{p}|}\frac{1}{P}\qquad(P=i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta\ ,\ dP=-|\boldsymbol{p}|\sin\theta d\theta) \\
&= -\frac{2\pi}{|\boldsymbol{p}|}\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|} \\
&= \frac{2\pi}{|\boldsymbol{p}|}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}
\end{aligned}
$$

第二項は $\boldsymbol{k}$ の単位ベクトル e_i だと角度依存性がよく分からないので、$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{k}$ の間の角度 θ によって $\boldsymbol{p}$ 方向に射影して

$$
e_i\ \Rightarrow\ \frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\cos\theta
$$

と置き換えて積分してやります (下の補足参照)。これによって θ 積分に引っかかり

$$
\begin{aligned}
\int d\Omega\frac{e_i}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} &= 2\pi\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|\cos\theta} \\
&= 2\pi\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}dP\frac{1}{-|\boldsymbol{p}|^2}\frac{P-i\omega_n}{P} \\
&= -2\pi\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2}\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}dP(1-\frac{i\omega_n}{P}) \\
&= -2\pi\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2}\Big(-2|\boldsymbol{p}|-i\omega_n\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}\Big) \\
&= -2\pi\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\Big(-\frac{2}{|\boldsymbol{p}|}+\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{p}|^2}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}\Big) \\
&= 2\pi\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\frac{2}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{p}|^2}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}\Big)
\end{aligned}
$$

よって

$$\begin{aligned}\Sigma(i\omega_n,\boldsymbol{p}) &= \frac{e^2T^2}{32\pi}\Big[\frac{2\pi\gamma_0}{|\boldsymbol{p}|}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}-2\pi\frac{p_i\gamma^i}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\frac{2}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{p}|^2}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}\Big)\Big]\\ &= \frac{e^2T^2}{8}\Big[\frac{\gamma_0}{2|\boldsymbol{p}|}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}-\frac{p_i\gamma^i}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{i\omega_n}{2|\boldsymbol{p}|^2}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}\Big)\Big]\end{aligned}$$

これは $i\omega_n$ を解析接続して p'_0 を連続値だとすれば、T^2 のオーダを取り出せたことになって

$$\Sigma(p)=\frac{e^2T^2}{8}\Big[\frac{\gamma_0}{2|\boldsymbol{p}|}\log\frac{p'_0+|\boldsymbol{p}|}{p'_0-|\boldsymbol{p}|}-\frac{p_i\gamma^i}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{p'_0}{2|\boldsymbol{p}|^2}\log\frac{p'_0+|\boldsymbol{p}|}{p'_0-|\boldsymbol{p}|}\Big)\Big]$$

ここで出てきている $e^2T^2/8$ が電子での熱的質量として扱われます。この後の計算を見やすくするためにこれを m_f^2 と書くことにします。

HTL 近似での Σ はファインマンゲージによる結果と他のゲージで計算したものは同じになるので、ゲージ不変なものとなっています。

この自己エネルギーから新しいことが分かるので、それを見ます。自己エネルギーによって電子の温度グリーン関数は

$$S(i\omega_n,\boldsymbol{p})=\frac{-1}{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}-\Sigma(i\omega_n,\boldsymbol{p})}$$

と書け、これは解析接続 $i\omega_n\ \rightarrow\ p_0+i\epsilon$ によって遅延グリーン関数になります (p_0 は実数)。知りたいのは遅延グリーン関数の実軸上の極の位置なので、ϵ は 0 にして虚部を無視してしまいます。なので、遅延グリーン関数は (遅延グリーン関数は「有限温度でのグリーン関数」参照)

$$S_R(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{-1}{\not{p}-\Sigma_R(p)}$$

