光子の自己エネルギー

有限温度での光子の自己エネルギーを計算します。2 点相関関数に対する摂動展開はゼロ温度の場合と同じなので、ゼロ温度で真空偏極と呼んでいた図と同じものが現われます。これに有限温度でのファインマン則を使えば、有限温度版の真空偏極の図が計算できます。しかし、有限温度からの寄与は真空偏極と呼ぶようなものではないので、自己エネルギーと言うことにします。また、ゼロ温度部分での発散はゼロ温度の場合と同じ方法で除去出来るので、ゼロ温度部分は無視していきます。
ここではベクトルの累乗の表記として $|\boldsymbol{p}|^2$ と $\boldsymbol{p}^2$ の両方が出てくるように書いてしまっていますが、同じ意味です(前後の流れと気分で違っているだけです)。
まともに計算せずに hard thermal loop 近似を用いることにします。
　光子の自己エネルギー $\Pi^{\mu\nu}$ は

$$(D^{\mu\nu})^{-1}=(D_0^{\mu\nu})^{-1}+\Pi^{\mu\nu}$$

のように定義します ($D_0^{\mu\nu}$ は最低次、$D^{\mu\nu}$ は厳密な光子の温度グリーン関数)。このために、光子の自己エネルギーは

$$-\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k})=-(-e)^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{tr}\Big(\gamma_\mu\frac{-1}{\not{p}-m}\gamma_\nu\frac{-1}{\not{p}-\not{k}-m}\Big)$$

$$k_\mu=(k_0,k_i)=(i\omega_n=2i\pi nT,k_i)\ ,\ p_\mu=(i\omega_l=2i\pi T(l+\frac{1}{2}),p_i)$$

このように書けます (k_μ はボソン、p_μ はフェルミオンの部分に対応します)。注意として、計量はミンコフスキー空間のままなので、ユークリッド空間での計量ではないです。ただし、時間成分は i を含めた松原振動数になっています。$-\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k})$ となるのは場の量子論での「自己エネルギーと頂点関数」での自己エネルギーの入り方

$$G^{-1}=G_0^{-1}(p)-\frac{\Sigma(p)}{i}$$

と比べれば分かると思います。
　変形させて

$$\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k})=e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{tr}[\gamma_\mu(\not{p}+m)\gamma_\nu(\not{p}-\not{k}]}{(p^2-m^2)((p-k)^2-m^2)}$$

トレースは

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[\gamma_\mu(p^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\nu((p-k)^\beta\gamma_\beta+m)]\\&=\mathrm{tr}[p^\alpha(p-k)_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta+m(p-k)^\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta+mp^\alpha\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu+m^2\gamma_\mu\gamma_\nu]\\&=\mathrm{tr}[p^\alpha(p-k)_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta+m^2\gamma_\mu\gamma_\nu]\\&=4(p_\mu(p-k)_\nu+p_\nu(p-k)_\mu-p\cdot(p-k)g_{\mu\nu})+4m^2\end{aligned}$$

なので

$$\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k}) = e^2 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4(p_\mu(p-k)_\nu + p_\nu(p-k)_\mu - p\cdot(p-k)g_{\mu\nu}) + 4m^2}{(p^2-m^2)((p-k)^2-m^2)}$$

これの和を計算して、三次元積分を行います。しかし、和を実行した後に三次元積分をしようと思っても、高温極限にしないと実行できないので、最初から近似してしまいます ($|\boldsymbol{p}|$ 積分以外までは近似なしで実行できる)。

高温極限なので、フェルミオンの質量は $m \ll T$ として無視します。そして、和の計算が終われば、外線の松原振動数は解析接続することができます。なので、$i\omega_n$ は連続的な光子のエネルギーに対応する k_0' だとできます。このことから、高温極限というのは $k_0', |\boldsymbol{k}| \ll T$ でもあるとすることになります (分配関数の計算では外線がいなかったので高温極限は $m \ll T$ で行っていた)。これが高温極限の設定なんですが、これと同じ結果を出す近似をここで持ち込みます。

温度が十分高く、$T \gg |\boldsymbol{k}|$ となっているときに、$|\boldsymbol{p}|$ 積分において $|\boldsymbol{p}| \sim T$ という領域からの寄与を拾うために、$|\boldsymbol{p}| \gg |\boldsymbol{k}|$ のように考えることにします。この近似 ($|\boldsymbol{p}|$ に比べて $|\boldsymbol{k}|$ が十分小さい) によって、計算の途中で出てくるものがどう近似されるのかを先に出しておきます。この後に

$$E_p^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \ ,\ E_q^2 = \boldsymbol{q}^2 + m^2 \ ,\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}$$

というのが出てきます。質量は無視するので

$$E_p \simeq |\boldsymbol{p}| \tag{1a}$$

となり、E_q は

$$\begin{aligned} E_q \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}| &= \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{k}^2 - 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{k}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos\theta} \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta \end{aligned} \tag{1b}$$

