実時間法〜摂動展開〜

実時間法の摂動展開を ϕ^4 理論で行っていきます。摂動展開なんか結果だけ分かればいいので、最後のファインマン則をまとめているところまで飛ばしていいです。

実数スカラー場での相互作用なしの生成汎関数は

$$
\begin{aligned}
Z_0[J] =& \exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_a(x)\Delta_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big] \\
=& \exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_1(x)\Delta_{(11)}(x,y)J_1(y) - \frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_2(x)\Delta_{(22)}(x,y)J_2(y) \\
&- \frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_1(x)\Delta_{(12)}(x,y)J_2(y) - \frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_2(x)\Delta_{(21)}(x,y)J_1(y)\Big]
\end{aligned}
$$

ローマ文字の添え字は $1,2$ で、同じ添え字に関しては和を取らせ、J による汎関数微分は

$$
\frac{\delta J_a(x')}{\delta J_b(x)} = \delta_{ab}\delta^4(x'-x)
$$

と定義します。なので、場と源との関係は

$$
\phi_1(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(x)}\ ,\ \phi_2(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(x)}
$$

となっています。伝播関数 $i\Delta_{(ab)}$ は

$$
\begin{aligned}
i\Delta_{(11)}(x,y) &= \theta(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta \quad (C_1) \\
i\Delta_{(22)}(x,y) &= \theta(y_0-x_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta(x_0-y_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta \quad (C_2) \\
i\Delta_{(21)}(x,y) &= \langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta \quad (x_0>y_0) \\
i\Delta_{(12)}(x,y) &= \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta \quad (y_0>x_0)
\end{aligned}
$$

としています（時間経路 C_1 は $-\infty\sim+\infty$、C_2 は $+\infty\sim-\infty$ の経路）。
相互作用ありだとして、摂動展開したときの生成汎関数は

$$
\begin{aligned}
Z[J] = &\Big(1+\Big(i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1}] - i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2}]\Big)+\cdots\Big) \\
&\times\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_a(x)\Delta_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big]
\end{aligned}
$$

となっているので、ϕ^4 理論

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4
$$

での 1 次までの展開は

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \left(1 - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4z \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(z)}\right)^4 + \frac{i\lambda}{4!}\int d^4z \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(z)}\right)^4\right) \exp\Big[-\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\ J_a(x)D_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big] \\
&= Z_0[J] + Z_1[J] + \cdots
\end{aligned}
$$

$Z_0[J]$ が相互作用のない部分、$Z_1[J]$ が 1 次まで摂動展開した部分で、$D_{(ab)} = i\Delta_{(ab)}$ としています。J_2 の汎関数微分の項の符号がプラスなのは J_2 が C_2 上にいるからです。

これの汎関数微分を行っていきますが、その前にこの後ずっと出てくる項の記号を定義しておきます。J_1 による exp 部分の汎関数微分を

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J_1(z)}\exp[\quad] &= \Big(-\frac{1}{2}\int d^4y\ D_{(11)}(z,y)J_1(y) - \frac{1}{2}\int d^4y\ J_1(y)D_{(11)}(y,z) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\int d^4y\ D_{(12)}(z,y)J_2(y) - \frac{1}{2}\int d^4y\ J_2(y)D_{(21)}(y,z)\Big)\exp[\quad] \\
&= M_1(z;J)\exp[\quad]
\end{aligned}
$$

とします。M_1 を J_1 で汎関数微分したときは

$$
\frac{\delta M_1(z_1;J)}{\delta J_1(z_2)} = -\frac{1}{2}D_{(11)}(z_1,z_2) - \frac{1}{2}D_{(11)}(z_2,z_1) = -D_{(11)}(z_1,z_2)
$$