と与えます。マイナスが付くのが煩わしかったら遅延グリーン関数の定義を変えればいいです (i で割ればいい)。そして、これの分母が 0 となる極を求めるために

$$\not{p}-\Sigma_R(p)=0$$

を考えてみます (これ以降 Σ_R しか出てこないので R を省きます)。$\not{p}-\Sigma(p)$ は上の結果を入れれば (p'_0 を p_0 と書きます)

$$\begin{aligned}\not{p}-\Sigma(p) &= p_0\gamma_0+p_i\gamma^i-m_f^2\Big[\frac{\gamma_0}{2|\boldsymbol{p}|}\log\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|}-\frac{p_i\gamma^i}{|\boldsymbol{p}|}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{p_0}{2|\boldsymbol{p}|^2}\log\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|}\Big)\Big]\\ &= \Big(p_0-m_f^2\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}\log\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|}\Big)\gamma_0+\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\gamma^i\Big(|\boldsymbol{p}|+m_f^2\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{p_0}{2|\boldsymbol{p}|^2}\log\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|}\Big)\Big)\\ &= \Big(p_0-\frac{m_f^2}{|\boldsymbol{p}|}Q\Big(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\Big)\Big)\gamma_0+\frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|}\gamma^i\Big(|\boldsymbol{p}|+m_f^2\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|^2}Q\Big(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\Big)\Big)\Big)\end{aligned}$$

$Q(p_0/|\boldsymbol{p}|)$ は第二種ルジャンドル関数と呼ばれ

$$Q(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

て定義されるもので、今の場合は

$$\frac{1}{2}\log\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|} = \frac{1}{2}\log\frac{p_0/|\boldsymbol{p}|+1}{p_0/|\boldsymbol{p}|-1} = Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})$$

さらに、記号を新しく定義して見やすくします。単位ベクトル $p_i/|\boldsymbol{p}|$ を $\hat{p}_i$ として、

$$\begin{aligned} A_0 &= p_0 - \frac{m_f^2}{|\boldsymbol{p}|}Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) \\ A_S &= |\boldsymbol{p}| + m_f^2\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|} - \frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|^2}Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})\Big) \end{aligned}$$

という記号を作れば

$$\not{p} - \Sigma(p) = A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i$$

こう書くことで、伝播関数の形を

$$-S_R = \frac{1}{\not{p}-\Sigma} = \frac{1}{A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i} = \frac{A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i}{(A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i)^2}$$

分母は

$$(A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i)^2 = A_0^2 + A_S^2(\hat{p}_i\gamma^i)^2 + A_0A_S\gamma_0\hat{p}_i\gamma^i + A_0A_S\hat{p}_i\gamma^i\gamma_0 = A_0^2 - A_S^2$$

$$(\gamma_0\gamma_i + \gamma_i\gamma_0 = 2g_{i0} = 0\ ,\ p_ip_j\gamma^i\gamma^j = -\delta^{ij}p_ip_j = -\boldsymbol{p}^2)$$

なので

$$\begin{aligned} -S_R &= \frac{A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i}{A_0^2 - A_S^2} \\ &= \frac{A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i}{(A_0 - A_S)(A_0 + A_S)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\gamma_0 + \hat{p}_i\gamma^i}{A_0 - A_S} + \frac{1}{2}\frac{\gamma_0 - \hat{p}_i\gamma^i}{A_0 + A_S} \end{aligned} \tag{5}$$

この形から分かるように、S_R が極を持つのは $A_0 = \pm A_S$ のときです。これは射影演算子

$$\Lambda_\pm = \frac{\gamma_0 \pm \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{2}$$

によって 2 つの状態に分離された形にもなっています。$A_0 \pm A_S$ をまとめて書くと

$$
\begin{aligned}
A_0 \pm A_S &= p_0 - \frac{m_f^2}{|\boldsymbol{p}|}Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) \pm \Big[|\boldsymbol{p}| + m_f^2(\frac{1}{|\boldsymbol{p}|} - \frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|^2}Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})\Big] \\
&= p_0 \pm |\boldsymbol{p}| + m_f^2\Big[-\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) \mp \frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|^2}Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) \pm \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\Big] \\
&= p_0 \pm |\boldsymbol{p}| - \frac{m_f^2}{|\boldsymbol{p}|}\Big[\big(1 \pm \frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) \mp 1\Big]
\end{aligned}
$$

