補足：角度積分

自己エネルギーの計算に現われる角度積分を実行する方法を示しておきます。
「光子の自己エネルギー」や「電子の自己エネルギー」では角度積分をちゃんとした方法で計算していませんでしたので、ここではちゃんと行います。といっても変なことをしないで出来ます。
表記で混乱するかもしれないので、定義をちゃんといっておくと、p^2 は $p_0^2 - \boldsymbol{p}^2$ で、このときの p_0 は $p_0 = i\omega_n$ です。

どのような積分が出てくるのかというと

$$K_1 = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \Big(\frac{1}{(p_0 - |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2} + \frac{1}{(p_0 + |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2}\Big)$$

$$K_2 = \int_0^\pi d\theta \sin\theta\cos\theta \Big(\frac{1}{(p_0 - |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2} + \frac{1}{(p_0 + |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2}\Big)$$

みたいなものです。他にも出てきますが、基本的に同じなのでこの二つを使います。ここでの E は

$$E = |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}| = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \boldsymbol{p}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos\theta}$$

のようにしています。
角度積分に移る前に、式変形の話をしておきます。松原振動数の和をとった後の形として

$$I = -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_F(E)}{4|\boldsymbol{k}|E} \Big(-\frac{1}{p_0 - |\boldsymbol{k}| - E} + \frac{1}{p_0 + |\boldsymbol{k}| + E} + \frac{1}{p_0 + |\boldsymbol{k}| - E} - \frac{1}{p_0 - |\boldsymbol{k}| + E}\Big)$$

こんな形のものが現われたりします (電子の自己エネルギーの計算で実際に出てくるものです)。このフェルミオンの分布関数にいる角度依存性をなくすために、$\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}$ に置き換えて、$-\boldsymbol{k}'$ にします。そうすれば、$E = |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}|$ は $|\boldsymbol{k}'|$ になるので ($\boldsymbol{k}'$ は $\boldsymbol{k}$ と書きます)

$$\begin{aligned}
I &= -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_F(|\boldsymbol{k}|)}{4|\boldsymbol{k}|E} \Big(-\frac{1}{p_0 - E - |\boldsymbol{k}|} + \frac{1}{p_0 + E + |\boldsymbol{k}|} + \frac{1}{p_0 + E - |\boldsymbol{k}|} - \frac{1}{p_0 - E + |\boldsymbol{k}|}\Big) \\
&= -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4|\boldsymbol{k}|E} n_F(|\boldsymbol{k}|) \Big(\frac{-2E}{(p_0 - |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2} + \frac{-2E}{(p_0 + |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2}\Big) \\
&= e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4|\boldsymbol{k}|} 2n_F(|\boldsymbol{k}|) \Big(\frac{1}{(p_0 - |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2} + \frac{1}{(p_0 + |\boldsymbol{k}|)^2 - E^2}\Big)
\end{aligned}$$

となって、分布関数から角度依存性をなくせます。このように変形できるのは 3 次元の全空間積分がいるためだということには注意してください。

K_1 と K_2 の角度積分を行っていきます。このとき、p_0 は純虚数 ($i\omega_n$) であることに注意してください。K_1 は

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \Big(\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|)^2-E^2}+\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|)^2-E^2}\Big)\\
&= \int_{p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}^{p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|} dx \frac{1}{-2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\Big(\frac{1}{x-2p_0|\boldsymbol{k}|}+\frac{1}{x+2p_0|\boldsymbol{k}|}\Big) \quad (x=p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos\theta)\\
&= \int dx \frac{1}{-2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\Big(\frac{x+2p_0|\boldsymbol{k}|}{x^2-4p_0^2|\boldsymbol{k}|^2}+\frac{x-2p_0|\boldsymbol{k}|}{x^2-4p_0^2|\boldsymbol{k}|^2}\Big)\\
&= \int dx \frac{1}{-2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\frac{2x}{x^2-4p_0^2|\boldsymbol{k}|^2}\\
&= \frac{1}{2}\int dx^2 \frac{1}{-2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\frac{1}{x^2+y^4} \quad (y^4=-4p_0^2|\boldsymbol{k}|^2=4\omega_n^2|\boldsymbol{k}|^2)\\
&= \frac{1}{-2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\log|x^2+y^4|\\
&= \frac{1}{-2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\log\Big|\frac{(p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|)^2-4p_0^2|\boldsymbol{k}|^2}{(p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|)^2-4p_0^2|\boldsymbol{k}|^2}\Big|
\end{aligned}
$$

