実時間でのシュウィンガー・ダイソン方程式

実時間法が複雑である例として、実時間法でのシュウィンガー・ダイソン方程式をみていきます。はしご近似を使ったとしても簡単に解けるような構造になっていないので、instantaneous exchange(IE) 近似と呼ばれるものも使います。
フェルミオンのグリーン関数の「$*$」はガンマ行列を除いた複素共役です。このため、実部と虚部を取り出していますが、ガンマ行列は実数として扱っています。

　ゼロ温度の場合や虚時間法でのように経路積分を汎関数微分することで伝播関数に対する方程式を取り出す方法では、実時間伝播関数がデルタ関数を含んでいるためにうまくいきません。なので、別のルートで求めます。
　実時間法のフェルミオン伝播関数 $S_{(ab)}$ は温度ファインマン伝播関数 S_F と変換行列 M を使うことで

$$S_{(ab)}(p) = M^{-1}\begin{pmatrix} S_F(p) & 0 \\ 0 & -S_F^*(p) \end{pmatrix} M^{-1} \tag{1}$$

と書けます。$S_F^*(p)$ はガンマ行列を除いた複素共役です。M は

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta_p \\ -e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & -e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta_p \\ e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta & \cos\theta_p \end{pmatrix}$$

三角関数は、フェルミオン分布関数 $n_F(p_0-\mu)$ によって

$$\sin^2\theta_p = \theta(p_0)n_F(p_0-\mu) + \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu))$$

$$\cos^2\theta_p = \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)$$

$$\sin\theta_p\cos\theta_p = \epsilon(p_0)e^{\beta(p_0-\mu)/2}n_F(p_0-\mu)$$

同じ θ を使っていますが、$\theta(p_0)$ は階段関数で、$\epsilon(p_0)=\theta(p_0)-\theta(-p_0)$ です。同様に自己エネルギー $\Sigma_{(ab)}$ は温度ファインマン伝播関数の自己エネルギー Σ_F を使って

$$\Sigma_{(ab)}(p) = M\begin{pmatrix} \Sigma_F(p) & 0 \\ 0 & -\Sigma_F^*(p) \end{pmatrix} M$$

ここでの温度ファインマン伝播関数の自己エネルギーは

$$G_F(p) = G_F^0(p) + G_F^0(p)\Sigma_F(p)G_F(p)$$

と展開できるとしているので (G_F^0 は最低次のもの)、フェルミオンの温度ファインマン伝播関数の厳密形は

$$S_F(p) = \frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - m - \Sigma_F(p) + i\epsilon} \tag{2}$$

とすることができます。そして、自己エネルギーには

$$\mathrm{Re}\Sigma_F(p) = \mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p)$$

という関係があるので $\Sigma_{(11)}(p)$ の実部を求めてやれば、$\Sigma_F(p)$ の実部が分かります。

Σ_F の式は分かりませんが、$\Sigma_{(11)}$ は実時間法のファインマン則から作ることが出来るので、$\Sigma_{(11)}$ の式自体は簡単に作れ、実時間伝播関数 $S_{(11)}$ の厳密形は (1) と (2) から決められます。このため、$\Sigma_{(11)}$ の式を解くことになり、その構造上 Σ_F も同時に求まります。そして、$\Sigma_{(11)}$ さえ求めてしまえば、関係式から実時間伝播関数の他の成分を求めることができ、遅延、先進グリーン関数まで持っていくことが出来ます。しかし、ここで問題なのは、何が物理的な量に対応するのかということです。$\Sigma_{(11)}$ と $\Sigma_F(p)$ は、実部は一緒ですが虚部は異なっているので、違う量です。なので、正確性を考えるなら、遅延か先進グリーン関数まで持っていくのが一番いいです。しかし、質量という点だけを考えれば、$\Sigma_{(11)}$ と $\Sigma_F(p)$ の実部だけでいいじゃないかとしても大きく間違ってはないと予想することもできます。というわけで、ここでは $\Sigma_{(11)}$ と $\Sigma_F(p)$ の実部だけを考えることにします。

ここから質量 m を 0 だとしていきます。伝播関数の形をゼロ温度と同じように、波動関数のくり込み定数 Z と質量関数 M を使えば

$$\frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - \Sigma_F} = \frac{Z}{p_\mu\gamma^\mu - M}$$

これは

$$p_\mu\gamma^\mu - \Sigma_F = \frac{1}{Z}p_\mu\gamma^\mu - \frac{M}{Z}$$

となっているので

$$\Sigma_F = p_\mu\gamma^\mu - \frac{1}{Z}p_\mu\gamma^\mu + \frac{M}{Z}$$

スピノールに対するトレースを取ることで M だけを取り出せて

$$\mathrm{tr}\Sigma_F = \mathrm{tr}\frac{M}{Z}$$

$p_\mu\gamma^\mu$ をかけてトレースを取ると

$$\mathrm{tr}p_\mu\gamma^\mu\Sigma_F = \mathrm{tr}p^2 - \mathrm{tr}\frac{p^2}{Z}$$

$$\mathrm{tr}Z^{-1} = \mathrm{tr}1 - \mathrm{tr}p_\mu\gamma^\mu\Sigma_F$$

もしくは、厳密形をスカラー関数 A, B によって

$$\frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - \Sigma_F} = \frac{1}{Ap_\mu\gamma^\mu - B}$$