これが 0 になるときが今欲しい解です。$|\boldsymbol{p}| = 0$ での解は、角度積分を実行するまえの (4) で、$|\boldsymbol{p}| = 0$ とすれば簡単に求められます。この場合での Σ は

$$
\begin{aligned}
\Sigma = \frac{e^2T^2}{32\pi}\int d\Omega(&\frac{\gamma_0}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta} - \frac{e_i\gamma^i}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta}) \\
&\Rightarrow \frac{e^2T^2}{32\pi}\int d\Omega(\frac{\gamma_0}{i\omega_n} - \frac{e_i\gamma^i}{i\omega_n}) \\
&= \frac{m_f^2}{4\pi}\int d\Omega\frac{\gamma_0}{i\omega_n} \\
&= m_f^2\frac{\gamma_0}{i\omega_n}
\end{aligned}
$$

$\cos\theta$ がいなくなるので単位ベクトルのいる積分は 0 になります。解析接続して S_R に入れれば

$$
S_R(p_0, |\boldsymbol{p}| = 0) = \frac{-1}{p_0\gamma_0 - m_f^2\frac{\gamma_0}{p_0}} = \frac{-1}{p_0 - m_f^2/p_0}\gamma_0
$$

なので、極は

$$
p_0 = \pm m_f
$$

となっています。さらに、γ_0 の固有状態として ± 1 があるために縮退しています。このことから、縮退がとければ解が 4 つは出てくるだろうということが予想されます。この縮退は $|\boldsymbol{p}| \neq 0$ とすればとけるので、それをみていきます。

先に $A_0(p_0, \boldsymbol{p}) \pm A_S(p_0, \boldsymbol{p})$ の性質を出しておきます。$Q(p_0/|\boldsymbol{p}|)$ の性質として、$p^2 < 0$ という空間的な場合に

$$
Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}) = \frac{1}{2}\log|\frac{p_0 + |\boldsymbol{p}|}{p_0 - |\boldsymbol{p}|}| - \frac{i\pi}{2} \quad (p^2 < 0)
$$

のように虚部を持ちます。これは複素数の対数が

$$
\log z = \log|z| + i\pi
$$

このようになっているからです ($z = -x$ で、$x > 0$ の実数の場合)。

このことから $\Delta_\mp(p_0,\boldsymbol{p})=(A_0(p_0,\boldsymbol{p})\pm A_S(p_0,\boldsymbol{p}))^{-1}$ は、Q を $Q=Q_R+iQ_I$ と分けることで

$$\begin{aligned}
\Delta_\mp(p_0,\boldsymbol{p}) &= \Big(p_0\pm|\boldsymbol{p}|-\frac{m_f^2}{|\boldsymbol{p}|}\Big[(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q(\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})\mp1\Big]\Big)^{-1} \\
&= \Big(p_0\pm|\boldsymbol{p}|-\frac{m_f^2}{|\boldsymbol{p}|}\Big[(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})(Q_R+iQ_I)\mp1\Big]\Big)^{-1} \\
&= \Big(p_0\pm|\boldsymbol{p}|-a\Big[(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})(Q_R+iQ_I)\mp1\Big]\Big)^{-1} \qquad (a=\frac{m_f^2}{|\boldsymbol{p}|}) \\
&= \Big(p_0\pm|\boldsymbol{p}|-a\big(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)Q_R\pm a-ia\big(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)Q_I\Big)^{-1} \\
&= \frac{p_0\pm|\boldsymbol{p}|-a\big(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)Q_R\pm a+ia\big(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)Q_I}{\big(p_0\pm|\boldsymbol{p}|-a(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R\pm a\big)^2+a^2\big(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}
\end{aligned}$$

なので、実部と虚部は

$$\mathrm{Re}\Delta_\mp(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{p_0\pm|\boldsymbol{p}|-a(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R\pm a}{\big(p_0\pm|\boldsymbol{p}|-a(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R\pm a\big)^2+a^2\big(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}$$

$$\mathrm{Im}\Delta_\mp(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{a(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_I}{\big(p_0\pm|\boldsymbol{p}|-a(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R\pm a\big)^2+a^2\big(1\pm\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}$$

ここで

$$Q_R(\frac{-p_0}{|\boldsymbol{p}|})=-\frac{1}{2}\log|\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|}{p_0-|\boldsymbol{p}|}|$$