J_2 で汎関数微分したときも同じように

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J_2(z)}\exp[\quad] &= \Big(-\frac{1}{2}\int d^4y\ D_{(22)}(z,y)J_2(y) - \frac{1}{2}\int d^4y\ J_2(y)D_{(22)}(y,z) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\int d^4y\ J_1(y)D_{(12)}(y,z) - \frac{1}{2}\int d^4y\ D_{(21)}(z,y)J_1(y)\Big)\exp[\quad] \\
&= M_2(z;J)\exp[\quad]
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\delta M_2(z_1;J)}{\delta J_2(z_2)} = -\frac{1}{2}D_{(22)}(z_1,z_2) - \frac{1}{2}D_{(22)}(z_2,z_1) = -D_{(22)}(z_1,z_2)
$$

他にも M_1 を J_2 で汎関数微分したときや M_2 を J_1 で汎関数微分したときは

$$
\frac{\delta M_1(z_1;J)}{\delta J_2(z_2)} = -\frac{1}{2}D_{(12)}(z_1,z_2) - \frac{1}{2}D_{(21)}(z_2,z_1) = -D_{(12)}(z_1,z_2)
$$

$$
\frac{\delta M_2(z_1;J)}{\delta J_1(z_2)} = -\frac{1}{2}D_{(12)}(z_2,z_1) - \frac{1}{2}D_{(21)}(z_1,z_2) = -D_{(21)}(z_1,z_2)
$$

1 次のオーダでの汎関数微分を実行していきます。J_1 で 4 回汎関数微分すると

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(z)}\right)^4\exp\Big[-\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\ J_a(x)D_{(ab)}(x,y)J_1(y)\Big]\\
&=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^4}\int d^4z(\frac{\delta}{\delta J_1(z)})^3M_1(z;J)\exp[\quad]\\
&=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^4}\int d^4z(\frac{\delta}{\delta J_1(z)})^2(-D_{(11)}(z,z)+M_1^2(z;J))\exp[\quad]\\
&=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^4}\int d^4z(\frac{\delta}{\delta J_1(z)})(-D_{(11)}(z,z)M_1(z;J)-2D_{(11)}(z,z)M_1(z;J)+M_1^3(z;J))\exp[\quad]\\
&=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^4}\int d^4z(\frac{\delta}{\delta J_1(z)})(-3D_{(11)}(z,z)M_1(z;J)+M_1^3(z;J))\exp[\quad]\\
&=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^4}\int d^4z\big(3D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)-3D_{(11)}(z,z)M_1^2(z;J)-3D_{(11)}(z,z)M_1^2(z;J)+M_1^4(z;J)\big)\exp[\quad]\\
&=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^4}\int d^4z\big(3D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)-6D_{(11)}(z,z)M_1^2(z;J)+M_1^4(z;J)\big)\exp[\quad]
\end{aligned}
$$

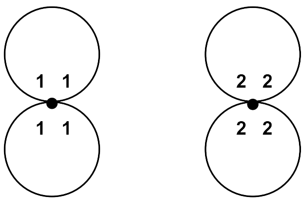
J_2 による相互作用項もまったく同じなので、添え字の 1 を 2 に変えて

$$
\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^4}\int d^4z(3D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)-6D_{(22)}(z,z)M_2^2(z;J)+M_2^4(z;J))\exp[\quad]
$$

よって、$Z_1[J]$ は

$$
\begin{aligned}
Z_1[J]=\ &\int d^4z\Big[-\frac{i\lambda}{4!}\big(3D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)-6D_{(11)}(z,z)M_1^2(z;J)+M_1^4(z;J)\big)\\
&\qquad+\frac{i\lambda}{4!}\big(3D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)-6D_{(22)}(z,z)M_2^2(z;J)+M_2^4(z;J)\big)\Big]\exp[\quad]
\end{aligned}
$$

これの $D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)$ 項と $D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)$ 項は伝播関数の添え字が 1 か 2 の違いだけで、ファインマン図としては同じ形で（図での $1,2$ は伝播関数の添え字を表します)