とすれば

$$\Sigma_F = p_\mu \gamma^\mu - A p_\mu \gamma^\mu + B \tag{3}$$

ここではこっちを使っていきます。

$\Sigma_{(11)}$ と Σ_F の関係に (3) を入れると

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(11)} &= \Sigma_F \cos^2\theta_p + \Sigma_F^* \sin^2\theta_p \\
&= \Sigma_F(1-\sin^2\theta_p) + \Sigma_F^* \sin^2\theta_p \\
&= \Sigma_F - (\Sigma_F - \Sigma_F^*)\sin^2\theta_p \\
&= \Sigma_F - 2i\mathrm{Im}\Sigma_F \sin^2\theta_p \\
&= \mathrm{Re}\Sigma_F + i\mathrm{Im}\Sigma_F - 2i\mathrm{Im}\Sigma_F \sin^2\theta_p \\
&= \mathrm{Re}\Sigma_F + i\mathrm{Im}\Sigma_F(1-2\sin^2\theta_p) \\
&= \mathrm{Re}\Sigma_F + i\mathrm{Im}\Sigma_F(1-2N_F(p_0)) \\
&= \mathrm{Re}\Sigma_F + i\mathrm{Im}\Sigma_F(1-2N_F(p_0)) \\
&= p_\mu\gamma^\mu - \mathrm{Re}(Ap_\mu\gamma^\mu) + \mathrm{Re}B + i(-\mathrm{Im}(Ap_\mu\gamma^\mu) + \mathrm{Im}B)(1-2N_F(p_0))
\end{aligned}$$

実部、虚部ではガンマ行列を実数として扱います。$\sin^2\theta_p$ はフェルミオン分布関数 $n_F(p_0-\mu)$ の関係

$$n_F(p_0-\mu) = \theta(p_0)N_F(p_0) - \theta(-p_0)N_F(p_0) + \theta(-p_0)$$

$$N_F(p_0) = \theta(p_0)n_F^-(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F^+(|p_0|)$$

$$n_F(p_0-\mu) = \frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1}\ ,\ n_F^-(|p_0|) = \frac{1}{e^{\beta(|p_0|-\mu)}+1}\ ,\ n_F^+(|p_0|) = \frac{1}{e^{\beta(|p_0|+\mu)}+1}$$

を使うことで

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_p &= \theta(p_0)n_F(p_0-\mu) + \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) \\
&= \theta(p_0)N_F(p_0) + \theta(-p_0) + \theta(-p_0)N_F(p_0) - \theta(-p_0) \\
&= N_F(p_0)
\end{aligned}$$

となっているので

$$\mathrm{Re}\Sigma_{(11)} = p_\mu\gamma^\mu - \mathrm{Re}(Ap_\mu\gamma^\mu) + \mathrm{Re}B$$

$$\mathrm{Im}\Sigma_{(11)} = (-\mathrm{Im}(Ap_\mu\gamma^\mu) + \mathrm{Im}B)(1-2N_F(p_0))$$

A, B を取り出すために、スピノールに対するトレースを取っていくと

$$\mathrm{trRe}B(p) = \mathrm{trRe}\Sigma_{(11)}(p) \tag{4}$$

$$\mathrm{trIm}B(p)(1-2N_F(p_0)) = \mathrm{trIm}\Sigma_{(11)}(p)$$

$p_\mu\gamma^\mu$ をかけてトレースを取れば

$$\mathrm{trRe}A(p) = \frac{1}{p^2}(\mathrm{tr}p^2 - \mathrm{tr}p_\mu\gamma^\mu\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p)) = \mathrm{tr}1 - \mathrm{tr}\frac{p_\mu\gamma^\mu\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p)}{p^2}$$

$$\mathrm{trIm}A(p)(1-2N_F(p_0)) = -\frac{1}{p^2}\mathrm{tr}p_\mu\gamma^\mu\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

このように、経路積分を経由せずに、温度ファインマン伝播関数における $A(p), B(p)$ に対する式を $\Sigma_{(11)}(p)$ によって作れ、これらがシュウィンガー・ダイソン方程式になります。

ここまでは $Ap_\mu\gamma^\mu$ としましたが、有限温度での時間成分の分離を考えれば、$Cp_0\gamma_0 + Ap^i\gamma_i + B$ としたほうがより一般的です。この場合では

$$\Sigma_F = p_\mu\gamma^\mu - C(p)p_0\gamma_0 - A(p)p_i\gamma^i + B(p)$$

$$\Sigma_{(11)} = p_\mu\gamma^\mu - \mathrm{Re}Cp_0\gamma_0 - \mathrm{Re}Ap_i\gamma^i + \mathrm{Re}B + i(-\mathrm{Im}Cp_0\gamma_0 - \mathrm{Im}Ap_i\gamma^i + \mathrm{Im}B)(1-2N_F(p_0))$$

となるので、C に対しては γ_0 をかけて

$$\mathrm{tr}\gamma_0\Sigma_{(11)} = \mathrm{tr}p_0 - \mathrm{trRe}Cp_0 - i\mathrm{Im}Cp_0(1-2N_F(p_0))$$

A に対しては $p^i\gamma_i$ をかけて $(p^i\gamma_ip_j\gamma^j = -|\boldsymbol{p}|^2)$

$$\mathrm{tr}p^i\gamma_i\Sigma_{(11)} = \mathrm{tr}p^i\gamma_ip_j\gamma^j - \mathrm{trRe}Ap^i\gamma_ip_j\gamma^j - i\mathrm{trIm}Ap^i\gamma_ip_j\gamma^j(1-2N_F(p_0))$$

$$\mathrm{tr}p^i\gamma_i\Sigma_{(11)} = -\mathrm{tr}|\boldsymbol{p}|^2 + \mathrm{trRe}A|\boldsymbol{p}|^2 + i\mathrm{trIm}A|\boldsymbol{p}|^2(1-2N_F(p_0))$$

よって

$$\mathrm{trRe}Cp_0 = \mathrm{tr}p_0 - \mathrm{trRe}\gamma_0\Sigma_{(11)} \tag{5a}$$

$$\mathrm{trRe}A|\boldsymbol{p}|^2 = \mathrm{tr}|\boldsymbol{p}|^2 + \mathrm{trRe}p^i\gamma_i\Sigma_{(11)} \tag{5b}$$

$$\mathrm{trIm}Cp_0(1-2N_F(p_0)) = -\mathrm{trIm}\gamma_0\Sigma_{(11)} \tag{5c}$$

$$\mathrm{trIm}A|\boldsymbol{p}|^2(1-2N_F(p_0)) = \mathrm{trIm}p^i\gamma_i\Sigma_{(11)} \tag{5d}$$

