実時間法〜伝播関数の性質〜

実時間法で出てくる 4 つの伝播関数の性質をみていきます。最後に双曲線関数と三角関数を使ったボソン、フェルミオン伝播関数の表現を与えています。
ここでは D をボソン、S をフェルミオン、G をボソン、フェルミオン両方の場合というように区別します。「実時間法」でボソンの伝播関数を Δ とし、$\Delta_{(12)}, \Delta_{(21)}$ の符号を反転したものを D としましたが、ここではそれとは無関係に Δ を D に変えています。
ここでの Δ_F^* はガンマ行列を除いた部分の複素共役を意味しています。言い換えればガンマ行列を実数として複素共役を取っています。

ボソンとフェルミオンでの伝播関数をまとめると、ボソンでは

$$
iD_{(11)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)
$$

$$
iD_{(22)}(p) = -\frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)
$$

$$
iD_{(12)}(p) = 2\pi[n_B(|p_0|) + \theta(-p_0)]\delta(p^2 - m^2)
$$

$$
iD_{(21)}(p) = 2\pi[n_B(|p_0|) + \theta(p_0)]\delta(p^2 - m^2)
$$

フェルミオンでは

$$
iS_{(11)}(p) = (\not{p} + m)\Big[\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big]
$$

$$
iS_{(22)}(p) = (\not{p} + m)\Big[-\frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big]
$$

$$
iS_{(12)}(p) = 2\pi(\not{p} + m)\big[-n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)\big]\delta(p^2 - m^2)
$$

$$
iS_{(21)}(p) = 2\pi(\not{p} + m)\big[-n_F(|p_0|) + \theta(p_0)\big]\delta(p^2 - m^2)
$$

$\theta(p_0)$ は階段関数、n_B, n_F はボソン、フェルミオンの分布関数です。C_1 から C_2 にいくときに、$-i\sigma(\sigma < \beta)$ だけずらしたときは $G_{(12)}$ に $e^{\sigma p_0}$、$G_{(21)}$ に $e^{-\sigma p_0}$ がつきますが、密度ありだと p_0 が $p_0 - \mu$ になります。簡単にするために化学ポテンシャルは無視していきます。基本的には同じ性質を持ちますが密度ありでは p_0 が $p_0 - \mu$ に変更されることに気をつけてください。
　実時間での伝播関数の面倒な点は、デルタ関数を含んでいるために、解析的な構造 (複素解析の意味で) を相互作用がない段階で持っていないということです。デルタ関数は

$$
\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon})
$$

となっており、複素平面上で解析的ではないです。ただでさえ、伝播関数が 4 つ出てきて面倒な上に、単体でも複雑な構造をしていることがこの点からも分かります。

伝播関数の 4 つの成分から分かることを見ていきます。まず、$S_{(21)}(p)$ と $S_{(12)}(p)$ の差を見てみると

$$\begin{aligned}
&iS_{(21)}(p) - iS_{(12)}(p)\\
&\quad = -2\pi(\not{p}+m)[n_F(|p_0|) - \theta(p_0)]\delta(p^2-m^2) + 2\pi(\not{p}+m)[n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)\\
&\quad = 2\pi(\not{p}+m)[\theta(p_0) - \theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)\\
&\quad = 2\pi\epsilon(p_0)(\not{p}+m)[\theta(p_0) - \theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)
\end{aligned}$$

となっており、ボソンでも同様です。これは最低次でのスペクトル関数に対応して、それぞれを ρ_F, ρ_B として

$$\rho_F = iS_{(21)}(p) - iS_{(12)}(p)$$

$$\rho_B = iD_{(21)}(p) - iD_{(12)}(p)$$

$G_{(21)}(x,y)$ と $G_{(12)}(x,y)$ が $G^{>}(x,y)$ と $G^{<}(x,y)$ に対応していることから見れば当たり前のことです (相互作用ありでも成立している)。

スペクトル関数をもっと分かりやすい形で表現することができます。ゼロ温度部分の伝播関数とその複素共役の差が

$$\begin{aligned}
\Delta(p) - \Delta^*(p) &= \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} - \frac{1}{p^2-m^2-i\epsilon}\\
&= P\frac{1}{p^2-m^2} - i\pi\delta(p^2-m^2) - \big(P\frac{1}{p^2-m^2} + i\pi\delta(p^2-m^2)\big)\\
&= -2i\pi\delta(p^2-m^2) \qquad (1)
\end{aligned}$$

となっていることを使って伝播関数を書き直すと

$$D_{(12)}(p) = [n_B(|p_0|) + \theta(-p_0)][\Delta(p) - \Delta^*(p)]$$

$$D_{(21)}(p) = [n_B(|p_0|) + \theta(p_0)][\Delta(p) - \Delta^*(p)]$$

$$S_{(12)}(p) = -[n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)][\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)]$$

$$S_{(21)}(p) = -[n_F(|p_0|) - \theta(p_0)][\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)]$$