となります。これによって、フェルミオンの分布関数 $n_F(E_q)$ は

$$n_F(E_q) \simeq n_F(|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta) \simeq n_F(|\boldsymbol{p}|) - \frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta \tag{1c}$$

このように近似できます。

「和の計算〜Saclay 法〜」で求められたように、和をとった後に出てくる分母の形というのは大体決まっていて、それらに対しても近似を使うと

$$\left(\begin{array}{l} i\omega_n - E_p - E_q \simeq i\omega_n - E_p - |\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta = i\omega_n - 2|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta \\ i\omega_n + E_p + E_q \simeq i\omega_n + E_p + |\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta = i\omega_n + 2|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta \\ i\omega_n - E_p + E_q \simeq i\omega_n - E_p + |\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta = i\omega_n - |\boldsymbol{k}|\cos\theta \\ i\omega_n + E_p - E_q \simeq i\omega_n + E_p - |\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta = i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta \end{array} \right. \tag{1d}$$

となります。この近似による結果は高温極限をとったときの T^2 のオーダと一致します。つまり、高温極限 $k_0', |\boldsymbol{k}| \ll T$ というのは、$|\boldsymbol{p}| \sim T$ での積分と対応することになっています。細かく言うと、$|\boldsymbol{p}|$ の領域を $|\boldsymbol{k}| \ll |\boldsymbol{p}'| \ll T$ として区切ったとき、$|\boldsymbol{p}|$ が $|\boldsymbol{p}'| < |\boldsymbol{p}|$ となる領域で T^2 の寄与が現われるので、この領域を拾うようにしたのがこの近似です。

このように、積分の運動量を $|\boldsymbol{p}| \sim T$ のように設定し近似する方法を hard thermal loop(HTL) 近似と呼びます (日本語だと硬熱ループ近似と言ったりもしています)。$|\boldsymbol{p}| \sim T$ の場合での運動量を hard momenta と言い、結合定数をくっつけた $|\boldsymbol{p}| \sim eT$ の場合を soft momenta と言います。高温極限で出てくるのは T^2 のオーダなので、HTL 近似は T^2 のオーダが出てくるように近似したものだとも言えます。注意としては、外線の 0 成分 k_0 が温度に比べて小さいとできるのは、解析接続が可能な状況になってからです。つまり、和の計算を行った後に k_0 は温度に比べて小さいと取ることができるようになります。

途中で出てくるフェルミオンの分布関数を含んだ積分としては

$$\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|n_F(|\boldsymbol{p}|) = \frac{\pi^2T^2}{12}$$

$$\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^2\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|} = \frac{-\pi^2T^2}{6}$$

二番目の導出は下で出てきた時に行っています。

HTL 近似を使って計算をしていきます。自己エネルギーの最初の形

$$\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k}) = e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{4(p_\mu(p-k)_\nu + p_\nu(p-k)_\mu - p\cdot(p-k)g_{\mu\nu}) + 4m^2}{(p^2-m^2)((p-k)^2-m^2)}$$

に対してまずは、フェルミオンの質量を消します

$$\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k}) \simeq e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{4(p_\mu(p-k)_\nu + p_\nu(p-k)_\mu - p\cdot(p-k)g_{\mu\nu})}{p^2(p-k)^2}$$

そして、分子にいる外線の運動量 k_μ を無視して

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k}) &\simeq e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{4(p_\mu p_\nu + p_\nu p_\mu - p\cdot p g_{\mu\nu})}{p^2(p-k)^2} \\
&= e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{8p_\mu p_\nu - 4p^2g_{\mu\nu}}{p^2(p-k)^2} \\
&= e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{8p_\mu p_\nu}{p^2(p-k)^2} - \frac{4g_{\mu\nu}}{(p-k)^2}) \\
&= A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

分子にいる k_0 は和の計算に絡んでこないので、和の計算後に小さな寄与しか与えないと考えて最初から無視します。これの $B_{\mu\nu}$ は単純に計算できて

$$
\begin{aligned}
B_{\mu\nu} =& 4e^2 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{(p-k)^2} \\
=& 4e^2 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{(p_0-k_0)^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2} \\
=& 4g_{\mu\nu}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p_0-k_0)^2-\boldsymbol{q}^2} \\
=& 4g_{\mu\nu}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{1}{2} \big(\frac{1}{(p_0-k_0)^2-\boldsymbol{q}^2} + \frac{1}{(p_0+k_0)^2-\boldsymbol{q}^2} \big) \\
& \qquad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \big(\frac{1}{(p_0-k_0)^2-\boldsymbol{q}^2} + \frac{1}{(p_0+k_0)^2-\boldsymbol{q}^2} \big) n_F(p_0) \Big] \\
\Rightarrow & -4g_{\mu\nu}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \big(\frac{1}{(p_0-k_0)^2-\boldsymbol{q}^2} + \frac{1}{(p_0+k_0)^2-\boldsymbol{q}^2} \big) n_F(p_0)
\end{aligned}
$$