を使うことで $\Delta_+(p_0,\boldsymbol{p})$ は

$$\mathrm{Re}\Delta_+(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|-a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R+a}{\big(p_0+|\boldsymbol{p}|-a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R+a\big)^2+a^2\big(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}$$

$\Delta_-(-p_0,\boldsymbol{p})$ では

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Delta_-(-p_0,\boldsymbol{p}) &= \frac{-p_0-|\boldsymbol{p}|-a(1-\frac{-p_0}{|\boldsymbol{p}|})(-Q_R)-a}{\big(-p_0-|\boldsymbol{p}|-a(1-\frac{-p_0}{|\boldsymbol{p}|})(-Q_R)-a\big)^2+a^2\big(1-\frac{-p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2} \\
&= \frac{-p_0-|\boldsymbol{p}|+a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R-a}{\big(-p_0-|\boldsymbol{p}|+a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R-a\big)^2+a^2\big(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2} \\
&= -\frac{p_0+|\boldsymbol{p}|-a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R+a}{\big(p_0+|\boldsymbol{p}|-a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R+a\big)^2+a^2\big(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}
\end{aligned}$$

同じように虚部では

$$\mathrm{Im}\Delta_+(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_I}{\big(p_0+|\boldsymbol{p}|-a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R+a\big)^2+a^2\big(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Delta_-(-p_0,\boldsymbol{p}) &= \frac{a(1-\frac{-p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_I}{\big(-p_0-|\boldsymbol{p}|-a(1-\frac{-p_0}{|\boldsymbol{p}|})(-Q_R)-a\big)^2+a^2\big(1-\frac{-p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}\\ &= \frac{a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_I}{\big(-p_0-|\boldsymbol{p}|+a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R-a\big)^2+a^2\big(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}\\ &= \frac{a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_I}{\big(p_0+|\boldsymbol{p}|-a(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|})Q_R+a\big)^2+a^2\big(1+\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|}\big)^2Q_I^2}\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{Re}(\Delta_+(p_0,\boldsymbol{p}))=-\mathrm{Re}(\Delta_-(-p_0,\boldsymbol{p})) \tag{6a}$$

$$\mathrm{Im}(\Delta_+(p_0,\boldsymbol{p}))=\mathrm{Im}(\Delta_-(-p_0,\boldsymbol{p})) \tag{6b}$$

となっています。この関係から解の関連性が分かります。

$\Delta_+=A_0-A_S=0$ の解は 2 つ持てるので、それを

$$p_0=\omega_+\ ,\ p_0=-\omega_- \tag{7a}$$

と書くなら、p_0 の符号を反転したときの関係から、$\Delta_-=A_0+A_S=0$ に対しては

$$p_0=\omega_-\ ,\ p_0=-\omega_+ \tag{7b}$$

という解を持っているのだと考えられます ($\omega_\pm>0$)。というわけで、4 つの状態が現われています。$\omega_\pm$ は正に取っているので、上の 4 つの内の左側 2 つが正エネルギーで、右側が負エネルギーに対応します。普通ゼロ温度では遅延グリーン関数の極は正エネルギー、負エネルギーそれぞれ 1 つしかないはずなのに、これは 2 つ持っています。

何がどうなっているのか見ていきます。今は質量なしのフェルミオンで行っているので、カイラリティは不変で、温度項 (自己エネルギー) もそれを壊しません。そして、質量 0 で、質量殻上にのっているなら電子のスピノール ψ は

$$S^{-1}\psi=0$$

を満たすので

$$(A_0\gamma_0 + A_S\hat{p}_i\gamma^i)\psi = 0$$

これに $\gamma_5\gamma_0$ をかけると

$$(A_0\gamma_5 + A_S\hat{p}_i\gamma_5\gamma_0\gamma^i)\psi = 0$$

$$\gamma_5\psi = \frac{A_S}{A_0}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\psi \quad (\boldsymbol{\sigma} = \gamma_5\gamma_0\boldsymbol{\gamma}) \tag{8}$$

ここでの σ^i は

$$\sigma^i = -\frac{\epsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k}{2i}$$