となります。というわけで、$C(p), A(p), B(p)$ で必要なトレース計算は

$$\mathrm{tr}\Sigma_{(11)}\ ,\ \mathrm{tr}\gamma_0\Sigma_{(11)}\ ,\ \mathrm{tr}\gamma_i\Sigma_{(11)}$$

この 3 つです。これを計算するために $\Sigma_{(11)}$ の形をまず求めます。

$\Sigma_{(11)}$ は実時間法でのファインマン則から、はしご近似では

$$\frac{\Sigma_{(11)}(p)}{i} = (-ie)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu i D^{\mu\nu}_{(11)}(p-q) i S_{(11)}(q)\gamma_\nu$$

となっていることが分かります。$S_{(11)}$ は

$$\begin{aligned}
S_{(11)}(p) &= S_F(p)\cos^2\theta_p + S_F^*(p)\sin^2\theta_p \\
&= S_F(p) - (S_F(p) - S_F^*(p))\sin^2\theta_p \\
&= S_F(p) - 2i\mathrm{Im}S_F(p)\sin^2\theta_p \\
&= S_F(p) - 2i\mathrm{Im}S_F(p)N_F(p_0)
\end{aligned}$$

最低次での光子の伝播関数 $D^{\mu\nu}_{(11)}(k=p-q)$ は、光子での温度ファインマン伝播関数を $D^{\mu\nu}_F(k)$ とすれば

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu}_{(11)}(k) &= D^{\mu\nu}_F(k)\cosh^2\theta_k - D^{\mu\nu*}_F(k)\sinh^2\theta_k \\
&= D^{\mu\nu}_F(k)(1+\sinh^2\theta_k) - D^{\mu\nu*}_F(k)\sinh^2\theta_k \\
&= D^{\mu\nu}_F(k) + (D^{\mu\nu}_F(k) - D^{\mu\nu*}_F(k))\sinh^2\theta_k \\
&= D^{\mu\nu}_F(k) + 2i\mathrm{Im}D^{\mu\nu}_F(k)\sinh^2\theta_k \\
&= D^{\mu\nu}_F(k) + 2i\mathrm{Im}D^{\mu\nu}_F(k)n_B(|k_0|)
\end{aligned}$$

双曲線関数は

$$\begin{aligned}
\sinh^2\theta_k &= \theta(k_0)n_B(k_0) - \theta(-k_0)(1+n_B(k_0)) \\
\cosh^2\theta_k &= \theta(k_0)(1+n_B(k_0)) - \theta(-k_0)n_B(k_0)
\end{aligned}$$

おそらく混乱はしないと思うのでフェルミオンと同じように θ_k と書いています。最後の部分では $\sinh^2\theta_k$ はボソンの分布関数 $n_B(k_0)$ の関係

$$-\theta(-k_0)n_B(k_0) - \theta(-k_0) = -\frac{1}{e^{-\beta|k_0|}-1} - 1 = -\frac{1}{e^{-\beta|k_0|}-1} - \frac{e^{-\beta|k_0|}-1}{e^{-\beta|k_0|}-1} = \frac{1}{e^{\beta|k_0|}-1}$$

から、

$$\begin{aligned}
\sinh^2\theta_k &= \theta(k_0)n_B(k_0) - \theta(-k_0)(1+n_B(k_0)) \\
&= \theta(k_0)n_B(k_0) - \theta(-k_0)n_B(k_0) - \theta(-k_0) \\
&= n_B(|k_0|)
\end{aligned}$$

となっているのを使っています。ボソンの温度ファインマン伝播関数 $D_F^{\mu\nu}(k)$ は最低次のものなので

$$D_F^{\mu\nu}(k)=\frac{-1}{k^2+i\epsilon}(g^{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2+i\epsilon})$$

を使いますが、ファインマンゲージ $\xi=1$ を取って、さらに定数の質量項 Π^2 を加えて

$$D_F^{\mu\nu}(k)=\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2-\Pi^2+i\epsilon}$$

とします。

これらを使うと $\Sigma_{(11)}$ は

$$\begin{aligned}\Sigma_{(11)}(p)&=ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_\mu[D_F^{\mu\nu}(k)+2i\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sinh^2\theta_k][S_F(q)-2i\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q]\gamma_\nu\\&=ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_\mu[D_F^{\mu\nu}(k)S_F(q)+4\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q\sinh^2\theta_k\\&\qquad-2iD_F^{\mu\nu}(k)\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q+2iS_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sinh^2\theta_k]\gamma_\nu\\&=e^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_\mu[iD_F^{\mu\nu}(k)S_F(q)+4i\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q\sinh^2\theta_k\\&\qquad+2D_F^{\mu\nu}(k)\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q-2S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sinh^2\theta_k]\gamma_\nu\end{aligned}$$

さらに $D_F^{\mu\nu}(k)$ と $S_F(p)$ を実部と虚部を分ける必要があるので

$$\begin{aligned}\Sigma_{(11)}(p)=e^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_\mu[&i\mathrm{Re}S_F(q)\mathrm{Re}D_F^{\mu\nu}(k)-i\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\\&-\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Re}D_F^{\mu\nu}(k)-\mathrm{Re}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\\&+4i\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q\sinh^2\theta_k\\&+2\mathrm{Re}D_F^{\mu\nu}(k)\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q+2i\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\mathrm{Im}S_F(q)\sin^2\theta_q\\&-2\mathrm{Re}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sinh^2\theta_k-2i\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sinh^2\theta_k]\gamma_\nu\end{aligned}$$