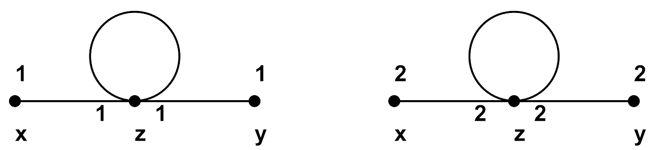
しかし、$-i\lambda$ と $+i\lambda$ のように結合定数の符号が異なっています。これはファインマン則で言えば、$D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)$ 項での頂点は $-i\lambda$、$D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)$ 項では $+i\lambda$ になっていることを意味します。頂点の符号の違いは、相互作用項が $-i\lambda\phi_1^4$ と $+i\lambda\phi_2^4$ にきれいに分離していることから来ています。ϕ_1 が 4 つあるために頂点へ添え字の 1 がついた伝播関数の線が 4 つ向かっていき、ϕ_2 では添え字の 2 がついた伝播関数の線が 4 つ向かっていき、それぞれ $-i\lambda$ と $+i\lambda$ の頂点となります。この構造のために、例えば 4 つの伝播関数の添え字が $(11),(12),(22),(22)$ となっていて、右側の添え字が頂点と繋がっている側だとすると、頂点には $1,2,2,2$ の添え字が集まりますが、そんな図は出てきません。必ず頂点は $1,1,1,1$ か $2,2,2,2$ になるように出てきます (言葉だけだと分かりづらいので、この後に出てくる図も見てください)。

伝播関数に対する寄与の形にして、ファインマン則もさらに調べます。J で 2 階汎関数微分して伝播関数への 1 次からの寄与を求めます。11 成分を見ることにするので、J_1 での 2 階汎関数微分を計算します。$D_{(11)}$ への寄与は ($J_1=J_2=0$ で明らかに消える項は無視してます)

$$
\begin{aligned}
D^{(1)}_{(11)}(x,y) =& \frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_1[J]}{\delta J_1(x)\delta J_1(y)}|_{J_1=J_2=0} \\
=& -\frac{i\lambda}{4!}\frac{1}{i^2}\frac{\delta}{\delta J_1(x)}\int d^4z\Big[3D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)M_1(y;J) - 12D_{(11)}(z,z)M_1(z)\frac{\delta M_1(z;J)}{\delta J_1(y)} \\
&- (3D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)M_1(y;J) - 12D_{(22)}(z,z)M_2(z;J)\frac{\delta M_2(z;J)}{\delta J_1(y)})\Big]\exp[\quad]|_{J_1=J_2=0} \\
=& \frac{i\lambda}{4!}\frac{\delta}{\delta J_1(x)}\int d^4z\Big[3D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)M_1(y,J) + 12D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,y)M_1(z;J) \\
&- (3D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)M_1(y,J) + 12D_{(22)}(z,z)D_{(12)}(y,z)M_2(z;J))\Big]\exp[\quad]|_{J_1=J_2=0} \\
=& \frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\Big[-3D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(y,x) - 12D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,y)D_{(11)}(z,x) \\
&- (-3D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)D_{(11)}(y,x) - 12D_{(22)}(z,z)D_{(12)}(y,z)D_{(21)}(z,x))\Big] \\
=& \frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\Big[-3D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(y,x) + 3D_{(22)}(z,z)D_{(22)}(z,z)D_{(11)}(y,x) \\
&- 12D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,y)D_{(11)}(z,x) + 12D_{(22)}(z,z)D_{(12)}(y,z)D_{(21)}(z,x)\Big]
\end{aligned}
$$

第一項と第二項は disconnected なので無視して、残りの項を見やすく並び替えれば

$$
D^{(1)}_{(11)}(x,y) = -\frac{i\lambda}{2}\int d^4zD_{(11)}(y,z)D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,x) + \frac{i\lambda}{2}\int d^4zD_{(12)}(y,z)D_{(22)}(z,z)D_{(21)}(z,x)
$$



これの第一項と第二項は添え字の $1, 2$ を無視すれば両方ともゼロ温度の場合での自己エネルギーの形そのままです。このように 2 つの項が現れるのは、上でも触れたように相互作用項が C_1 上と C_2 上の 2 つあるためです。