矢印はゼロ温度部分を無視することを表わしています。これ以降も温度依存していない項 (分布関数を含まない項) は無視していきます。後は留数定理によって、右半円の極を拾うようにすれば ($k_0 = i\omega_l$ なので、虚軸方向に動かすだけで実軸方向には値を動かさない)

$$
\begin{aligned}
B_{\mu\nu} =& -4g_{\mu\nu}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \\
& \times \frac{1}{2|\boldsymbol{q}|} \Big[\big(\frac{1}{p_0-k_0-|\boldsymbol{q}|} - \frac{1}{p_0-k_0+|\boldsymbol{q}|} \big) + \big(\frac{1}{p_0+k_0-|\boldsymbol{q}|} - \frac{1}{p_0+k_0+|\boldsymbol{q}|} \big) \Big] n_F(p_0) \\
=& -4g_{\mu\nu}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\boldsymbol{q}|} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \big(\frac{1}{p_0-(k_0+|\boldsymbol{q}|)} + \frac{1}{p_0-(-k_0+|\boldsymbol{q}|)} \big) n_F(p_0) \\
=& 4g_{\mu\nu}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\boldsymbol{q}|} \big[n_F(k_0+|\boldsymbol{q}|) + n_F(-k_0+|\boldsymbol{q}|) \big]
\end{aligned}
$$

k_0 はボソンなので $\exp[\pm i\omega_l \beta] = 1$ より

$$
B_{\mu\nu} = 8g_{\mu\nu}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\boldsymbol{q}|} n_F(|\boldsymbol{q}|)
$$

$|\boldsymbol{q}| \simeq |\boldsymbol{p}|$ と近似してしまい

$$
\begin{aligned}
B_{\mu\nu} &= 8g_{\mu\nu}e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}n_F(|\boldsymbol{p}|) \\
&= 4g_{\mu\nu}e^2\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{p}|}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}|^2\frac{4\pi}{|\boldsymbol{p}|}n_F(|\boldsymbol{p}|) \\
&= \frac{2g_{\mu\nu}e^2}{\pi^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|n_F(|\boldsymbol{p}|) \\
&= g_{\mu\nu}\frac{2e^2}{\pi^2}\frac{\pi^2T^2}{12} \\
&= g_{\mu\nu}\frac{e^2T^2}{6} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

最初に $4g_{\mu\nu}/(p-k)^2$ を $4g_{\mu\nu}/p^2$ と近似してしまっても同じ結果になるので、先に近似してしまった方が簡単です。

$A_{\mu\nu}$ は

$$
A_{\mu\nu} = 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2(p-k)^2}
$$

これの三次元成分 $\mu=i,\nu=j$ の場合は、和は「和の計算〜Saclay 法 2〜」でのフェルミオン-フェルミオンの結果を使えばいいので

$$
\begin{aligned}
A_{ij} =& 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{p^2(p-k)^2} \\
=& 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{(\omega_l^2+E_p^2)((\omega_l-\omega_n)^2+E_q^2)} \qquad (E_p=|\boldsymbol{p}|\ ,\ E_q=|\boldsymbol{q}|\ ,\ \boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}) \\
=& -8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}p_ip_j\sum_{a_1,a_2=\pm1}\frac{a_1a_2}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(a_1E_p)-n_F(a_2E_q)}{i\omega_n-a_1E_p-a_2E_q} \\
=& -8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}p_ip_j\Big[\frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n-E_p-E_q}+\frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n+E_p+E_q} \\
&\qquad +\frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n-E_p+E_q}+\frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n+E_p-E_q}\Big] \\
=& -8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}p_ip_jI \qquad (3)
\end{aligned}
$$

もう少し見やすくするために、式変形します。フェルミオンの分布関数は

$$
n_F(-E) = 1-n_F(E)
$$

なので

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p - E_q} + \frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n + E_p + E_q} \\
&+ \frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n - E_p + E_q} + \frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(-E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p - E_q} \\
=& \frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p - E_q} + \frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-(1-n_F(E_p))-(1-n_F(E_q))}{i\omega_n + E_p + E_q} \\
&+ \frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-(1-n_F(E_q))}{i\omega_n - E_p + E_q} + \frac{-1}{4E_pE_q}\frac{1-(1-n_F(E_p))-n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p - E_q} \\
=& \frac{1}{4E_pE_q}\frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p - E_q} + \frac{1}{4E_pE_q}\frac{-1+n_F(E_p)+n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p + E_q} \\
&+ \frac{-1}{4E_pE_q}\frac{-n_F(E_p)+n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p + E_q} + \frac{-1}{4E_pE_q}\frac{n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p - E_q} \\
=& \frac{1}{4E_pE_q}\Big[\big(1-n_F(E_p)-n_F(E_q)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - E_p - E_q} - \frac{1}{i\omega_n + E_p + E_q}\big) \\
&\qquad + \big(n_F(E_p)-n_F(E_q)\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - E_p + E_q} - \frac{1}{i\omega_n + E_p - E_q}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