$\Delta_F(p)$ は

$$\Delta_F(p) = (\not{p}+m)\Delta(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}\ ,\ \Delta_F^*(p) = (\not{p}+m)\Delta^*(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2-i\epsilon}$$

ここでは $\Delta_F(p)$ に対する「$*$」はガンマ行列を除いた複素共役を表すようにします。$\Delta^*(p)$ はただの複素共役です。記号の区別をしたくなければ、例えば $A = \not{p}+m$ として、$\Delta_F(p) = A\Delta(p)$ とすれば $A\Delta^*(p)$ と書けます。

これらを使うことでスペクトル関数は

$$\begin{aligned}\rho_F(p) &= i[\theta(p_0)(\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p))-\theta(-p_0)(\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p))]\\ &= i\epsilon(p_0)[\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]\end{aligned}$$

$$\rho_B(p) = i\epsilon(p_0)[\Delta(p)-\Delta^*(p)]$$

と表現できます。このスペクトル関数の形は最低次の伝播関数の形との対応から求めていますが、厳密な伝播関数を使った $G^>_{exact}-G^<_{exact}$ を出発点とすることでも同様の形になるので、最低次の伝播関数だけでなく、厳密な場合でも成立します ($\Delta(p),\Delta_F(p)$ を厳密な場合のものに変えればいい。「伝播関数の対角化」参照)。

他にも 4 つの伝播関数を見比べると、関係として

$$G_{(11)}+G_{(22)} = G_{(12)}+G_{(21)}$$

というのを持っていることが分かります。この関係から、独立な伝播関数は 3 つであることになります。

$G_{(12)}$ と $G_{(21)}$ は演算子表記で (簡単のために 3 次元空間を外しています)

$$iG_{(12)}(t,t') = \pm\langle\phi(t')\phi(t)\rangle_\beta\ ,\ iG_{(21)}(t,t') = \langle\phi(t)\phi(t')\rangle_\beta$$

プラスがボソン、マイナスがフェルミオンです ($G_{(12)}$ では C_1 に t, C_2 に t'、$G_{(21)}$ では C_1 に t', C_2 に t)、これは $iG_{(12)}(t,t') = G^<(t,t')$ と $iG_{(21)}(t,t') = G^>(t,t')$ なので、久保-Martin-Schwinger の関係より (「温度グリーン関数」参照)

$$G_{(12)}(p) = \pm e^{-\beta p_0}G_{(21)}(p)$$

という関係を持っていることが分かります。ボソンがプラス、フェルミオンがマイナスです。この関係は形式の違いでいろいろと形が変わるので注意が必要です。密度があるときでは、H の形式なら $e^{-\beta p_0}$ は $e^{-\beta(p_0-\mu)}$、K の形式なら $e^{-\beta p_0}$ のままになります (「有限密度でのフェルミオン〜別形式〜」参照)。時間経路を $-i\beta/2$ 動かしたときは $G_{(12)}(p) = \pm G_{(21)}(p)$ で、H の形式では $G_{(12)}(p) = \pm e^{\beta\mu}G_{(21)}(p)$、$K$ の形式では $G_{(12)}(p) = \pm G_{(21)}(p)$ です。

実時間法でもとめられる伝播関数からも遅延、先進グリーン関数を求めることが出来ます。遅延、先進グリーン関数は「温度グリーン関数」で (ここでの話と合わせるために $G^>, G^<$ でも i が外に出てくるとします)

$$G_R(x,y) = i\theta(x_0-y_0)(iG^>(x,y)-iG^<(x,y)) = i\theta(x_0-y_0)(\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta \mp \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta) \tag{2a}$$

$$G_A(x,y) = -i\theta(y_0-x_0)(iG^>(x,y)-iG^<(x,y)) = -i\theta(y_0-x_0)(\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta \mp \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta) \tag{2b}$$

このように与えました (最右辺ではマイナスがボソン、プラスがフェルミオン)。虚時間法ではユークリッド空間なので、遅延、先進グリーン関数に対しても i がつかないユークリッド空間的な形になるように定義されています。ここで迷惑な話を一つしておきます。ゼロ温度の遅延グリーン関数は、例えばボソンでは

$$iG_R^{(T=0)}(x,y) = \theta(x_0-y_0)\langle[\phi(x),\phi(y)]\rangle_0 = \theta(x_0-y_0)(\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_0 - \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_0)$$