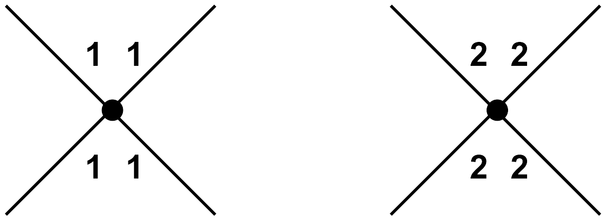
第一項と第二項

$$
-i\lambda D_{(11)}(y,z)D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,x)\ ,\ i\lambda D_{(12)}(y,z)D_{(22)}(z,z)D_{(21)}(z,x)
$$

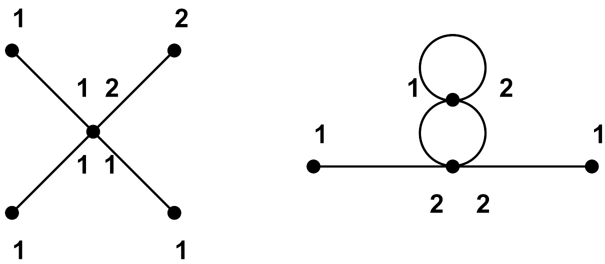
を見れば、添え字は 11 から 11 へ、12 は 22、22 は 21 へと繋がっています (式を右から読んだ場合)。つまり、ファインマン図にしたときに添え字は $(1a)(a1)$ のように繋げて、$D_{(11)}D_{(21)}$ のような繋ぎかたはしません。このことから、両端を 1 に固定し、それ以外の部分の添え字に対しては可能な接続のパターンを取るという規則が作れます (今は $J_1(x), J_1(y)$ で汎関数微分していることから x, y の位置に対応する括弧内の添え字は 1 になっていなければいけない)。ただし、可能なパターンという点には縛りが存在します。それは

$$
D_{(11)}(y,z)D_{(12)}(z,z)D_{(21)}(z,x)
$$

このような項が出てきていないことから分かるように、頂点に入ってくる 4 つの線 (ϕ^4 理論なので頂点には 4 つの線がくる) の添え字は $1,1,1,1$ か $2,2,2,2$ でなければいけないというものです。これは頂点が



となっていなければいけないことを意味し



このような図を禁止しています。というわけで実時間法では、2 つの頂点があり、その頂点の構造に従いながら可能な添え字のパターンを取るという規則がファインマン則に加わります。

伝播関数のフーリエ変換を

$$\int d^4w_1 d^4w_2 e^{ip_1w_1}e^{ip_2w_2}G(w_1,w_2) = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)G(p_1,p_2)$$

と定義して、運動量表示に変換すると

$$\begin{aligned}
&\int d^4xd^4yK(x,y)e^{ip_1x}e^{ip_2y} \\
&\quad = \int d^4xd^4yd^4zD_{(11)}(x,z)D_{(11)}(z,z)D_{(11)}(z,y)e^{ip_1x}e^{ip_2y} \\
&\quad = \int d^4xd^4yd^4z\int\frac{d^4q_1d^4q_2d^4q_3}{(2\pi)^{12}} \\
&\qquad \times D_{(11)}(q_1)D_{(11)}(q_2)D_{(11)}(q_3)e^{ip_1x}e^{ip_2y}e^{-iq_1(x-z)}e^{-iq_2(z-z)}e^{-iq_3(z-y)} \\
&\quad = \int d^4xd^4yd^4z\int\frac{d^4q_1d^4q_2d^4q_3}{(2\pi)^{12}} \\
&\qquad \times D_{(11)}(q_1)D_{(11)}(q_2)D_{(11)}(q_3)e_1^{i(p_1-q_1)x}e^{i(q_1-q_3)z}e^{i(q_3+p_2)y} \\
&\quad = \int d^4q_1d^4q_2d^4q_3D_{(11)}(q_1)D_{(11)}(q_2)D_{(11)}(q_3)\delta^4(p_1-q_1)\delta^4(q_1-q_3)\delta^4(q_3+p_2) \\
&\quad = \int d^4q_1d^4q_2D_{(11)}(q_1)D_{(11)}(q_2)D_{(11)}(-p_2)\delta^4(p_1-q_1)\delta^4(q_1+p_2) \\
&\quad = \int d^4q_2D_{(11)}(p_1)D_{(11)}(q_2)D_{(11)}(-p_2)\delta^4(p_1+p_2) \\
&\quad = \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}D_{(11)}(p_1)D_{(11)}(q_2)D_{(11)}(-p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)
\end{aligned}$$

