補足：ゲージ固定項の計算

電子の自己エネルギーをゲージ固定項を含めて計算するときに現れる和の計算を行います。結局まともに 3 次元積分を実行することはできないので、出てくる和だけを計算します。

ゲージ固定項も含めた自己エネルギーは

$$
\begin{aligned}
-\Sigma(p_0 = i\omega_n, \boldsymbol{p}) &= e^2 T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{-1}{(p-k)_\alpha \gamma^\alpha - m} \frac{1}{k^2} (g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2})\gamma^\nu \\
\Sigma(p_0, \boldsymbol{p}) &= e^2 T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \big[\gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{(p-k)_\alpha \gamma^\alpha - m} \frac{1}{k^2}\gamma^\nu + (\alpha - 1)\gamma^\mu \frac{1}{(p-k)_\alpha \gamma^\alpha - m} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}\gamma^\nu\big] \\
&= \Sigma_{fey} + (\alpha - 1)\Sigma_{gauge}
\end{aligned}
$$

ゲージ固定項のガンマ行列を計算するには

$$
\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu = \gamma^\mu (2g^{\alpha\nu} - \gamma^\nu \gamma^\alpha) = 2\gamma^\mu g^{\alpha\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha
$$

を使えばいいので

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{gauge} &= e^2 T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{1}{(p-k)_\alpha \gamma^\alpha - m} \frac{1}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \gamma^\nu \\
&= e^2 T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{(p-k)_\alpha \gamma^\alpha + m}{(p-k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \gamma^\nu \\
&= e^2 T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(p-k)_\alpha k_\mu k_\nu (2\gamma^\mu g^{\alpha\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha) + k^2 m}{(p-k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \\
&= e^2 T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\mu \gamma^\mu k \cdot (p-k) - k^2 (p-k)_\alpha \gamma^\alpha + k^2 m}{(p-k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \\
&= e^2 T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Big[\frac{2k_\mu \gamma^\mu k \cdot (p-k)}{[(p-k)^2 - m^2]k^4} + \frac{-(p-k)_\alpha \gamma^\alpha + m}{(p-k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2}\Big]
\end{aligned}
$$

この形から予想できるように、ボソン-ボソン-フェルミオンの組み合わせが出てきます。つまり、和の計算として

$$
T\sum J_1 = T\sum \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]k^4} = T\sum \frac{1}{[(p_0 - k_0)^2 - (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^2 - m^2]k^4}
$$

$$
T\sum J_2 = T\sum \frac{k_0}{[(p_0 - k_0)^2 - (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^2 - m^2]k^4}
$$

