

有限温度での自己エネルギー

ゼロ温度での経路積分と同じ方法によって相関関数を求められることを見ていきます。実数スカラー場だとします。規格化定数は無視していきませんが、ゼロ温度の場合と同じ働きをします（真空泡の図を消す）。分配関数の計算のときと違って規格化定数は素直に消えるので、温度寄与は与えません。また、 ϕ 積分には周期性がありますが、省略して書いていきます。

扱う状況として、ゼロ温度でのミンコフスキー空間、ゼロ温度でのユークリッド空間、有限温度の3つを使いますが、区別するためにゼロ温度ミンコフスキー空間では M 、ゼロ温度ユークリッド空間では E の添え字をつけ、有限温度には何もつけません。

ここでの計算は「経路積分～クライン・ゴールドン場～」と平行しているので、細かいことはそっちをご覧ください。

ゼロ温度では源をつけた生成汎関数を汎関数微分することで、2点相関関数を求めることができたので、同じことをします。分配関数 Z に源の項 $J\phi$ を足して、有限温度での生成汎関数として

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right] = \int \mathcal{D}\phi \exp[S] \quad (1)$$

ラグランジアンは相互作用なしの

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2$$

これを使います。 J による汎関数微分は

$$\frac{\delta}{\delta J} Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \phi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right]$$

なので、 ϕ の置き換えは

$$\phi \Rightarrow \frac{\delta}{\delta J}$$

のようになり、ゼロ温度と違い i で割る必要がないです。というわけで、

$$\frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right] \quad (2)$$

「虚時間法」で見たようにゼロ温度と構造が同じなので、これは2点相関関数、つまり温度グリーン関数になっているはずですが。実際に計算して実数スカラー場の温度グリーン関数になっていることを確かめます。

ラグランジアン \mathcal{L}_0 は表面積分は0になるということを使って（時間成分は ϕ の周期性）

$$\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi(\tau, \mathbf{x}) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\tau, \mathbf{x})$$

なので、exp 内は

$$S = - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \phi(\tau, \mathbf{x}) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\tau, \mathbf{x}) - J(\tau, \mathbf{x}) \phi(\tau, \mathbf{x}) \right]$$

ϕ を $\phi + \phi'$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\phi + \phi') \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) (\phi + \phi') - J(\phi + \phi') \right] \\ &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi + \frac{1}{2}\phi' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi' + \phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi' - J(\phi + \phi') \right] \end{aligned}$$

この変形は場の量子論の「経路積分～クライン・ゴールドン場～」と同じです。 ϕ' が有限温度でのクライン・ゴールドン方程式

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi'(\tau, \mathbf{x}) = J(\tau, \mathbf{x})$$

を満たしているとすれば

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi + \frac{1}{2}\phi' J + \phi J - J(\phi + \phi') \right] \\ &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi - \frac{1}{2}\phi' J \right] \end{aligned}$$

このときの、 ϕ' はグリーン関数による解法によって

$$\begin{aligned} \phi'(\tau, \mathbf{x}) &= \int_0^\beta d\tau' \int d^3y \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\tau', \mathbf{y}) \\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \delta(\tau - \tau') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

と書けるので

$$S = - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi - \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau' \int d^3y J(\tau, \mathbf{x}) \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\tau', \mathbf{y}) \right]$$

第二項は ϕ 積分にひっかからないので、第一項だけを規格化定数にいれることにすれば、生成汎関数としての分配関数は

$$Z_0[J] = N \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d^3x d^3y J(\tau, \mathbf{x}) \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\tau', \mathbf{y}) \right]$$

よって、汎関数微分によって

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^2}{\delta J(\tau_1, \mathbf{z}_1) \delta J(\tau_2, \mathbf{z}_2)} Z_0[J] \\
&= \frac{\delta^2}{\delta J(\tau_1, \mathbf{z}_1) \delta J(\tau_2, \mathbf{z}_2)} \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d^3x d^3y J(\tau, \mathbf{x}) \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\tau', \mathbf{y}) \right] \\
&= \frac{\delta}{\delta J(\tau_1, \mathbf{z}_1)} \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d^3x d^3y \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_2 - \tau') \delta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{y}) \\
&\quad \times \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d^3x d^3y J(\tau, \mathbf{x}) \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\tau', \mathbf{y}) \right] \\
&= \frac{\delta}{\delta J(\tau_1, \mathbf{z}_1)} \int_0^\beta d\tau \int d^3x J(\tau, \mathbf{x}) \Delta_F(\tau - \tau_2, \mathbf{x} - \mathbf{z}_2) Z_0
\end{aligned}$$