分布関数を持たない項は無視します。これに対して (1c)(1d) を使うことで

$$
\begin{aligned}
I \simeq& \frac{1}{4E_pE_q}\Big[-(n_F(E_p)+n_F(E_q))(\frac{1}{i\omega_n - 2|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{1}{i\omega_n + 2|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta}) \\
&+ (n_F(E_p)-n_F(E_q))(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta})\Big] \\
\simeq& \frac{1}{4E_pE_q}\Big[-\big(n_F(|\boldsymbol{p}|)+n_F(|\boldsymbol{p}|) - \frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - 2|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{1}{i\omega_n + 2|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big) \\
&+ \big(n_F(|\boldsymbol{p}|)-n_F(|\boldsymbol{p}|) + \frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big)\Big] \\
=& \frac{1}{4E_pE_q}\Big[-\big(2n_F(|\boldsymbol{p}|) - \frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n - 2|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{1}{i\omega_n + 2|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big) \\
&+ \frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\big(\frac{1}{i\omega_n - |\boldsymbol{k}|\cos\theta} - \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

$|\boldsymbol{p}| \gg |\boldsymbol{k}|$ なので、第一項での分母において $|\boldsymbol{p}|$ 以外の項を無視すると

$$I \simeq \frac{1}{4E_pE_q}\big[-(2n_F(|\boldsymbol{p}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta)(\frac{1}{-2|\boldsymbol{p}|}-\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|})$$

$$+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta})\big]$$

$$=\frac{1}{4E_pE_q}\big[2\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta$$

$$+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}-\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta})\big]$$

第二項は角度積分によって消えます (括弧 [ ] の外にいる E_q は $E_q \simeq |\boldsymbol{p}|$ だと思ってしまいます)。第三項に対して、$\boldsymbol{p}$ は三次元の全空間積分を受けるということから、$\boldsymbol{p}$ の符号をひっくり返しても影響がないということを使います。その時、ここでの角度 θ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{k}$ の間の角度なので、$\boldsymbol{p}$ の符号を反転させれば、内積

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\cos\theta$$

からわかるように、$\cos\theta$ の符号も反転します。というわけで、$\boldsymbol{p}$ の符号の反転によって (これの外にいるのは p_ip_j なので全体の符号は変えない)

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4E_pE_q}\big[2\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}(\frac{-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}-\frac{|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta})\big] \\
&= \frac{1}{4E_pE_q}\big[2\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{2|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big]
\end{aligned}$$

ここで $K = i\omega_n + |\boldsymbol{k}|\cos\theta$ として

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4E_pE_q}\big[2\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}-2\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{K-i\omega_n}{K}\big] \\
&= \frac{2}{4E_pE_q}\big[\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{i\omega_n}{K}\big]
\end{aligned}$$

というわけで、(3) にこれを入れることで A_{ij} は

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= -8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}p_ip_jI \\
&= -4e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{E_pE_q}\big[\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{i\omega_n}{K}\big]
\end{aligned}$$

ここでの p_ip_j/E_pE_q は

$$\frac{p_ip_j}{E_pE_q} \simeq \frac{p_ip_j}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|}$$

第一項の積分は、全空間積分の対称性から (場の量子論「次元正則化」参照)

$$p_ip_j = -\frac{g_{ij}|\boldsymbol{p}|^2}{3}$$

とできるので

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|}\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|} &= -\frac{1}{3}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\boldsymbol{p}|^2 g_{ij}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|}\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}\\ &= -\frac{4\pi}{3(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^2\frac{|\boldsymbol{p}|^2 g_{ij}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|}\frac{n_F(|\boldsymbol{p}|)}{|\boldsymbol{p}|}\\ &= -\frac{1}{6\pi^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|n_F(|\boldsymbol{p}|)g_{ij}\\ &= -\frac{1}{6\pi^2}\frac{\pi^2T^2}{12}g_{ij}\\ &= -\frac{T^2}{72}g_{ij}\end{aligned}$$

第二項も同様に

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|} &= -\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{p}|}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}|^2\frac{|\boldsymbol{p}|^2 g_{ij}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\\ &= -\frac{4\pi}{3(2\pi)^3}g_{ij}\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^2\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\\ &= -\frac{4\pi}{24\pi^3}g_{ij}\big([|\boldsymbol{p}|^2n_F(|\boldsymbol{p}|)]_0^\infty - 2\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|n_F(|\boldsymbol{p}|)\big)\\ &= -\frac{1}{6\pi^2}g_{ij}\big(-2\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|n_F(|\boldsymbol{p}|)\big)\\ &= -\frac{1}{6\pi^2}g_{ij}\frac{-2\pi^2T^2}{12}\\ &= \frac{T^2}{36}g_{ij}\end{aligned}$$