なので、実部は

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p)=e^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_\mu[&-\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Re}D_F^{\mu\nu}(k)-\mathrm{Re}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\\&+2\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Re}D_F^{\mu\nu}(k)\sin^2\theta_q-2\mathrm{Re}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sinh^2\theta_k]\gamma_\nu\end{aligned}$$

虚部は

$$
\begin{aligned}
i\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p) = ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_\mu[&\mathrm{Re}S_F(q)\mathrm{Re}D_F^{\mu\nu}(k)-\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\\
&+4\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sin^2\theta_q\sinh^2\theta_k+2\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sin^2\theta_q\\
&-2\mathrm{Im}S_F(q)\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)\sinh^2\theta_k]\gamma_\nu
\end{aligned}
$$

こんなのはまともに解けそうにないので、近似をしていきます。

まず、Σ_F は実部しかないとします。これは簡単になるというだけでなく、質量関数は実数だろうと考えて、Σ_F の実部だけを見ると言うこともできます。虚部を無視するということは、Σ_F と $\Sigma_{(11)}$ が

$$
\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p)=\mathrm{Re}\Sigma_F(p)
$$

$$
\mathrm{Im}\Sigma_F(p)=\epsilon(p_0)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)
$$

という関係になっているので、$\Sigma_{(11)}(p)$ の虚部も無視することになります。S_F の実部と虚部は

$$
\begin{aligned}
&(Cp_0\gamma^0+Ap_i\gamma^i-B)(-Cp_0\gamma^0-Ap_i\gamma^i-B)\\
&=-(Cp_0\gamma^0)^2-CAp_0\gamma^0p_i\gamma^i-CBp_0\gamma^0-CAp_i\gamma^ip_0\gamma^0-A^2p_i\gamma^ip_i\gamma^i-ABp_i\gamma^i+CBp_0\gamma^0+ABp_i\gamma^i+B^2\\
&=-(Cp_0\gamma^0)^2-Ap_i\gamma^iAp_i\gamma^i+B^2
\end{aligned}
$$

を使うことで、C,A,B は実数であることから

$$
\begin{aligned}
S_F(p)&=\frac{Cp_0\gamma_0+Ap_i\gamma^i+B}{C^2p_0^2-A^2|\boldsymbol{p}|^2-B^2+i\epsilon}\\
&=(Cp_0\gamma_0+Ap_i\gamma^i+B)(\frac{1}{C^2p_0^2-A^2|\boldsymbol{p}|^2-B^2}-i\pi\delta(C^2p_0^2-A^2|\boldsymbol{p}|^2-B^2))\\
&=\mathrm{Re}S_F(p)+i\mathrm{Im}S_F(p)
\end{aligned}
$$

と分かります。第一項は主値ですが主値を表す P を抜いて書いています。光子の場合も Π^2 は実数だとしているので、同じように

$$
D_F^{\mu\nu}(k)=\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2-\Pi^2+i\epsilon}=\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2-\Pi^2}+ig^{\mu\nu}\pi\delta(k^2-\Pi^2)=\mathrm{Re}D_F^{\mu\nu}(k)+i\mathrm{Im}D_F^{\mu\nu}(k)
$$

これも第一項は主値です。これらを $\Sigma_{(11)}(p)$ の実部に入れると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p) = e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma_\mu[&\pi(Cq_0\gamma_0 + Aq_i\gamma^i + B)\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2-\Pi^2}\delta(C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2) \\
&- g^{\mu\nu}\pi\frac{Cq_0\gamma_0 + Aq_i\gamma^i + B}{C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2}\delta(k^2-\Pi^2) \\
&+ 2\pi(q_\alpha\gamma^\alpha + \Sigma_F)\frac{g^{\mu\nu}}{k^2-\Pi^2}\delta(C^2p_0^2 - A^2|\boldsymbol{p}|^2 - B^2)\sin^2\theta_q \\
&- 2g^{\mu\nu}\pi\frac{Cq_0\gamma_0 + Aq_i\gamma^i + B}{C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2}\delta(k^2-\Pi^2)\sinh^2\theta_k]\gamma_\nu \\
= \pi e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}&\gamma_\mu(Cq_0\gamma_0 + Aq_i\gamma^i + B)g^{\mu\nu}\gamma_\nu \\
&\times\Big[\frac{-1}{k^2-\Pi^2}\delta(C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2) + 2\frac{1}{k^2-\Pi^2}\delta(C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2)N_F(q_0) \\
&\quad - \frac{1}{C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2}\delta(k^2-\Pi^2) - 2\frac{1}{C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2}\delta(k^2-\Pi^2)n_B(|k_0|)\Big]
\end{aligned}
$$

これでもまだ複雑なので、さらに近似をかけます。使うのは instantaneous exchange(IE) 近似と呼ばれる、光子の伝播関数を

$$
D^{\mu\nu}_{(11)}(k_0, \boldsymbol{k}) \;\Rightarrow\; D^{\mu\nu}_{(11)}(k_0 = 0, \boldsymbol{k})
$$

とする近似です。見て分かるように、光子の運動量の 0 成分を 0 にとる近似です。光子が粒子の運動量を媒介していることを踏まえれば、これはエネルギーの移動がないとする近似なので、instantaneous exchange(瞬間的な交換) となっています。この近似を使うと

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p) = \pi e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}&\gamma_\mu(Cq_0\gamma_0 + Aq_i\gamma^i + B)g^{\mu\nu}\gamma_\nu \\
&\times\Big[\frac{-1}{-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2}\delta(C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2) + 2\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2}\delta(C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2)N_F(q_0) \\
&\quad - \frac{1}{C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2}\delta(-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2) - 2\frac{1}{C^2q_0^2 - A^2|\boldsymbol{q}|^2 - B^2}\delta(-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2)n_B(|k_0=0|)\Big]
\end{aligned}
$$