となるので、運動量保存のデルタ関数を外すこと ($p_1=-p_2=p$ とする) で

$$D^{(1)}_{(11)}(p)=-\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(11)}(p)D_{(11)}(q)D_{(11)}(p)+\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(22)}(q)D_{(21)}(p)$$

よって 1 次のオーダまででの 11 成分の伝播関数は

$$G_{(11)}(p)=D_{(11)}(p)-\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(11)}(p)D_{(11)}(q)D_{(11)}(p)+\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(22)}(q)D_{(21)}(p)$$

となります。これの特徴は後にまわします。
ファインマン則の例をもう 1 つ示すために ϕ^3 理論の結果を示しておきます。ϕ^3 理論は

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

となっていて、摂動展開したときの寄与は 2 次のオーダからなので

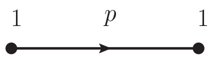
$$Z_2[J]=\frac{1}{2}\Big(-\frac{i\lambda}{3!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(z)}\right)^3+\frac{i\lambda}{3!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(z)}\right)^3\Big)^2\exp\Big[-\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\ J_a(x)D_{ab}(x,y)J_b(y)\Big]$$

となります。これを計算すると、ϕ^3 理論での 2 次のオーダまでの 11 成分の伝播関数は運動量表示で

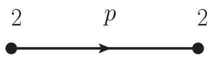
$$\begin{aligned}
&G_{(11)}(p)\\
&=\ D_{(11)}(p)\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big((i\lambda)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(11)}(p)D_{(11)}(q)D_{(11)}(0)D_{(11)}(p)+(i\lambda)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(22)}(q)D_{(22)}(0)D_{(21)}(p)\\
&\qquad-(i\lambda)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(11)}(q)D_{(12)}(0)D_{(21)}(p)-(i\lambda)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(11)}(q)D_{(12)}(0)D_{(21)}(p)\Big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big((i\lambda)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(11)}(p)D_{(11)}(q)D_{(11)}(p-q)D_{(11)}(p)+(i\lambda)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(22)}(q)D_{(22)}(p-q)D_{(21)}(p)\\
&\qquad-(i\lambda)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(21)}(q)D_{(21)}(p-q)D_{(11)}(p)-(i\lambda)^2\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}D_{(11)}(p)D_{(12)}(q)D_{(12)}(p-q)D_{(21)}(p)\Big)
\end{aligned}$$

と求まります。このときも頂点は $-i\lambda$ と $+i\lambda$ があり、頂点に入ってくる線が $1,1,1$ だと $-i\lambda$ で、$2,2,2$ だと $+i\lambda$ です。2 次のオーダまでの展開なので $(-i\lambda)^2$ と $(+i\lambda)^2$ が出てくるので、全部の項の符号がプラスになるように思えますが、$(-i\lambda)(+i\lambda)$ の組み合わせも可能になっているために、符号がマイナスになっている項も出てきています。