$\Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y})$ の対称性 $\Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \Delta_F(\tau' - \tau, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ を使っています。 $J(\tau_1, \mathbf{z}_1)$ の汎関数微分の後、 $J = 0$ とするので結局

$$\left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(\tau_1, \mathbf{z}_1) \delta J(\tau_2, \mathbf{z}_2)} \right|_{J=0} = \Delta_F(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)$$

となります。で、この $\Delta_F(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)$ は従っている方程式から分かるように、運動量表示で

$$\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}$$

となるので、実際に (2) は温度グリーン関数を導くことが確かめられました。よって、 $\Delta_F(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)$ がそのままファインマン則での伝播関数になります。ゼロ温度での 2 点相関関数は

$$i\Delta_F^{(M)}(z_1 - z_2) = \left. \frac{\delta^2 Z_{T=0}^{(M)}[J]}{i\delta J(z_1) i\delta J(z_2)} \right|_{J=0}$$

のように i で割っていましたが、有限温度では汎関数微分をすればいいだけです。

出し方を見てみると分かることですが、上でやってきたことは、 τ の範囲を $-\infty$ から $+\infty$ にすればユークリッド空間での経路積分の話になります。ゼロ温度でのミンコフスキー空間での経路積分

$$Z_{T=0}^{(M)} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \right) \right]$$

これをユークリッド化すれば

$$Z_{T=0}^{(E)} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x_E \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2 \right) \right]$$

$$x_E = (\tau, \mathbf{x}_E), \quad \tau = ix_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = i \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad id^4x = d\tau d^3x = d^4x_E$$

これに $J\phi$ を足すことで、ユークリッド空間での生成汎関数は

$$Z_{T=0}^{(E)}[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x_E \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 - (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right) + \int d^4x_E J\phi \right]$$

とすることができます。これは (1) と同じ形です。 τ 積分の範囲が違うだけでその他は同じように変形していけるので、有限温度での摂動展開の形はユークリッド空間でのものと同じになります。

次に、相互作用がある場合を摂動展開して計算します。状況が見やすいようにミンコフスキー空間での ϕ^4 理論から始めます。ゼロ温度での ϕ^4 理論は

$$\mathcal{L}_{T=0}^{(M)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$Z_{T=0}^{(M)} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \right]$$

これをユークリッド化することで

$$Z_{T=0}^{(E)} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int d^4x_E \left(\frac{1}{2} \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2 \right) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \right]$$

なので、ユークリッド空間 (有限温度) における相互作用ありでの ϕ^4 理論は、当たり前ですが

$$\mathcal{L}^{(E)} = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

有限温度に行くには τ 積分の範囲を変えればいいので、有限温度の場合での相互作用あり生成汎関数は

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi) \right]$$

相互作用がない $\mathcal{L}_0 + J\phi$ 部分に上での結果を入れて、相互作用項は

$$\phi \Rightarrow \frac{\delta}{\delta J}$$

という置き換えによって ϕ 積分の外に出してしまえば

$$\begin{aligned} Z &= \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]) \right] \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d^3x d^3y J(\tau, \mathbf{x}) \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\tau', \mathbf{y}) \right] \\ &= \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{-\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right] \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d^3x d^3y J(\tau, \mathbf{x}) \Delta_F(\tau - \tau', \mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\tau', \mathbf{y}) \right] \end{aligned}$$

相互作用部分を展開すると

$$Z = \left[1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau', \mathbf{x}')} \right)^4 \right] Z_0[J] \cdots$$

これはミンコフスキー空間での展開

$$1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 + \dots$$

での積分部分をユークリッド化し、範囲を $0 \sim \beta$ にしたものです。

そして、例えばゼロ温度での生成汎関数を J で汎関数微分したものの

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{i\delta J(z)} Z_0^{(M)}[J] &= \frac{\delta}{i\delta J} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F^{(M)}(x-y) J(y) \right] \\ &= - \int d^4x \Delta_F^{(M)}(x-z) J(x) Z_0 \\ &= i \int d^4x i \Delta_F^{(M)}(x-z) J(x) Z_0 \end{aligned} \quad (3)$$

というのは、ユークリッド空間 (有限温度) での

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(\tau', \mathbf{x}')} Z_0^{(E)}[J] &= \frac{\delta}{\delta J} \exp \left[\frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \int d^3x_1 d^3x_2 J(\tau_1, \mathbf{x}_1) \Delta_F^{(M)}(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) J(\tau_2, \mathbf{x}_2) \right] \\ &= \int d\tau_1 \int d^3x_1 \Delta_F^{(E)}(\tau_1 - \tau', \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}') J(\tau_1, \mathbf{x}_1) Z_0^{(E)} \end{aligned} \quad (4)$$