第三項と第四項のデルタ関数内は $\Pi^2 > 0$ である限り 0 にならないので、消えます。そして、第一項と第二項には p_0 がいないので、$\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p)$ は p_0 に依存しなくなります。なので、$\Sigma_{(11)}$ での $C(p)$ から p_0 をなくすために

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{(11)} = \Sigma_F = p_0\gamma_0 + p_i\gamma^i - C(p)p_0\gamma_0 - A(p)p_i\gamma^i + B(p) \\
&\Rightarrow\; \Sigma_{(11)} = \Sigma_F = C(\boldsymbol{p})\gamma_0 + (1 - A(\boldsymbol{p}))p_i\gamma^i + B(\boldsymbol{p})
\end{aligned}
$$

と定義しなおします。虚部はないとしているので $\mathrm{Re}\Sigma_{(11)} = \mathrm{Re}\Sigma_F$ から $\Sigma_{(11)} = \Sigma_F$ と書いています。C が無次元でなくなっていることに注意してください。この置き換えによって、厳密なフェルミオンの温度ファインマン伝播関数の形も

$$
\begin{aligned}
S_F(p) &= \frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - \Sigma_F + i\epsilon} \\
&= \frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - C(\boldsymbol{p})\gamma_0 - (1-A(\boldsymbol{p}))p_i\gamma^i - B(\boldsymbol{p}) + i\epsilon} \\
&= \frac{1}{(p_0 - C(\boldsymbol{p}))\gamma_0 + A(\boldsymbol{p})p_i\gamma^i - B(\boldsymbol{p}) + i\epsilon} \\
&= \frac{1}{c(p)\gamma_0 + A(\boldsymbol{p})p_i\gamma^i - B(\boldsymbol{p}) + i\epsilon} \\
&= \frac{c(p)\gamma_0 + A(\boldsymbol{p})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{p})}{c^2(p) - A^2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}^2 - B^2(\boldsymbol{p}) + i\epsilon}
\end{aligned}
$$

よって、IE 近似を取ることで $\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(|\boldsymbol{p}|) = \frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \int d^3q\gamma_\mu(c(q)\gamma_0 + A(\boldsymbol{q})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{q}))g^{\mu\nu}\gamma_\nu\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2} \\
\times\big(1-2N_F(q_0))\delta(c^2(q) - A^2(\boldsymbol{q})|\boldsymbol{q}|^2 - B^2(\boldsymbol{q})\big)
\end{aligned}
$$

q_0 積分は素直に実行できて

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(|\boldsymbol{p}|) &= \frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \int d^3q\gamma_\mu((q_0 - C(\boldsymbol{q}))\gamma_0 + A(\boldsymbol{q})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{q}))g^{\mu\nu}\gamma_\nu\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2} \\
&\qquad\times\big(1-2N_F(q_0)\big)\delta((q_0 - C(\boldsymbol{q}))^2 - E^2) \\
&= \frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dq_0' \int d^3q g^{\mu\nu}\gamma_\mu(q_0'\gamma_0 + A(\boldsymbol{q})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{q}))\gamma_\nu\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2} \\
&\qquad\times\big(1-2N_F(q_0' + C(\boldsymbol{q}))\big)\delta(q_0'^2 - E^2) \\
&= \frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \int d^3q g^{\mu\nu}\gamma_\mu\big(q_0\gamma_0 + A(\boldsymbol{q})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{q})\big)\gamma_\nu\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2} \\
&\qquad\times\big(1-2N_F(q_0 + C(\boldsymbol{q}))\big)\frac{1}{2E}\big(\delta(q_0 - E)) + \delta(q_0 + E)\big) \\
&= \frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}g^{\mu\nu}\gamma_\mu\big[(E\gamma_0 + A(\boldsymbol{q})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{q}))(1-2N_F(E^+)) \\
&\qquad + (-E\gamma_0 + A(\boldsymbol{q})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{q}))(1-2N_F(E^-))\big]\gamma_\nu \\
&= \frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}g^{\mu\nu}\gamma_\mu \\
&\qquad\times\big[-2\gamma_0E(N_F(E^+) - N_F(E^-)) + 2(A(\boldsymbol{q})q_i\gamma^i + B(\boldsymbol{q}))(1-N_F(E^+) - N_F(E^-))\big]\gamma_\nu
\end{aligned}
$$

E と $E^\pm$ は

$$
E = \sqrt{A^2(\boldsymbol{p})|\boldsymbol{p}|^2 + B^2(\boldsymbol{p})}\ ,\ E^\pm = C(\boldsymbol{q}) \pm E
$$

ここで必要になるガンマ行列の計算は

$$\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma^\mu = 16$$

$$\mathrm{tr}\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\gamma^\mu = \mathrm{tr}\gamma_0(2g_{\mu 0} - \gamma_0\gamma_\mu)\gamma^\mu = \mathrm{tr}(2-4) = -8$$

$$\mathrm{tr}\gamma_j\gamma_\mu\gamma_i\gamma^\mu = \mathrm{tr}\gamma_j(2g_{\mu i} - \gamma_i\gamma_\mu)\gamma^\mu = -2\mathrm{tr}\gamma_j\gamma_i = -2\mathrm{tr}g_{ij} = 8\delta_{ij}$$

これらによって、単にトレースを取った場合は

$$\begin{aligned}\mathrm{trRe}\Sigma_{(11)}(|\boldsymbol{p}|) &= \frac{2\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{B(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma^\mu(1-N_F(E^+)-N_F(E^-)) \\ &= \frac{32\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{B(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}(1-N_F(E^+)-N_F(E^-))\end{aligned}$$

γ_0 をかけた場合は

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\gamma_0\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(|\boldsymbol{p}|) &= \frac{2\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}g^{\mu\nu}\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\gamma_\nu(N_F(E^+)-N_F(E^-)) \\ &= \frac{-16\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}(N_F(E^+)-N_F(E^-))\end{aligned}$$