K_2 はこれに $\cos\theta$ がくっついているだけなので、同様にしていくことで

$$
\begin{aligned}
K_2 =& \int_0^\pi d\theta \sin\theta\cos\theta \Big(\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|)^2-E^2}+\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|)^2-E^2}\Big)\\
=& \int dx \frac{1}{-2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\frac{x-p^2}{2|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{p}|}\frac{2x}{x^2+y^4}\\
=& \int dx \frac{2}{-4|\boldsymbol{k}|^2|\boldsymbol{p}|^2}\Big(\frac{x^2}{x^2+y^4}-\frac{p^2x}{x^2+y^4}\Big)\\
=& \frac{2}{-4|\boldsymbol{k}|^2|\boldsymbol{p}|^2}\Big(\int dx\frac{x^2}{x^2+y^4}-\frac{1}{2}\int dx^2\frac{p^2}{x^2+y^4}\Big)\\
=& \frac{2}{-4|\boldsymbol{k}|^2|\boldsymbol{p}|^2}\Big[x-y^2\arctan\frac{x}{y^2}-\frac{p^2}{2}\log|x^2+y^4|\Big]\\
=& \frac{2}{-4|\boldsymbol{k}|^2|\boldsymbol{p}|^2}\Big[p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|-p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\\
&\quad -y^2\Big(\arctan\frac{p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{y^2}-\arctan\frac{p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{y^2}\Big)-\frac{p^2}{2}\log\Big|\frac{(p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|)^2+y^4}{(p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|)^2+y^4}\Big|\Big]\\
=& \frac{2}{-4|\boldsymbol{k}|^2|\boldsymbol{p}|^2}\Big[-4|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|-y^2\Big(\arctan\frac{p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{y^2}-\arctan\frac{p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{y^2}\Big)\\
&\quad -\frac{p^2}{2}\log\Big|\frac{(p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|)^2+y^4}{(p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|)^2+y^4}\Big|\Big]
\end{aligned}
$$

これで角度積分は終わりです。ついでに、T^2 のオーダを出しておきます。

高温極限を取った時に T^2 のオーダを出すのは arctan の項です。角度積分部分だけからは分からないので、実際に現われる $|\boldsymbol{k}|$ 積分の形を使うことにします。例えば

$$
\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|}{\omega_n}\Big(\arctan\frac{p^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{2\omega_n|\boldsymbol{k}|}-\arctan\frac{p^2+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{2\omega_n|\boldsymbol{k}|}\Big)n_B(|\boldsymbol{k}|)
$$

このようにして出てきます。簡単にするために、$p^2=0$ という特殊な状況に設定すると

$$\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|}{\omega_n}(-\arctan\frac{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{2\omega_n|\boldsymbol{k}|}-\arctan\frac{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|}{2\omega_n|\boldsymbol{k}|})n_B(|\boldsymbol{k}|)$$
$$=-2\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|}{\omega_n}n_B(|\boldsymbol{k}|)\arctan\frac{|\boldsymbol{p}|}{\omega_n}$$

となり、$|\boldsymbol{k}|n_B(|\boldsymbol{k}|)$ の積分は T^2 のオーダなので、この部分が T^2 のオーダとなります。さらに、arctan を変形すると

$$i\arctan\frac{|\boldsymbol{p}|}{\omega_n}=\frac{1}{2}\log\frac{i-|\boldsymbol{p}|/\omega_n}{i+|\boldsymbol{p}|/\omega_n}.$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{p}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{p}|}$$

そして、解析接続することで

$$-2\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n}n_B(|\boldsymbol{k}|)i\arctan\frac{|\boldsymbol{p}|}{\omega_n}$$
$$\Rightarrow -2\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|}{p_0'}n_B(|\boldsymbol{k}|)\frac{1}{2}\log\frac{p_0'-|\boldsymbol{p}|}{p_0'+|\boldsymbol{p}|}=-\frac{\pi^2T^2}{6}\frac{1}{p_0'}\log\frac{p_0'-|\boldsymbol{p}|}{p_0'+|\boldsymbol{p}|}$$

これは HTL 近似を取った時の形と同じになっていることが分かります。なので、$p^2=0$ はちょうど高温極限になっています (解析接続する前に $p^2=0$ としていますが、結局同じになります)。

最後に、高温極限を取ったときに現われる T のオーダがなんなのかを見積もる方法があることを言っておきます。それは、積分の発散のオーダを見るというもので、高温極限を取った時の T のオーダは分布関数を失くした時の紫外発散のオーダに対応していることがほとんどとなっています。ほとんどという表現にしているのは、違う場合があるためです。簡単にこのことを説明しておきます。

Weldon は運動量積分の紫外発散のオーダと、高温極限での T のオーダが対応していることを示し、それはほとんどの場合で当てはまっていました (phys.rev.D 26,2789 に載っているらしい)。そして、Weldon はフェルミオンの自己エネルギーのゲージ固定項での紫外発散が 1 次発散であったために、温度の寄与も T だろうと予想していました。しかし、Wang(hep-ph/0406002v2) による高温極限の計算から $\log T$ のオーダの寄与であることが求められました。なので、ゲージ固定項の高温でのオーダが紫外発散のオーダがずれています。このためにほとんどという表現を使いました。また、このようにゲージ固定項からの寄与が T^2 でないために、電子の自己エネルギーは T^2 のオーダでゲージ不変な量となり、HTL 近似がゲージ不変になっています。