というのが出てきます (k_0 に対しての和)。通常と違うのは 2 つのボソンの温度グリーン関数が同じ運動量を持っているという点です。J_1 を変形すると

$$
\begin{aligned}
J_1 =& \frac{1}{[(p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2-m^2](k_0^2-\boldsymbol{k}^2)^2} \\
=& \frac{1}{[(p_0-k_0)^2-E^2](k_0^2-\boldsymbol{k}^2)^2} \qquad (E^2=(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2+m^2) \\
=& \frac{1}{[(p_0-k_0)-E][(p_0-k_0)+E](k_0-|\boldsymbol{k}|)(k_0+|\boldsymbol{k}|)(k_0-|\boldsymbol{k}|)(k_0+|\boldsymbol{k}|)} \\
=& \frac{1}{4|\boldsymbol{k}|^2}\Big(\frac{1}{k_0-|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{k_0+|\boldsymbol{k}|}\Big)\Big(\frac{1}{k_0-|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{k_0+|\boldsymbol{k}|}\Big)\frac{1}{2E}\Big(\frac{1}{(p_0-k_0)-E}-\frac{1}{(p_0-k_0)+E}\Big) \\
=& \frac{1}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\Big(\frac{1}{k_0-|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{k_0+|\boldsymbol{k}|}\Big)\Big(\frac{1}{k_0-|\boldsymbol{k}|}-\frac{1}{k_0+|\boldsymbol{k}|}\Big)\Big(\frac{1}{(p_0-k_0)-E}-\frac{1}{(p_0-k_0)+E}\Big) \\
=& \frac{1}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\Big(\frac{1}{(k_0-|\boldsymbol{k}|)^2}+\frac{1}{(k_0+|\boldsymbol{k}|)^2}-\frac{2}{(k_0-|\boldsymbol{k}|)(k_0+|\boldsymbol{k}|)}\Big)\Big(\frac{1}{(p_0-k_0)-E}-\frac{1}{(p_0-k_0)+E}\Big) \\
=& \frac{1}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\Big(\frac{1}{(k_0-|\boldsymbol{k}|)^2}\frac{1}{(p_0-k_0)-E}-\frac{1}{(k_0-|\boldsymbol{k}|)^2}\frac{1}{(p_0-k_0)+E} \\
&\qquad +\frac{1}{(k_0+|\boldsymbol{k}|)^2}\frac{1}{(p_0-k_0)-E}-\frac{1}{(k_0+|\boldsymbol{k}|)^2}\frac{1}{(p_0-k_0)+E} \\
&\qquad -\frac{2}{(k_0-|\boldsymbol{k}|)(k_0+|\boldsymbol{k}|)}\frac{1}{(p_0-k_0)-E}+\frac{2}{(k_0-|\boldsymbol{k}|)(k_0+|\boldsymbol{k}|)}\frac{1}{(p_0-k_0)+E}\Big)
\end{aligned}
$$

これを ±1 の和を使って書くと $(s_1,s_2,s_3=\pm1)$

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\sum_{s_1,s_2,s_3}\frac{s_1s_2s_3}{(k_0-s_1|\boldsymbol{k}|)(k_0-s_2|\boldsymbol{k}|)}\frac{1}{(p_0-k_0)-s_3E} \\
&= \sum_{s_1,s_2,s_3}\frac{s_1s_2s_3}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1}{(k_0-s_1|\boldsymbol{k}|)}\frac{1}{(p_0-k_0)-s_3E+k_0-s_2|\boldsymbol{k}|}\Big(\frac{1}{k_0-s_2|\boldsymbol{k}|}+\frac{1}{(p_0-k_0)-s_3E}\Big) \\
&= \sum_{s_1,s_2,s_3}\frac{s_1s_2s_3}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1}{(k_0-s_1|\boldsymbol{k}|)}\frac{1}{p_0-s_3E-s_2|\boldsymbol{k}|}\Big(\frac{1}{k_0-s_2|\boldsymbol{k}|}+\frac{1}{(p_0-k_0)-s_3E}\Big) \\
&= \sum_{s_1,s_2,s_3}\frac{s_1s_2s_3}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1}{p_0-s_2|\boldsymbol{k}|-s_3E}\Big(\frac{1}{k_0-s_1|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{k_0-s_2|\boldsymbol{k}|}+\frac{1}{k_0-s_1|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{(p_0-k_0)-s_3E}\Big)
\end{aligned}
$$

そうすると

$$
\sum_{s_1,s_2}T\sum_m\frac{s_1s_2}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1}{k_0-s_1|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{k_0-s_2|\boldsymbol{k}|}=T\sum_m(-D(\omega_m,|\boldsymbol{k}|))(-D(\omega_m,|\boldsymbol{k}|))=T\sum_m D(\omega_m,|\boldsymbol{k}|)D(\omega_m,|\boldsymbol{k}|)
$$

$$
\sum_{s_1,s_3}T\sum_m\frac{s_1s_3}{8E|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1}{k_0-s_1|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{(p_0-k_0)-s_3E}=T\sum_m D(\omega_m,|\boldsymbol{k}|)S_F(\omega_n-\omega_m,E)
$$

という形の和が必要になります (D と S_F はボソンとフェルミオンの温度グリーン関数)。2 番目はただのボソン-フェルミオンの和なので、結果は分かっています。問題なのが、1 番目の方で、こいつは同じ運動量を持ったボソン-ボソンの和です。