γ_i をかけた場合は

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\gamma_i\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(|\boldsymbol{p}|) &= \frac{2\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}g^{\mu\nu}\gamma_i\gamma_\mu\gamma_j\gamma_\nu A(\boldsymbol{q})q^j(1-N_F(E^+)-N_F(E^-)) \\ &= \frac{16\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{\delta_{ij}q^j}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}A(\boldsymbol{q})(1-N_F(E^+)-N_F(E^-))\end{aligned}$$

これらと (5a) を $C(\boldsymbol{p})$ に変えた

$$\mathrm{tr}C(\boldsymbol{p}) = \mathrm{trRe}\gamma_0\Sigma_{(11)}$$

と (4),(5b) を使うことで、$C(\boldsymbol{p}), A(\boldsymbol{p}), B(\boldsymbol{p})$ は

$$C(\boldsymbol{p}) = \frac{-4\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}(N_F(E^+)-N_F(E^-))$$

$$A(\boldsymbol{p}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{(2\pi)^4}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}A(\boldsymbol{q})(1-N_F(E^+)-N_F(E^-))$$

$$B(\boldsymbol{p}) = \frac{8\pi e^2}{(2\pi)^4}\int d^3q\frac{1}{2E}\frac{B(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2}(1-N_F(E^+)-N_F(E^-))$$

C と B で角度積分にひっかかるのは $\boldsymbol{k}^2$ だけなので、そこだけを取り出せば

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 = \int d^3q \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2} &= 2\pi \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2} \\
&= 2\pi \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta+\Pi^2} \\
&= \frac{2\pi}{2|\boldsymbol{p}|} \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}| \int_{z_-}^{z_+} dz \frac{1}{z} \quad (z = |\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta+\Pi^2) \\
&= \frac{2\pi}{2|\boldsymbol{p}|} \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}| \log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2} \qquad (z_\pm = (|\boldsymbol{p}|\pm|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2)
\end{aligned}
$$

A は

$$
\begin{aligned}
\Omega_2 =& \int d^3q \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{k}|^2+\Pi^2} \\
=& 2\pi \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta}{|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta+\Pi^2} \\
=& 2\pi \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|^2 \int_{z_-}^{z_+} dz \frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}\frac{1}{-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}\frac{z-|\boldsymbol{p}|^2-|\boldsymbol{q}|^2-\Pi^2}{z} \\
=& -2\pi\frac{1}{4|\boldsymbol{p}|} \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}| \int_{z_-}^{z_+} dz (1-\frac{|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2+\Pi^2}{z}) \\
=& -2\pi\frac{1}{4|\boldsymbol{p}|} \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}| \int_{z_-}^{z_+} dz (z_+-z_- -(|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2+\Pi^2)\log\frac{z_+}{z_-}) \\
=& -2\pi\frac{1}{4|\boldsymbol{p}|} \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}| \Big(4|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| - (|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2+\Pi^2)\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}\Big)
\end{aligned}
$$

よって、IE 近似での $C(\boldsymbol{p}), A(\boldsymbol{p}), B(\boldsymbol{p})$ に対する式は

$$
C(\boldsymbol{p}) = \frac{-e^2}{8\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|(N_F(E^+)-N_F(E^-))\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}
$$

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{p}) = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\frac{A(\boldsymbol{q})}{2E}&(1-N_F(E^+)-N_F(E^-)) \\
&\times(4|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2+\Pi^2)\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2})
\end{aligned}
$$

$$
B(\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{2\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\frac{B(\boldsymbol{q})}{2E}(1-N_F(E^+)-N_F(E^-))\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}
$$

後は数値計算に入れて解を求めることになります。しかし、数値計算をしなくても分かることがあります。これの、$C(\boldsymbol{p})$ の分布関数部分を見てみると、$C(\boldsymbol{p})=0$ のとき、$E\geq 0$ であることから

$$\begin{aligned}N_F(E)-N_F(-E)&=\theta(E)n_F^-(|E|)+\theta(-E)n_F^+(|E|)-\theta(-E)n_F^-(|E|)-\theta(E)n_F^+(|E|)\\&=n_F^-(|E|)-n_F^+(|E|)\end{aligned}$$

$\mu=0$ ならこの部分は 0 になるので、$\mu=0$ のときは $C(\boldsymbol{p})=0$ が解になっています。なので、$\mu=0$ では A と B だけの連立方程式になっています。しかし、$\mu\neq 0$ では $C(\boldsymbol{p})=0$ は解になっていないので、$C(\boldsymbol{p}),A(\boldsymbol{p}),B(\boldsymbol{p})$ の連立方程式のままです。

Π^2 は真空偏極の寄与なので厳密な値は光子の真空偏極に対する非摂動的な結果が必要になります。しかし、そんなものは分からないですし、すでに定数としているので近似的に使えそうなものを代わりに使います。一番わかりやすいものとして、有限温度・密度での真空偏極の 1 ループの結果を入れます。1 ループとはいえ、温度と密度効果が入った部分を厳密に計算することができないので、HTL 近似を使ったデバイ質量

$$\Pi^2=e^2(\frac{T^2}{3}+\frac{\mu^2}{\pi^2})$$

を使うことが多いです (「光子の自己エネルギー」と「有限密度の自己エネルギー」参照)。数値計算の結果は載せませんが、解いてみると、強結合時にカイラル対称性は破れ、温度や密度を上げていくと対称性が回復することが分かります (ただし、密度側が 1 次相転移になっていない)。ランダウゲージで密度なしでの結果は「Structure of Chiral Phase Transitions at Finite Temperature in Abelian Gauge Theories」(arXiv:hep-ph/9910305v1, Prog.Theor.Phys.105(2001),979) で見ることが出来ます。