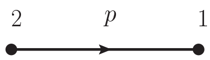
スカラー場でのファインマン則をまとめます。伝播関数は 4 つあり



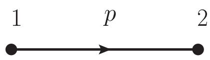
$= i\Delta_{(11)}(p)$



$= i\Delta_{(22)}(p)$

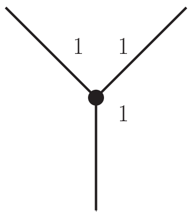


$= i\Delta_{(21)}(p)$

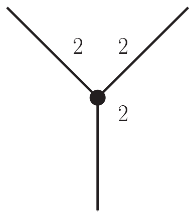


$= i\Delta_{(12)}(p)$

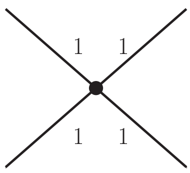
頂点は 2 つで、ϕ^3 理論と ϕ^4 理論それぞれで



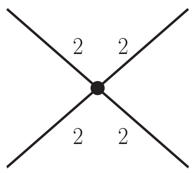
$= -i\lambda$



$= +i\lambda$



$= -i\lambda$



$= +i\lambda$

頂点の黒丸の近くにいる $1, 2$ は頂点に入る伝播関数の添え字に対応します。この頂点の構造を踏まえつつ内線の添え字が潰れるように外線と内線や内線と内線を繋いでいきます。後はゼロ温度のファインマン則と同じです。

摂動展開ができたので、その特徴的な構造について見ておきます。ϕ^3 理論、ϕ^4 理論の両方でのファイマン図はゼロ温度と同じ構成になっているものがあるのはすぐに分かって、それはその図の伝播関数が全て 11 成分の伝播関数によって書かれている図です。この図はゼロ温度極限を取ればそのままゼロ温度の自己エネルギーの図になります。その上、「補足：実時間の伝播関数」でも触れたように単純な実時間での定式化では 11 成分の伝播関数のみによって自己エネルギーは作られます。そうすると、増大したファインマン図には意味がないように見えますが、ちゃんと意味があり、無視すると問題を起こします。

何が問題なのかは摂動展開の結果からすぐに分かります。ϕ^4 理論での 1 次のオーダまででの伝播関数は

$$G_{(11)}(p) = D_{(11)}(p) - \frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(11)}(p)D_{(11)}(q)D_{(11)}(p) + \frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(12)}(p)D_{(22)}(q)D_{(21)}(p) \qquad (1)$$

となっていました。これの自己エネルギー部分の積分は実行できたとして

$$-\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(11)}(q) = \frac{\Sigma_1}{i}\ ,\ \frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}D_{(22)}(q) = \frac{\Sigma_2}{i}$$

とします (Σ_1, Σ_2 は運動量依存していない)。このとき、もし第三項がいないとすると

$$
\begin{aligned}
G_{(11)}(p) &= D_{(11)}(p) + \frac{\Sigma_1}{i} D_{(11)}(p) D_{(11)}(p) \\
&= D_{(11)}(p) + \frac{\Sigma_1}{i}\Big(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)\Big)\Big(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)\Big)
\end{aligned}
$$

となって、$\delta^2(p^2-m^2)$ という数学的に定義できないデルタ関数の 2 乗が現れてしまいます。このデルタ関数の 2 乗のせいで摂動展開したときに伝播関数が定義できなくなってしまうために、摂動展開が使えなくなります。

では、無視した第三項がいるとどうなるのかを見ます。Σ_1 と Σ_2 実際に計算してみると

$$
\frac{\Sigma_1}{i} = -\frac{\Sigma_2}{i}
$$

となっています (この関係自体は「伝播関数の対角化」で出てきています)。なので $\Sigma_1 = -\Sigma_2 = \Sigma$ とすれば

$$
\begin{aligned}
G_{(11)}(p) &= D_{(11)}(p) + \frac{\Sigma}{i} D_{(11)}(p) D_{(11)}(p) - \frac{\Sigma}{i} D_{(12)}(p) D_{(21)}(p) \\
&= D_{(11)}(p) + \frac{\Sigma}{i}\big(D_{(11)}(p) D_{(11)}(p) - D_{(12)}(p) D_{(21)}(p)\big)
\end{aligned}
$$