和を取る形は

$$I(0) = T\sum_m D(\omega_m, E)D(\omega_m, E) = T\sum_m \frac{-1}{k_0^2 - E^2}\frac{-1}{k_0^2 - E^2} \qquad (k_0 = i\omega_m = 2\pi i T m)$$

このようになっており、これを積分に変える方法で計算していきます (E としていますが、上での E とは無関係です)。

$$\begin{aligned}
I(0) =& T\sum_m \frac{1}{k_0^2 - E^2}\frac{1}{k_0^2 - E^2} \\
=& T\sum_m \frac{1}{(k_0 - E)(k_0 + E)}\frac{1}{(k_0 - E)(k_0 + E)} \\
=& T\sum_m \frac{1}{4E^2}\Big(\frac{1}{k_0 - E} - \frac{1}{k_0 + E}\Big)^2 \\
=& T\sum_m \frac{1}{4E^2}\Big(\frac{1}{(k_0 - E)^2} + \frac{1}{(k_0 + E)^2} - \frac{2}{(k_0 - E)(k_0 + E)}\Big) \\
=& \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4E^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(k_0 - E)^2} + \frac{1}{(k_0 + E)^2} - \frac{2}{(k_0 - E)(k_0 + E)} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(-k_0 - E)^2} + \frac{1}{(-k_0 + E)^2} - \frac{2}{(-k_0 - E)(-k_0 + E)}\Big) \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4E^2}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \Big(\frac{1}{(k_0 - E)^2} + \frac{1}{(k_0 + E)^2} - \frac{2}{(k_0 - E)(k_0 + E)} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(-k_0 - E)^2} + \frac{1}{(-k_0 + E)^2} - \frac{2}{(-k_0 - E)(-k_0 + E)}\Big)\frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \\
=& \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4E^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \Big(\frac{1}{(k_0 - E)^2} + \frac{1}{(k_0 + E)^2} - \frac{2}{(k_0 - E)(k_0 + E)}\Big) \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\frac{2}{4E^2}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \Big(\frac{1}{(k_0 - E)^2} + \frac{1}{(k_0 + E)^2} - \frac{2}{(k_0 - E)(k_0 + E)}\Big)\frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}
\end{aligned}$$

有限温度部分は留数定理によって簡単に計算できて

$$\begin{aligned}
I_T(0) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2E^2}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 \big(\frac{1}{(k_0 - E)^2} + \frac{1}{(k_0 + E)^2} - \frac{2}{(k_0 - E)(k_0 + E)}\big)\frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \\
&= -\frac{1}{2E^2}\Big(\lim_{z\to E}\frac{d}{dz}\big((z - E)^2\frac{1}{(z - E)^2}\frac{1}{e^{\beta z} - 1}\big) - \frac{2}{E + E}\frac{1}{e^{\beta E} - 1}\Big) \\
&= -\frac{1}{2E^2}\big(-\frac{\beta e^{\beta E}}{(e^{\beta z} - 1)^2} - \frac{1}{E}\frac{1}{e^{\beta E} - 1}\big) \\
&= -\frac{1}{4E^2}\big(-\frac{2\beta e^{\beta E}}{(e^{\beta z} - 1)^2} - 2n_B(E)\frac{1}{E}\big)
\end{aligned}$$

途中で 2 位の極のときの留数を求める式

$$\mathrm{Res}f(a)=\lim_{z\to a}\frac{d}{dz}[(z-a)^2f(z)]$$

を使っています。ゼロ温度部分も留数定理によって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4E^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}dk_0(\frac{1}{(k_0-E)^2}+\frac{1}{(k_0+E)^2}-\frac{2}{(k_0-E)(k_0+E)})\\
&=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4E^2}i\int_{-\infty}^{\infty}dk_0(-\frac{2}{-k_0^2-E^2})\\
&=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4E^2}i\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\frac{2}{k_0^2+E^2}\\
&=\frac{1}{4E^2}i(k_0-iE)\frac{2}{(k_0+iE)(k_0-iE)}\\
&=\frac{1}{4E^2}i(\frac{1}{iE})\\
&=\frac{1}{4E^2}\frac{1}{E}
\end{aligned}$$