ついでに虚時間法でも IE 近似を行ってみます。こっちではすごくお手軽に求められます。虚時間法でのシュレーディンガー・方程式は

$$-C(p)p_0\gamma_0-A(p)p_i\gamma^i+B(p)=-(\gamma_\mu p^\mu-m)-e^2T\sum_l\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\gamma^\mu D^0_{\mu\nu}(k=p-q)S(q)\gamma^\nu$$

p_0,q_0 はフェルミオンの松原振動数 $p_0=2\pi T(n+1/2),q_0=2\pi T(l+1/2)$ で、$k_0=p_0-q_0=2\pi T(n-l)$ です。$S(p)$ と $D^0_{\mu\nu}(k)$ は

$$S(p)=\frac{-1}{C(p)\gamma_0p^0-A(p)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-B(p)}\ ,\ D^0_{\mu\nu}(k)=\frac{g_{\mu\nu}}{k^2-\Pi^2}$$

はしご近似にして、ファインマンゲージを取っています。C を取り出すには γ_0 をかけてトレースを取ればよくて

$$\begin{aligned}-\mathrm{tr}C(p)p_0&=\ -\mathrm{tr}p_0-e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{tr}[\gamma^\mu\frac{1}{k^2-\Pi^2}g_{\mu\nu}\frac{-C(q)q_0\gamma_0}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)}\gamma^\nu\gamma^0]\\-\mathrm{tr}C(p)p_0&=\ -\mathrm{tr}p_0-e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-\Pi^2}\mathrm{tr}[g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma_0\gamma^\nu\gamma^0]\frac{-C(q)q_0}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)}\\C(p)p_0&=p_0+2e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-\Pi^2}\frac{C(q)q_0}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)}\end{aligned}$$

A では $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}$ をかけてトレースをとって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}A(p)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^2 =& -\mathrm{tr}[p_i\gamma^i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})] + e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-\Pi^2}\mathrm{tr}[g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^i\gamma^\nu\gamma^j]\frac{-p_jq_iA}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)} \\
A(p) =& 1+2e^2\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2}T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-\Pi^2}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})A}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)}
\end{aligned}
$$

B は単にトレースを取って

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}B(p) &= e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-\Pi^2}\mathrm{tr}[g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu]\frac{B}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)} \\
B(p) &= 4e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-\Pi^2}\frac{B}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)}
\end{aligned}
$$

ここで IE 近似を取ります。Σ を見てみれば、$k_0=0$ で p_0 の依存性がなくなるので、今度も C, A, B は p_0 独立になります。なので、同じように $C(p), A(p), B(p)$ を $C(\boldsymbol{p}), A(\boldsymbol{p}), B(\boldsymbol{p})$ に書き直します。フェルミオンの温度グリーン関数を $C(\boldsymbol{p})=p_0-C(p)p_0,\ c(p)=p_0-C(\boldsymbol{p})$ を使って

$$
S(p)=\frac{-1}{c(p)\gamma_0+A(\boldsymbol{p})p_i\gamma^i-B(\boldsymbol{p})}=-\frac{c(p)\gamma_0+A(\boldsymbol{p})q_i\gamma^i+B(\boldsymbol{p})}{c^2(p)-A^2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}^2-B^2(\boldsymbol{p})}
$$

とすれば $C(p)$ の式は ($k_0=0$ として)

$$
\begin{aligned}
C(p)p_0-p_0 &= 2e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2}\frac{C(q)q_0}{C^2(q)q_0^2-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)} \\
C(\boldsymbol{p}) &= 2e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-\Pi^2}\frac{c(q)}{c^2(q)-A^2(q)\boldsymbol{q}^2-B^2(q)}
\end{aligned}
$$

A と B は分母の $C(q)q$ を $c^2(q)$ にすればいいだけなので、IE 近似によって

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{p}) &= 2e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2}\frac{c(q)}{c^2(q)-A^2(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^2-B^2(\boldsymbol{q})} \\
A(\boldsymbol{p}) &= 1+2e^2\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2}T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})A(\boldsymbol{q})}{c^2(q)-A^2(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^2-B^2(\boldsymbol{q})} \\
B(\boldsymbol{p}) &= 4e^2T\sum_m\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2-\Pi^2}\frac{B(\boldsymbol{q})}{c^2(q)-A^2(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^2-B^2(\boldsymbol{q})}
\end{aligned}
$$

角度積分は全く同じなので角度積分 Ω_1 と Ω_2 を入れればいいだけで

$$C(\boldsymbol{p}) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}T\sum_m\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}\frac{c(q)}{c^2(q)-A^2(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^2-B^2(\boldsymbol{q})}$$

$$\begin{aligned}A(p) = 1+2e^2\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{4|\boldsymbol{p}|^3}T\sum_m\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\big(4|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2+\Pi^2)\\ \times\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}\big)\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})A(\boldsymbol{q})}{c^2(q)-A^2(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^2-B^2(\boldsymbol{q})}\end{aligned}$$

$$B(p) = -\frac{4e^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}T\sum_m\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}\frac{B(\boldsymbol{q})}{c^2(q)-A^2(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^2-B^2(\boldsymbol{q})}$$

後は和ですが、$C(\boldsymbol{q}), A(\boldsymbol{q}), B(\boldsymbol{q})$ が和に引っかからないために簡単に実行することができます。

計算する和の形は

$$I = T\sum_m\frac{q_0}{c^2(q)-E^2}\ ,\ J = T\sum_m\frac{1}{c^2(q)-E^2}$$

I は

$$\begin{aligned}I &= T\sum_m\frac{q_0}{(q_0-C)^2-E^2}\\ &= T\sum_m\frac{iw_m+\mu}{(iw_m+\mu-C)^2-E^2}\\ &= T\sum_m\frac{iw_m+\mu-C+C}{(iw_m+\mu-C)^2-E^2}\\ &= T\sum_m\frac{iw_m+\mu'+C}{(iw_m+\mu')^2-E^2}\\ &= T\sum_m\frac{q'_0+C}{q'^2_0-E^2}\quad(q'_0 = iw_m+\mu'\ ,\ \mu'=\mu-C)\\ &= T\sum_m\frac{q'_0}{q'^2_0-E^2}+T\sum_m\frac{C}{q'^2_0-E^2}\\ &= I_1+CJ\end{aligned}$$