これと

$$i \int d^4x \Leftrightarrow \int d\tau_1 \int d^3x_1$$

$$i \Delta_F^{(M)}(x-z) \Leftrightarrow \Delta_F^{(E)}(\tau_1 - \tau', \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}')$$

このような対応をしていることが分かります。さらにもう1回 J で汎関数微分したときに新しく出てくる項は

$$\frac{\delta^2}{i\delta J(z_1) i\delta J(z_2)} Z_0^{(M)}[J] = -\frac{\delta}{i\delta J(z_1)} \left(- \int d^4x \Delta_F^{(M)}(x-z_2) J(x) \right) Z_0 = (i \Delta_F^{(M)}(z_1 - z_2) + \dots) Z_0 \quad (5)$$

$$\frac{\delta^2}{\delta J(\tau'', \mathbf{x}'') \delta J(\tau', \mathbf{x}')} Z_0^{(E)}[J] = (\Delta_F^{(E)}(\tau'' - \tau', \mathbf{x}'' - \mathbf{x}') + \dots) Z_0^{(E)} \quad (6)$$

このようになるので、ちゃんと上のように対応しています。

そして、生成汎関数に対する汎関数微分はミンコフスキー空間では (3)(5)、ユークリッド空間では (4)(6) による組み合わせで作用しながら展開されていくので、複数回の汎関数微分でもこの置き換えで対応は取れています。実際に見てみると、ミンコフスキー空間では

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F^{(M)}(x-y) J(y) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= - \int d^4x \Delta_F^{(M)}(z-x) J(x) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F^{(M)}(x-y) J(y) \right] \\
&\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^2 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F^{(M)}(x-y) J(y) \right] \\
&= \left\{ i \Delta_F^{(M)}(z-z) + \left(- \int d^4x \Delta_F^{(M)}(z-x) J(x) \right)^2 \right\} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F^{(M)}(x-y) J(y) \right] \\
&\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^3 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F^{(M)}(x-y) J(y) \right] \\
&= \left\{ i \Delta_F^{(M)}(z-z) \left(- \int d^4x \Delta_F^{(M)}(z-x) J(x) \right) + 2 \left(- \int d^4x \Delta_F^{(M)}(z-x) J(x) \right) i \Delta_F^{(M)}(z-z) \right. \\
&\quad \left. + \left(- \int d^4x \Delta_F^{(M)}(z-x) J(x) \right)^3 \right\} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F^{(M)}(x-y) J(y) \right]
\end{aligned}$$

このように汎関数微分によって出てくるものは (3)(5) の組み合わせになっているので、単純な置き換えでユークリッド空間にいきます。

この対応関係によって、ミンコフスキー空間でのゼロ温度 2 点相関関数 $D_{T=0}^{(M)}(x_1, x_2)$ の λ の 1 次までの展開

$$D_{T=0}^{(M)}(x_1, x_2) = i \Delta_F^{(M)}(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} i \Delta_F^{(M)}(x' - x') \int d^4x' i \Delta_F^{(M)}(x_1 - x') i \Delta_F^{(M)}(x' - x_2)$$

を変更することで有限温度での場合が出てきます (disconnected な図は無視しています)。変更することによって有限温度での 1 次までの 2 点相関関数は

$$\begin{aligned}
D_\beta(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= \frac{\delta^2}{\delta J(\tau_1, \mathbf{x}_1) \delta J(\tau_2, \mathbf{x}_2)} Z[J] \\
&= \Delta_F(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \Delta_F(\tau_1 - \tau', \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}') \Delta_F(\tau' - \tau_2, \mathbf{x}' - \mathbf{x}_2)
\end{aligned}$$

フーリエ変換して運動量表示にもっていきます。成分を分離して書くと長くなるので

$$\begin{aligned}
\Delta_F(\tau, \mathbf{x}) &= T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_n \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \Delta_F(\omega_n, \mathbf{p}) \\
\Rightarrow \Delta_F(x) &= T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ipx} \Delta_F(p)
\end{aligned}$$

と省略して書きます。1 次からの寄与である第二項の変換は

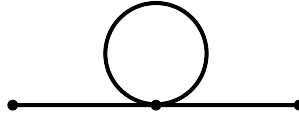
$$\begin{aligned}
D_\beta^{(1)}(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' T^2 \sum_{n_1, n_2} \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} e^{-ip_1(x_1-x')} e^{-ip_2(x'-x_2)} \Delta_F(p_1) \Delta_F(p_2) \\
&= -\frac{\lambda}{2} T^2 \Delta_F(0) \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \sum_{n_1, n_2} \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} e^{-i(p_2-p_1)x'} e^{-ip_1x_1} e^{ip_2x_2} \Delta_F(p_1) \Delta_F(p_2) \\
&= -\frac{\lambda}{2} T^2 \Delta_F(0) \sum_{n_1, n_2} \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} \beta (2\pi)^3 \delta_{n_1, n_2} \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) e^{-ip_1x_1} e^{ip_2x_2} \Delta_F(p_1) \Delta_F(p_2) \\
&= -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) T \sum_{n_1} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} e^{-ip_1(x_1-x_2)} \Delta_F(p_1) \Delta_F(p_1)
\end{aligned}$$