$D^2_{(11)}(p)$ は

$$
\begin{aligned}
D^2_{(11)}(p) &= (\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon})^2 + (2\pi)^2 n_B^2(|p_0|)\delta^2(p^2-m^2) + \frac{4i\pi}{p^2-m^2+i\epsilon} n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2) \\
&= (\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon})^2 + (2\pi)^2 n_B^2(|p_0|)\delta^2(p^2-m^2) + 4i\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2) P\frac{1}{p^2-m^2} + (2\pi)^2 n_B(|p_0|)\delta^2(p^2-m^2)
\end{aligned}
$$

$$
\Big(\frac{1}{p^2-m^2\pm i\epsilon} = P\frac{1}{p^2-m^2} \mp i\pi\delta(p^2-m^2)\Big)
$$

P は主値です。$D_{(12)}(p) D_{(21)}(p)$ は

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^2\big[\theta(-p_0) + n_B(|p_0|)\big]\big[\theta(p_0) + n_B(|p_0|)\big]\delta^2(p^2-m^2) \\
&= (2\pi)^2\big[\theta(-p_0) n_B(|p_0|) + \theta(p_0) n_B(|p_0|) + n_B^2(|p_0|)\big]\delta^2(p^2-m^2) \\
&= (2\pi)^2[n_B(|p_0|) + n_B^2(|p_0|)]\delta^2(p^2-m^2)
\end{aligned}
$$

なので

$$
D^2_{(11)}(p) - D_{(12)}(p) D_{(21)}(p) = (\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon})^2 + 4i\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2) P\frac{1}{p^2-m^2} \tag{2}
$$

となって、問題のデルタ関数の 2 乗が消えてくれます。このように、実時間での定式化では 11 成分以外の成分を含めることで数学的な問題がなくなり、摂動展開が使えるようになります。

デルタ関数の問題を取り除くもっと便利な方法があるのでそれも示しておきます。11 成分の伝播関数を m^2 で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial m^2}(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}+2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2))$$
$$=\frac{i}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}+n_B(|p_0|)\frac{\partial}{\partial m^2}2\pi\delta(p^2-m^2)$$
$$=\frac{i}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}+n_B(|p_0|)\frac{\partial}{\partial m^2}\Big(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}-\frac{i}{p^2-m^2-i\epsilon}\Big)$$
$$=\frac{i}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}+in_B(|p_0|)\Big(\frac{1}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}-\frac{1}{(p^2-m^2-i\epsilon)^2}\Big)$$
$$=\frac{i}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}+in_B(|p_0|)\Big(\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}-\frac{1}{p^2-m^2-i\epsilon}\Big)\Big(\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}+\frac{1}{p^2-m^2-i\epsilon}\Big)$$
$$=\frac{i}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}+in_B(|p_0|)(-2i\pi)\delta(p^2-m^2)P\frac{2}{p^2-m^2}$$
$$=\frac{i}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}+4\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)P\frac{1}{p^2-m^2}$$

i をかければ

$$i\frac{\partial}{\partial m^2}D_{(11)}(p)=(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon})^2+4i\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)P\frac{1}{p^2-m^2}$$

これは (2) と同じになっているので

$$i\frac{\partial}{\partial m^2}D_{(11)}(p)=D^2_{(11)}(p)-D_{(12)}(p)D_{(21)}(p)$$

という関係であることが分かります。デルタ関数の微分は数学的に定義できるために、このように微分を使った形で書くことで数学上の問題がおきなくなります。つまり、(1) を

$$G_{(11)}(p)=D_{(11)}(p)+\Sigma\frac{\partial D_{(11)}(p)}{\partial m^2}$$

という形で書けてしまいます。

　m^2 の微分を使うことは計算上でも役に立ちます。例えば

$$(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon})^3-(\frac{i}{p^2-m^2-i\epsilon})^3$$

のような計算が実際に出てきますが

$$(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon})^3-(\frac{i}{p^2-m^2-i\epsilon})^3=-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial m^2})^2(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}+\frac{i}{p^2-m^2-i\epsilon})=-\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial m^2})^2 2\pi\delta(p^2-m^2)$$

とすることで、デルタ関数の n 乗を微分の形に変えることができます。