第三項は、K の中にいる $\cos\theta$ のせいで p_ip_j に対する全空間積分の対称性がなくなっています ($i\neq j$ のときでも全空間積分が 0 にならない)。しかし、$p_ip_j/|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|$ は単位ベクトル e_i によって e_ie_j なので、角度積分にしか引っかからないと考えられるために、$|\boldsymbol{p}|$ の積分からは外すことが出来て

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_ip_j}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{i\omega_n}{K} &= \int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_ie_j\int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{p}|}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}|^2\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{-2\pi^2T^2}{12}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_ie_j\\ &= \frac{-T^2}{48\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_ie_j\end{aligned}$$

$d\Omega$ は 3 次元角度積分を表わします。全部をあわせれば

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= -4e^2\big[-\frac{T^2}{72}g_{ij}-\frac{T^2}{36}g_{ij}+\frac{-T^2}{48\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_ie_j\big] \\
&= \frac{e^2T^2}{6}g_{ij}+\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_ie_j
\end{aligned} \tag{4}
$$

後は A_{00} と A_{0i} が必要で

$$
A_{00}=8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_0^2}{p^2(p-k)^2}
$$

$$
A_{0i}=8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_0p_i}{p^2(p-k)^2}
$$

A_{00} は

$$
\begin{aligned}
A_{00} &= 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2-g^{ij}p_ip_j}{p^2(p-k)^2} \qquad (p^2=p_0^2+g^{ij}p_ip_j) \\
&= 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\big(\frac{1}{(p-k)^2}+\frac{-g^{ij}p_ip_j}{p^2(p-k)^2}\big)
\end{aligned}
$$

第一項は係数を無視すれば $B_{\mu\nu}$ と同じ格好なので (2) が使え、第二項は A_{ij} に対して $p_ip_j\Rightarrow -p_ip_jg^{ij}$ と置き換えることで完全に対応するので (4) が使えて

$$
\begin{aligned}
A_{00} &= \frac{e^2T^2}{3}-g^{ij}\big(\frac{e^2T^2}{6}g_{ij}+\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_ie_j\big) \\
&= \frac{e^2T^2}{3}+\big(-\frac{e^2T^2}{2}+\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}\big) \\
&= -\frac{e^2T^2}{6}+\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}
\end{aligned} \tag{5}
$$

最後の A_{0i} は

$$
\begin{aligned}
A_{0i} &= 8e^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_0p_i}{p^2(p-k)^2} \\
&= 8ie^2T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}p_i\frac{\omega_l}{(\omega_l^2+E_p^2)((\omega_l-\omega_n)^2+E_q^2)}
\end{aligned}
$$

これの和は「和の計算〜Saclay 法 2〜」での分子に松原振動数がいるフェルミオン-フェルミオンの結果が使えるので

$$
\begin{aligned}
A_{0i} =& 8ie^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_i \sum_{a_1,a_2=\pm1} \frac{ia_2}{4E_q} \frac{1-n_F(a_1E_p)-n_F(a_2E_q)}{i\omega_n - a_1E_p - a_2E_q} \\
=& -8e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_i \big[\frac{1}{4E_q} \frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p - E_q} + \frac{-1}{4E_q} \frac{1-n_F(-E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n + E_p + E_q} \\
& \qquad + \frac{-1}{4E_q} \frac{1-n_F(E_p)-n_F(-E_q)}{i\omega_n - E_p + E_q} + \frac{1}{4E_q} \frac{1-n_F(-E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p - E_q} \big] \\
=& -8e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_i L
\end{aligned}
$$

L を上でやったように変形していくと

$$
\begin{aligned}
L =& \frac{1}{4E_q} \frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p - E_q} + \frac{-1}{4E_q} \frac{1-(1-n_F(E_p))-(1-n_F(E_q))}{i\omega_n + E_p + E_q} \\
& + \frac{-1}{4E_q} \frac{1-n_F(E_p)-(1-n_F(E_q))}{i\omega_n - E_p + E_q} + \frac{1}{4E_q} \frac{1-(1-n_F(E_p))-n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p - E_q} \qquad (n_F(-E) = 1 - n_F(E)) \\
=& \frac{1}{4E_q} \frac{1-n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p - E_q} + \frac{-1}{4E_q} \frac{-1+n_F(E_p)+n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p + E_q} \\
& + \frac{-1}{4E_q} \frac{-n_F(E_p)+n_F(E_q)}{i\omega_n - E_p + E_q} + \frac{1}{4E_q} \frac{n_F(E_p)-n_F(E_q)}{i\omega_n + E_p - E_q} \\
=& \frac{1}{4E_q} \big[\big(1-n_F(E_p)-n_F(E_q)\big) \big(\frac{1}{i\omega_n - E_p - E_q} + \frac{1}{i\omega_n + E_p + E_q} \big) \\
& \qquad + \big(n_F(E_p)-n_F(E_q)\big) \big(\frac{1}{i\omega_n - E_p + E_q} + \frac{1}{i\omega_n + E_p - E_q} \big) \big]
\end{aligned}
$$