そして、 $\Delta_F(0)$ は

$$T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_F(k)$$

なので

$$D_\beta^{(1)}(i\omega_n, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{p}) T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_F(i\omega_l, \mathbf{k}) \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{p})$$



図との対応は、

$$\text{伝播関数: } \Delta_F(i\omega_l, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega_l^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{-1}{k^2 - m^2} \quad (k_\mu = (i\omega_l, k_i))$$

頂点: $-\lambda$

$$\text{ループ積分: } T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

対称因子で割る

といったものになっており、「ファインマン則～虚時間法～」でのものと一致しています。

ここで自己エネルギーなんですが、ゼロ温度のときと定義の仕方が変わります。有限温度では自己エネルギー Π を

$$D^{-1} = D_0^{-1} + \Pi$$

と定義します。\$D\$ は厳密な、\$D_0\$ は最低次の温度グリーン関数です。このように定義することで、実数スカラー場の場合

$$D^{-1}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + \Pi$$

ミンコフスキー空間からユークリッド空間での2点相関関数への変更の仕方を考えればこう定義するのは自然だと思います。この状況を作るためには、場の量子論での「自己エネルギーと頂点関数」の2点相関関数の展開を

$$D(i\omega_n, \mathbf{p}) = D_0(i\omega_n, \mathbf{p}) + D_0(-\Pi)D_0 + D_0(-\Pi)D_0(-\Pi)D_0 + \dots$$

というように変更する必要があります。よって、自己エネルギー \$\Pi\$ は

$$-\Pi = -\frac{\lambda}{2}T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_F(i\omega_l, \mathbf{k})$$

となります。この計算は「圧力への寄与」や「リングダイアグラム」のところでやっています

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\lambda}{2}T \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_l^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_4^2 + E_k^2} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_k} \frac{1}{e^{\beta E_k} - 1} \right) \quad (k_4 = ik_0, E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}) \end{aligned}$$

\$k_0\$ は連続値で、第一項はゼロ温度に対応します。第二項は \$m = 0\$ のときに

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{e^{\beta|\mathbf{k}|} - 1} &= 4\pi \int \frac{d|\mathbf{k}|}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{k}|}{e^{\beta|\mathbf{k}|} - 1} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} T^2 \end{aligned}$$

となるので、\$m = 0\$ での温度依存部分は

$$\Pi_\beta = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{12} T^2 = \frac{\lambda}{24} T^2$$

そして、ゼロ温度部分の発散は相殺項を入れることで除去できます。入れ方もゼロ温度のときと変わっていません

$$\mathcal{L}_{counter} = -\frac{\delta m^2}{2} \phi^2$$

というのを相互作用項として入れればいいです。そうすると、場の量子論の「くり込み~\$\phi^4\$理論~」で出したように、ゼロ温度では

$$1 - i \frac{\delta m^2}{2} \int d^4 z \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^2 + \dots$$

というように新しく展開される項が出てきます。 δm^2 は λ の 1 次のオーダーなので、2 点相関関数に対する 1 次のオーダーの寄与として

$$D_{T=0}^{(counter)} = i \delta m^2 \int d^4 x' \Delta_F(x' - x_2) \Delta_F(x' - x_1)$$

というのが出てきます。で、これを上で見たのと同じようにして、有限温度に持っていけば

$$D_{\beta}^{(counter)} = -\delta m^2 \int_0^{\beta} d\tau' \int d^3 x' \Delta_F(\tau' - \tau_2, \mathbf{x}' - x_2) \Delta_F(\tau' - \tau_1, \mathbf{x}' - x_1)$$

δm^2 を挟むように温度グリーン関数が現れ、相殺項を含めた D_{β} は運動量表示で

$$D_{\beta}(i\omega_n, \mathbf{p}) = -\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{p})(\Pi_{T=0} + \Pi_{\beta})\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{p}) - \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{p})\delta m^2\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{p})$$

よって、 $\Pi_{T=0} = -\delta m^2$ とすればきれいにゼロ温度の発散部分を除去でき、 Π_{β} に対して新しく温度依存する項が加わることもないです。

というわけで、温度グリーン関数は質量 0 のときに

$$D_{\beta}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \frac{\lambda}{24}T^2}$$

となります。このように、たとえ質量 0 だろうと温度に依存した新しい項が分母に現れるのが有限温度での特徴です。