最初の第一項と第二項は 0 になるので一気に無視しています。途中でわざわざ解析接続しているのは、ジョルダンの補題との対応を一応見るためで、上半円を経路にとっています (解析接続しなくても右半円を時計周りに取ればいい)。

よって同じ運動量を持つボソン-ボソンの和は

$$I(0)=-\frac{1}{4E^2}(-\frac{1}{E}-2n_B(E)\frac{1}{E}-\frac{2\beta e^{\beta E}}{(e^{\beta z}-1)^2})=-\frac{1}{4E^2}(-(1+2n_B(E)\frac{1}{E}-\frac{2\beta e^{\beta E}}{(e^{\beta z}-1)^2})$$

ついでに ±1 による和で書いた形に持っていきます。そのために

$$\frac{n_B(E_1)-n_B(E_2)}{E_1-E_2}$$

というのを考えます。このとき、$E_1=E_2$ だと分母が 0 になるので成立しなくなります。なので、$E_2=E_1+\epsilon$ のように微小量動かして展開してみると

$$\begin{aligned}
\frac{n_B(E_1)-n_B(E_2)}{E_1-E_2} &= \Big(n_B(E_1)-n_B(E_1)-\frac{\partial n_B(E_1)}{\partial E_1}\epsilon-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n_B(E_1)}{\partial E_1^2}\epsilon^2-\cdots\Big)\frac{1}{-\epsilon}\\
&= \frac{\partial n_B(E_1)}{\partial E_1}\\
&= \frac{\partial}{\partial E_1}\frac{1}{e^{\beta E_1}-1}\\
&= -\frac{\beta e^{\beta E_1}}{(e^{\beta E_1}-1)^2}
\end{aligned}$$

となることが分かります。これを使うことで

$$
\begin{aligned}
I(0) &= -\frac{1}{4E^2}\big(-(1+2n_B(E))\frac{1}{E}+2\frac{n_B(E_1)-n_B(E_2)}{E_1-E_2}\big) \\
&= -\frac{1}{4E^2}\big[-(1+2n_B(E))\frac{1}{E}+\big(n_B(E_1)-n_B(E_2)\big)\big(\frac{1}{E_1-E_2}-\frac{1}{-E_1+E_2}\big)\big]
\end{aligned}
$$

で、第一項もこれに合わせるように変形させると

$$
I(0)=-\frac{1}{4E^2}\Big[-\Big(1+n_B(E_1)+n_B(E_2)\Big)\Big(\frac{1}{E_1+E_2}-\frac{1}{-E_1-E_2}\Big)+\Big(n_B(E_1)-n_B(E_2)\Big)\Big(\frac{1}{E_1-E_2}-\frac{1}{-E_1+E_2}\Big)\Big]
$$

E_1, E_2 に対する符号の並びが、明らかに Saclay 法で求められるボソン-ボソンでの形と同じなので

$$
I(0)=-\sum_{s_1,s_2}\frac{s_1s_2}{4E^2}\frac{1}{-s_1E_1-s_2E_2}(1+n_B(s_1E_1)+n_B(s_2E_2))
$$