分布関数を含まない項は無視して、HTL 近似を使うと

$$
\begin{aligned}
L \simeq& \frac{1}{4E_q}\Big[-(n_F(|\boldsymbol{p}|)+n_F(|\boldsymbol{p}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta)(\frac{1}{i\omega_n-2|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{1}{i\omega_n+2|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}) \\
&+(n_F(|\boldsymbol{p}|)-n_F(|\boldsymbol{p}|)+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta)(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta})\Big] \\
=& \frac{1}{4E_q}\Big[-\big(2n_F(|\boldsymbol{p}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{i\omega_n-2|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{1}{i\omega_n+2|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big) \\
&+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta})\Big] \\
\simeq& \frac{1}{4|\boldsymbol{p}|}\Big[-\big(2n_F(|\boldsymbol{p}|)-\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta\big)\big(\frac{1}{-2|\boldsymbol{p}|}+\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}\big) \\
&+\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}|\boldsymbol{k}|\cos\theta(\frac{1}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{1}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta})\Big] \\
=& \frac{1}{4|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\big(\frac{|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big)
\end{aligned}
$$

今の場合、これに p_i がくっつくので、$\boldsymbol{p}$ の符号を反転させると

$$
\begin{aligned}
p_iL &= \frac{1}{4|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\big(\frac{p_i|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{p_i|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big) \\
&= \frac{1}{4|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\big(\frac{-p_i(-|\boldsymbol{k}|\cos\theta)}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}+\frac{p_i|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\big) \\
&= \frac{2}{4|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{p_i|\boldsymbol{k}|\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta} \\
&= \frac{p_i}{2|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{K-i\omega_n}{K} \\
&= \frac{p_i}{2|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}(1-\frac{i\omega_n}{K}) \\
&= -\frac{p_i}{2|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{i\omega_n}{K}
\end{aligned}
$$

最後へは p_i 単独の全空間積分は 0 になることを使っています (K の中には $\cos\theta$ がいるので消えない)。というわけで

$$
\begin{aligned}
A_{0i} &= 8e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_i}{2|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{i\omega_n}{K} \\
&= 8e^2\int d\Omega\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{p}|}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}|^2\frac{p_i}{2|\boldsymbol{p}|}\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|}\frac{i\omega_n}{K} \\
&= \frac{4e^2}{(2\pi)^3}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_i\int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^2\frac{dn_F(|\boldsymbol{p}|)}{d|\boldsymbol{p}|} \\
&= \frac{4e^2}{(2\pi)^3}\frac{-2\pi^2T^2}{12}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_i \\
&= -\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_i
\end{aligned}
\tag{6}
$$

求まったものをまとめると、(2)(4)(5)(6) より

$$\Pi_{\mu\nu}(k_0, \boldsymbol{k}) = A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}$$

$$A_{00} = -\frac{e^2T^2}{6} + \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}$$

$$A_{ij} = \frac{e^2T^2}{6}g_{ij} + \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_ie_j$$

$$A_{0i} = -\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_i$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{e^2T^2}{6}g_{\mu\nu}$$

これより

$$\begin{aligned}\Pi_{00}(k_0, \boldsymbol{k}) &= -\frac{e^2T^2}{6} + \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K} - \frac{e^2T^2}{6} \\ &= -\frac{e^2T^2}{3} + \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{ij}(k_0, \boldsymbol{k}) &= \frac{e^2T^2}{6}g_{ij} + \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_ie_j - \frac{e^2T^2}{6}g_{ij} \\ &= \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_ie_j\end{aligned}$$

$$\Pi_{0i}(k_0, \boldsymbol{k}) = -\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_i$$

これは上手くまとめることが出来ます。角度積分を含んでいる部分は

$$\Pi^{\Omega}_{00} = \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}$$

$$\Pi^{\Omega}_{ij} = \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_ie_j$$

$$\Pi^{\Omega}_{0i} = -\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_i$$

より

$$\Pi^{\Omega}_{\mu\nu} = \frac{e^2T^2}{3}\int \frac{d\Omega}{4\pi}\frac{i\omega_n}{K}P_\mu P_\nu \quad (P_\mu = (1, -e_i))$$

とでき、角度積分を含まない項は 00 成分以外が消えるように計量を組み合わせればいいだけなので

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu} &= \frac{e^2T^2}{3}g_{\mu\nu} + \frac{e^2T^2}{3}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{i\omega_n}{K}P_\mu P_\nu \\ &= -\frac{e^2T^2}{3}(g_{\mu 0}g_{0\nu} - \int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{i\omega_n}{K}P_\mu P_\nu)\end{aligned}$$

次にこの $\Pi_{\mu\nu}$ がどのように伝播関数に入ってくるのか見ます。「線形応答理論」で出てきたように、有限温度での光子の伝播関数の一般形は縦、横の射影演算子によって