和は「和の計算」での μ ありでの場合を使うことで、I_1 は

$$
\begin{aligned}
I_1 = \ T\sum_m \frac{q'_0}{q'^2_0 - E^2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dq_0 \frac{1}{2}(\frac{q_0}{q_0^2 - E^2} + \frac{-q_0}{q_0^2 - E^2}) \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu'+\epsilon}^{i\infty+\mu'+\epsilon} dq_0 \frac{q_0}{q_0^2 - E^2}\frac{1}{e^{\beta(q_0-\mu')}+1} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu'-\epsilon}^{i\infty+\mu'-\epsilon} dq_0 \frac{q_0}{q_0^2 - E^2}\frac{1}{e^{\beta(\mu'-q_0)}+1} \\
&= \frac{E}{2E}\frac{1}{e^{\beta(E-\mu')}+1} - \frac{-E}{-2E}\frac{1}{e^{\beta(\mu'+E)}+1} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu')}+1} - \frac{1}{e^{\beta(E+\mu')}+1})
\end{aligned}
$$

留数は $E > \mu'$ になっているとして取っていますが、最後に絶対値がついていないことから分かるように $E > \mu'$ ではないです。($E > \mu'$ と $E < \mu'$ で場合分けして行っても同じ結果になります。経路 $C_\pm$ 内にも極がいることに注意)。J は

$$
\begin{aligned}
J &= T\sum_m \frac{1}{q'^2_0 - E^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dq_0 \frac{1}{q_0^2 - E^2} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu'+\epsilon}^{i\infty+\mu'+\epsilon} dq_0 \frac{1}{q_0^2 - E^2}\frac{1}{e^{\beta(q_0-\mu')}+1} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\mu'-\epsilon}^{i\infty+\mu'-\epsilon} dq_0 \frac{1}{q_0^2 - E^2}\frac{1}{e^{\beta(\mu'-q_0)}+1} \\
&= \ -\frac{1}{2E} + \frac{1}{2E}\frac{1}{e^{\beta(E-\mu')}+1} - \frac{1}{-2E}\frac{1}{e^{\beta(\mu'+E)}+1} \\
&= \ -\frac{1}{2E}(1 - \frac{1}{e^{\beta(E-\mu')}+1} - \frac{1}{e^{\beta(E+\mu')}+1})
\end{aligned}
$$

これも $E > \mu'$ になっているようにしています。

よって、$C(\boldsymbol{p})$ は

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{p}) &= 2e^2 T\sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2}\frac{q_0 - C(\boldsymbol{q})}{c^2(q) - A^2(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^2 - B^2(\boldsymbol{q})} \\
&= 2e^2 T\sum_m \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2}(I_1 + CJ - CJ) \\
&= e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{-|\boldsymbol{k}|^2}(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu')}+1} - \frac{1}{e^{\beta(E+\mu')}+1})
\end{aligned}
$$

A と B は J を入れればいいだけなので

$$C(\boldsymbol{p})=-\frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\big(n_F(E-\mu')-n_F(E+\mu')\big)\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}$$

$$A(\boldsymbol{p})=1-\frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\frac{A(\boldsymbol{q})}{2E}\big(4|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|-(|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2+\Pi^2\big)$$
$$\times\big(1-n_F(E-\mu')-n_F(E+\mu')\big)\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}$$

$$B(\boldsymbol{p})=\frac{e^2}{2\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^\infty d|\boldsymbol{q}|\ |\boldsymbol{q}|\frac{B(\boldsymbol{q})}{2E}\big(1-n_F(E-\mu')-n_F(E+\mu')\big)\log\frac{(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}{(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)^2+\Pi^2}$$

分布関数部分以外は一致した形になっています。そして、$\mu=0$ では $C(\boldsymbol{p})=0$ の解を持っており、$C(\boldsymbol{p})=0,\mu=0$ では

$$N_F(E^\pm)\ \Rightarrow\ n_F(E)\qquad(E\geq 0)$$

であることから、完全に一致していることがすぐにわかります。$\mu\neq 0$ では分布関数の出方が実時間法の場合と違うのでどうなるのかすぐに分かりませんが、数値計算を行ってみると μ の増加に伴って少しづつ値がずれていきます。しかし、$C(\boldsymbol{p})=0,\mu\neq 0$ では

$$N_F(E^+)\ \Rightarrow\ N_F(E)=\theta(E)n_F^-(E)+\theta(-E)n_F^+(E)$$
$$N_F(E^-)\ \Rightarrow\ N_F(-E)=\theta(-E)n_F^-(E)+\theta(E)n_F^+(E)$$

となっているので、$E\geq 0$ から

$$1-N_F(E^+)-N_F(E^-)\ \Rightarrow\ 1-n_F^-(E)-n_F^+(E)=1-n_F(E-\mu)-n_F(E+\mu)$$

なので、$C(\boldsymbol{p})=0$ だと仮定すれば、$\mu\neq 0$ でも一致します。このことを踏まえれば、$C(\boldsymbol{p})$ によって実時間法と虚時間法との差が生じていることになります ($\mu=0$ ではどちらも $C(\boldsymbol{p})=0$ の解がいたために、一致していたと見るべきなのかもしれません)。$C(\boldsymbol{p})$ は時間成分であるので、これはフェルミオンの温度グリーン関数の自己エネルギーと温度ファインマン伝播関数の自己エネルギーとは単純な解析接続だけでは繋がっていないことを間接的に示していると考えられます。