とも書け、具体的にディラック・パウリ表現なんかを使えば σ^i はパウリ行列に対応することがすぐに分かります。つまり、右辺からはヘリシティ±1、左辺からはカイラリティ±1 が出てくるはずです。そうすると (8) での

$$\frac{A_S}{A_0}$$

部分の符号 χ は

$$\chi = \frac{chirality}{helicity}$$

これに対応します。

質量 0 のフェルミオンの性質として χ の符号は、正エネルギーを持っているものは $\chi = +1$、負エネルギーを持っているものは $\chi = -1$ とならなければいけないです (質量 0 のニュートリノでの右巻き、左巻きの関係を考えればいい)。そして、ここで求められた Σ はカイラル対称性を破っていないので (Σ と γ_5 が反交換する)、カイラル不変性を持ったままです。これは質量 0 のフェルミオンのグリーン関数 S は γ_5 に対して $\gamma_5 S = -S\gamma_5$ となっていることから出てきます。

現在の状況は (5)(7a)(7b) から、極は $A_0 = +A_S$ のときと、$A_0 = -A_S$ の場合があり、それぞれに正エネルギーと負エネルギーに対応する解を持っています。ここで変なことが起きているのに気が付くと思います。それは、$A_0 = -A$ の解 $\omega_-(\omega_- > 0)$ に対して $\chi = -1$ となるということです。ω_- は正エネルギーなので、これはゼロ温度では起きていなかった現象です。同様に、$A_0 = A_S$ では負エネルギーを持った解 $-\omega_-$ に対して、$\chi = +1$ の状態があり、これもゼロ温度では出てこないものです。このように有限温度において、χ の関係がゼロ温度の場合からひっくり返った状態が現われます。この新しいフェルミオンでの集団励起状態として現われたものを、正エネルギーでは plasmino、負エネルギーでは anti-plasmino と呼んでいます。この状態はカイラリティが絡んでいることから予想されるように、弱い相互作用が関わる場合に直接効いてきます。

まとめると、ゼロ温度と同じ正エネルギーで $\chi = +1$、負エネルギーで $\chi = -1$ という解、そして新しい集団励起として正エネルギーで $\chi = -1$、負エネルギーで $\chi = +1$ という全部で 4 つの解がでてきたということです。

・補足

正射影の話から、$\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{p}$ 方向へ射影したベクトル $\boldsymbol{k}'$ は

$$\boldsymbol{k}' = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{p}|^2}\boldsymbol{p} = \frac{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{p}|^2}\boldsymbol{p}\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p}\cos\theta$$

と与えられ、$\boldsymbol{k}$ を単位ベクトル $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ とすれば、単位ベクトル e_i の $\boldsymbol{p}$ 方向への射影は

$$\boldsymbol{e}' = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{k}|}\boldsymbol{p} = \frac{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{k}|}\boldsymbol{p}\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\cos\theta$$

射影した後と前のベクトルの角度積分を $p_i = (0, 0, p_z)$ として行います。この場合では p_i が z 軸上にいるので、$\boldsymbol{k}$ は位置ベクトルの形で

$$\boldsymbol{k} = (|\boldsymbol{k}|\sin\theta\cos\phi, |\boldsymbol{k}|\sin\theta\sin\phi, |\boldsymbol{k}|\cos\theta)$$

$\boldsymbol{k}'$ を $\boldsymbol{p}$ 上 (z 軸上) に射影したものは

$$\boldsymbol{k}' = \frac{|\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p}\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{k}|}{p_z}\cos\theta(0, 0, p_z)$$

これらを角度積分すると

$$\int d\Omega\boldsymbol{k} = \int d\Omega(|\boldsymbol{k}|\sin\theta\cos\phi, |\boldsymbol{k}|\sin\theta\sin\phi, |\boldsymbol{k}|\cos\theta) = 2\pi|\boldsymbol{k}|\int d\theta\sin\theta(0, 0, \cos\theta)$$

$$\int d\Omega\boldsymbol{k}' = \int d\Omega\frac{|\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{p}|}(0, 0, p_z)\cos\theta = 2\pi|\boldsymbol{k}|\int d\theta\sin\theta(0, 0, \cos\theta)$$

となって一致します。後は回転変換で一般化できます。