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{G-k^2}P^T_{\mu\nu} + \frac{1}{F-k^2}P^L_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

$$P^T_{00} = P^T_{0i} = P^T_{i0} = 0\ ,\ P^T_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}$$

$$P^L_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} - P^T_{\mu\nu}$$

このようになっています。そして、$\Pi_{\mu\nu}$ の定義

$$\Pi^{\mu\nu} = (D^{\mu\nu})^{-1} - (D_0^{\mu\nu})^{-1}$$

と、ゲージ不変性の要求

$$k^\mu\Pi_{\mu\nu} = 0$$

によって

$$\Pi_{\mu\nu} = GP^T_{\mu\nu} + FP^L_{\mu\nu}$$

と書けます。ここで、運動量 $\boldsymbol{k}$ の方向が z 軸に平行になっているようにします (k_μ は 0 成分と 3 成分だけを持つ)。これによって F は $P^T_{00} = P^T_{0i} = P^T_{i0} = 0$ より (三次元成分を x, y, z と書きます)

$$\Pi_{0z} = FP^L_{0z} = \frac{k_0k_z}{k^2}F = \frac{i\omega_n|\boldsymbol{k}|}{k^2}F$$

G は今の場合

$$P^L_{xx} = \frac{k_xk_x}{k^2} - g_{xx} - P^T_{xx} = \delta_{xx} - \delta_{xx} + \frac{k_xk_x}{\boldsymbol{k}^2} = 0$$

なので

$$\Pi_{xx} = GP^T_{xx} = (\delta_{xx} - \frac{k_xk_x}{\boldsymbol{k}^2})G = G$$

よって

$$F=\frac{k^2}{i\omega_n|\boldsymbol{k}|}\Pi_{0z}\ ,\ G=\Pi_{xx}$$

Π_{0z} なら、e_i は e_z なので、$\boldsymbol{p}$ の単位ベクトル e_z は $e_z=\cos\theta$ （$\boldsymbol{p}$ の z 成分は $|\boldsymbol{p}|\cos\theta$ だから）より

$$\begin{aligned}
\Pi_{0z} &= -\frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega\frac{i\omega_n}{K}e_z=-\frac{2\pi e^2T^2}{12\pi}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{i\omega_n\cos\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\\
&= -\frac{e^2T^2}{6}\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}dK\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|}\frac{i\omega_n}{K}\frac{K-i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|}\qquad(K=i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta\ ,\ dK=-|\boldsymbol{k}|\sin\theta d\theta)\\
&= \frac{e^2T^2}{6}\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}dK\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|^2}(1-\frac{i\omega_n}{K})\\
&= \frac{e^2T^2}{6}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|^2}(-2|\boldsymbol{k}|-i\omega_n\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|})\\
&= -\frac{2e^2T^2}{6}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|}(1-\frac{i\omega_n}{2|\boldsymbol{k}|}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|})
\end{aligned}$$

このように複素積分を実行するときは正則性をちゃんと示してから行うべきなんですが、積分範囲で正則なのでこれで問題ないです (別の方法を下の補足で示してます)。実数の場合と違い絶対値はつかないです。この方法は正則だと分かっている時にしか使えないことに注意してください。

これを使うことで F は

$$F=\frac{k^2}{i\omega_n|\boldsymbol{k}|}\Pi_{0z}=-\frac{e^2T^2}{3}\frac{k^2}{|\boldsymbol{k}|^2}(1-\frac{i\omega_n}{2|\boldsymbol{k}|}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|})$$

$G=\Pi_{xx}$ では

$$
\begin{aligned}
\Pi_{xx} &= \frac{e^2T^2}{12\pi}\int d\Omega \frac{i\omega_n}{K}e_xe_x = \frac{e^2T^2}{12\pi}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\frac{i\omega_n}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}(\sin\theta\cos\phi)^2 \\
&= \frac{e^2T^2}{12\pi}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{i\omega_n\sin^2\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}\int_0^{2\pi}d\phi\cos^2\phi \\
&= \frac{e^2T^2}{12\pi}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{i\omega_n\sin^2\theta}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}(\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 4\pi) \\
&= \frac{e^2T^2}{12}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{i\omega_n}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|\cos\theta}(1-\cos^2\theta) \\
&= \frac{e^2T^2}{12}\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}dK\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|}\frac{i\omega_n}{K}\big(1-(\frac{K-i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|})^2\big) \\
&= -\frac{e^2T^2}{12}\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}dK\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\frac{i\omega_n}{K}\big(1-\frac{K^2+(i\omega_n)^2-2i\omega_nK}{|\boldsymbol{k}|^2}\big) \\
&= -\frac{e^2T^2}{12}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|}\int_{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}dK\big(\frac{1}{K}-\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}(K+\frac{(i\omega_n)^2}{K}-2i\omega_n)\big) \\
&= -\frac{e^2T^2}{12}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|^3}\big[|\boldsymbol{k}|^2\log K-(\frac{1}{2}K^2+(i\omega_n)^2\log K-2i\omega_nK)\big]_{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}^{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|} \\
&= -\frac{e^2T^2}{12}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|^3}\big[|\boldsymbol{k}|^2\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}-\big(\frac{1}{2}(i\omega_n-|\boldsymbol{k}|)^2-\frac{1}{2}(i\omega_n+|\boldsymbol{k}|)^2+(i\omega_n)^2\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}+4i\omega_n|\boldsymbol{k}|\big)\big] \\
&= -\frac{e^2T^2}{12}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|^3}\big[|\boldsymbol{k}|^2\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}+2i\omega_n|\boldsymbol{k}|-(i\omega_n)^2\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}-4i\omega_n|\boldsymbol{k}|\big] \\
&= -\frac{e^2T^2}{12}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|^3}\big[(|\boldsymbol{k}|^2-(i\omega_n)^2)\log\frac{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}-2i\omega_n|\boldsymbol{k}|\big] \\
&= \frac{e^2T^2}{6}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|}\big[\frac{1}{2}(1-\frac{(i\omega_n)^2}{|\boldsymbol{k}|^2})\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}+\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|}\big]
\end{aligned}
$$