と書くことができます。これを「頂点〜QED〜」と同じように J_1 に入れれば和の計算はできます。
　入れてみれば

$$
\begin{aligned}
T\sum J_1 = &\sum_{s_1,s_2,s_3}\frac{s_2s_3}{2E}\frac{1}{p_0-s_2|\boldsymbol{k}|-s_3E}\Big(-\frac{s_1}{4|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1+n_B(s_1|\boldsymbol{k}|)+n_B(s_2|\boldsymbol{k}|)}{-s_1|\boldsymbol{k}|-s_2|\boldsymbol{k}|}\Big) \\
&+\sum_{s_1,s_2,s_3}\frac{s_2s_3}{2|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{p_0-s_2|\boldsymbol{k}|-s_3E}\Big(-\frac{s_1}{4|\boldsymbol{k}|E}\frac{1+n_B(s_1|\boldsymbol{k}|)-n_F(s_3E)}{i\omega_n-s_1|\boldsymbol{k}|-s_3E}\Big) \\
=&L_1+L_2
\end{aligned}
$$

単純に展開していくだけなので、一気に飛べば

$$
L_1=\frac{1}{8|\boldsymbol{k}|^2E}\Big(\frac{1+2n_B(|\boldsymbol{k}|)}{2|\boldsymbol{k}|}+\frac{\beta e^{\beta|\boldsymbol{k}|}}{(e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1)^2}\Big)\Big(\frac{1}{p_0-|\boldsymbol{k}|-E}-\frac{1}{p_0+|\boldsymbol{k}|+E}-\frac{1}{p_0-|\boldsymbol{k}|+E}+\frac{1}{p_0+|\boldsymbol{k}|-E}\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
L_2=\frac{1}{8|\boldsymbol{k}|^2E}\Big[&-\Big(1+n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(E)\Big)\Big(\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|-E)^2}+\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|+E)^2} \\
&\qquad+\frac{-1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|-E)(p_0+|\boldsymbol{k}|-E)}+\frac{-1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|+E)(p_0-|\boldsymbol{k}|+E)}\Big) \\
&-\Big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E)\Big)\Big(\frac{-1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|-E)^2}+\frac{-1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|+E)^2} \\
&\qquad+\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|-E)(p_0+|\boldsymbol{k}|-E)}+\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|+E)(p_0-|\boldsymbol{k}|+E)}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

もう一つの分子に k_0 がある

$$
T\sum_m\frac{k_0}{k_0^2-E^2}\frac{1}{k_0^2-E^2}
$$

この場合は $k_0 = i\omega_m = 2\pi i T m$ なので、和を $m = -\infty \sim +\infty$ まで対称に取れば、分母には k_0^2 しかいないことから、結局打ち消しあって 0 になります。しかし、J_2 はこれが消えるからといって 0 にはなりません。結果だけを示せば

$$
\begin{aligned}
T\sum J_2 =& T\sum \frac{k_0}{[(p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2-m^2]k^4} \\
=& \frac{1}{8E|\boldsymbol{k}|}\Big[\Big(\frac{1+2n_B(|\boldsymbol{k}|)}{2|\boldsymbol{k}|}-\frac{\beta e^{\beta|\boldsymbol{k}|}}{(e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1)^2}\Big)\Big(\frac{-1}{p_0-|\boldsymbol{k}|-E}+\frac{-1}{p_0+|\boldsymbol{k}|+E}+\frac{1}{p_0-|\boldsymbol{k}|+E}+\frac{1}{p_0+|\boldsymbol{k}|-E}\Big) \\
&-\Big(1+n_B(|\boldsymbol{k}|)-n_F(E)\Big)\Big(\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|-E)^2}-\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|+E)^2} \\
&\qquad+\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|+E)(p_0-|\boldsymbol{k}|+E)}-\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|-E)(p_0+|\boldsymbol{k}|-E)}\Big) \\
&-\Big(n_B(|\boldsymbol{k}|)+n_F(E)\Big)\Big(-\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|+E)^2}+\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|-E)^2} \\
&\qquad+\frac{1}{(p_0+|\boldsymbol{k}|+E)(p_0-|\boldsymbol{k}|+E)}-\frac{1}{(p_0-|\boldsymbol{k}|-E)(p_0+|\boldsymbol{k}|-E)}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

後はこれらの結果を自己エネルギーの式に入れればいいだけです。そして、3 次元運動量積分が厳密に行えないという目に合うので、高温近似かなんかを取ることになります。