というわけで

$$
F = -\frac{e^2T^2}{3}\frac{k^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\big(1-\frac{i\omega_n}{2|\boldsymbol{k}|}\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}\big)
$$

$$
G = \frac{e^2T^2}{6}\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|}\big[\frac{1}{2}\big(1-\frac{(i\omega_n)^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\big)\log\frac{i\omega_n+|\boldsymbol{k}|}{i\omega_n-|\boldsymbol{k}|}+\frac{i\omega_n}{|\boldsymbol{k}|}\big]
$$

実時間における振る舞いを知るには、これを解析接続 $i\omega_n \Rightarrow k_0'+i\epsilon$ すればよくて

$$
F = -\frac{e^2T^2}{3}\frac{k^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\big(1-\frac{k_0'}{2|\boldsymbol{k}|}\log\frac{k_0'+|\boldsymbol{k}|}{k_0'-|\boldsymbol{k}|}\big)\quad (k^2=k_0'^2-|\boldsymbol{k}|^2)
$$

$$
G = \frac{e^2T^2}{6}\frac{k_0'}{|\boldsymbol{k}|}\big[\frac{1}{2}\big(1-\frac{k_0'^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\big)\log\frac{k_0'+|\boldsymbol{k}|}{k_0'-|\boldsymbol{k}|}+\frac{k_0'}{|\boldsymbol{k}|}\big]
$$

そうすると、「線形応答理論」で見たようにデバイ質量をこれから求めることが出来ます。デバイ質量は $F(0,\boldsymbol{k}\to 0)$ に対応するので

$$
F(0,\boldsymbol{k}\to 0) = -\frac{e^2T^2}{3}\frac{-|\boldsymbol{k}|^2}{|\boldsymbol{k}|^2} = \frac{e^2T^2}{3}
$$

となります。また、$e^2T^2/6$ のことを光子の熱的質量 (thermal mass) と呼びます。また、G を同じように $k_0' = 0, \boldsymbol{k} \to 0$ とすれば、$G(0, \boldsymbol{k} \to 0) = 0$ となることも分かります。

実際にデバイ質量が 0 でないことが求められたので、有限温度の QED では集団的な振る舞いとしてデバイ遮蔽が起きていることが確かめられたことになります。さらに、光子の温度グリーン関数の分母に温度依存性を持つ項が出てくるということも分かります。これによって光子は集団としての励起を起こします。

・補足

角度積分の別の方法を載せておきます。分子に $\cos\theta$ がいる場合でも同様なので、いない場合で行いうと

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|\cos\theta} &= -\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\int_1^{-1} dz \frac{1}{i\omega_n/|\boldsymbol{p}| + z} \quad (z = \cos\theta) \\
&= -\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\int_1^{-1} dz \frac{z - ib}{z^2 + b^2} \quad (b = \frac{\omega_n}{|\boldsymbol{p}|}) \\
&= \frac{i}{|\boldsymbol{p}|}\int_1^{-1} dz \frac{b}{z^2 + b^2} \\
&= \frac{i}{|\boldsymbol{p}|}\frac{b}{b}(\arctan\frac{-1}{b} - \arctan\frac{1}{b}) \\
&= -\frac{i2}{|\boldsymbol{p}|}\arctan\frac{1}{b} \\
&= -\frac{i2}{|\boldsymbol{p}|}\frac{i}{2}\log\frac{i + 1/b}{i - 1/b} \\
&= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\log\frac{i\omega_n + |\boldsymbol{p}|}{i\omega_n - |\boldsymbol{p}|}
\end{aligned}$$

途中で arctan と log の関係を使っています。このようになっているので、実数の場合とは違い log の部分が絶対値になっていないです (原始関数)。この場合では虚部のみが生き残り上での結果と対応します。実部と虚部に分けて計算するのが面倒だったので、上でのような方法を使いましたが、見て分かるように、計算の手順は全く違っています。