このように与えるのが一般的です (こっちの $\langle\ \rangle_0$ は真空期待値です)。見て分かるように左辺に i をつけて右辺から i がなくなっています。このゼロ温度の定義では (実数スカラー場の場合)

$$(\Box + m^2)iD_R^{(T=0)}(x,y) = -i\delta^4(x-y)$$

のようになっており、i を D_R に含めれば定義どおりの伝播関数に対応します (場の量子論の「クライン・ゴルドン場の伝播関数」参照)。これに対して、有限温度での定義 (2a)、(2b) は虚時間によるユークリッド空間での伝播関数に対応するものなので、i をはずしてマイナスをつけています。こんな事情があり、ここでの実時間法による伝播関数は完全にミンコフスキー空間によって計算されているために、ゼロ温度での遅延、先進グリーン関数の定義を使った方が便利です (遅延、先進グリーン関数の定義は本によって違うことが多々あるので注意した方がいいです)。

というわけで、実時間法では遅延、先進グリーン関数を

$$iG_R(x,y) = \theta(x_0-y_0)(iG^>(x,y) - iG^<(x,y))$$

$$iG_A(x,y) = -\theta(y_0-x_0)(iG^>(x,y) - iG^<(x,y))$$

と定義するものが一般的に使われ、ここでもこれを使います (上でのユークリッド的なのを G'_R とすれば、$iG_R = -iG'_R$)。上でも言ったように、「温度グリーン関数」ではユークリッド空間なので、グリーン関数に i をつける必要性がないために、遅延、先進グリーン関数に i をつけていませんでしたが、実時間ではミンコフスキー空間なので、今の定義に合わせるために i を外に出して書いています。

$G_{R,A}$ は $G_{(11)}, G_{(22)}, G_{(12)}, G_{(21)}$ を使うことで

$$G_R(x,y) = G_{(11)}(x,y) - G_{(12)}(x,y) = G_{(21)}(x,y) - G_{(22)}(x,y)$$

$$G_A(x,y) = G_{(11)}(x,y) - G_{(21)}(x,y) = G_{(12)}(x,y) - G_{(22)}(x,y)$$

として求められることが分かります。これは演算子のときの表現 (ボソンの場合)

$$iD_{(11)}(x,y) = \theta(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta$$

$$iD_{(22)}(x,y) = \theta(x_0-y_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta + \theta(y_0-x_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta$$

$$iD_{(12)}(x,y) = \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta \quad (x_0\text{が } C_1, y_0\text{が } C_2)$$

$$iD_{(21)}(x,y) = \langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta \quad (x_0\text{が } C_2, y_0\text{が } C_1)$$

$$iD_R(x,y) = \theta(x_0-y_0)(\langle\phi(x)\phi(y\rangle_\beta - \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta)$$

$$iD_A(x,y) = -\theta(y_0-x_0)(\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta - \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta)$$

と与えられることをみれば求められます。例えば

$$
\begin{aligned}
iD_{(11)}(x,y)-iD_{(12)}(x,y)=&\theta(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta+\theta(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta-\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta\\
=&\theta(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta+\theta(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta\\
&-(\theta(x_0-y_0)+\theta(y_0-x_0))\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta\\
=&\theta(x_0-y_0)(\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta-\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta)
\end{aligned}
$$

フェルミオンでも

$$
\begin{aligned}
iS_{(11)}(x,y)-iS_{(12)}(x,y)=&\theta(x_0-y_0)S^>(x,y)+\theta(y_0-x_0)S^<(x,y)-S^<(x,y)\\
=&\theta(x_0-y_0)(S^>(x,y)-S^<(x,y))
\end{aligned}
$$

となるので、$iG_R(x,y)$ に対応します。

実時間法の伝播関数は別の形で書くこともできるので、それもついでに出しておきます。伝播関数は分布関数に対しては p_0 の絶対値が入るようにして求めましたが、絶対値を取らない段階で話を進めます (絶対値を使った形でも同じようにできます)。

フェルミオンの $S_{(11)}(p)$ を求めるときに

$$
2\pi\epsilon(p_0)n_F(p_0)\delta(p^2-m^2)
$$

を絶対値を使った形に書き換えましたが、この段階でとめます。この式にはゼロ温度の伝播関数に対応する部分が含まれているので、それを抜くために、「実時間法〜ディラック場〜」での (3) 式

$$
2\pi\epsilon(p_0)n_F(p_0)\delta(p^2-m^2)+\frac{2\pi}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta(p_0+E_{\boldsymbol{p}})=2\pi\epsilon(p_0)n_F(p_0)\delta(p^2-m^2)+2\pi\theta(-p_0)\delta(p^2-m^2)
$$

を使います。これが、$S_{(11)}(p)$ の第二項になります。$S_{(12)}(p),S_{(21)}(p)$ はそのままの形を使えばいいので

$$S_{(11)}(p) = (\not{p}+m)\Big[\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} + 2i\pi(\epsilon(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0))\delta(p^2-m^2)\Big]$$

$$= \Delta_F(p) - (\epsilon(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0))[\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]$$

$$S_{(22)}(p) = (\not{p}+m)\Big[-\frac{1}{p^2-m^2-i\epsilon} + 2i\pi(\epsilon(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0))\delta(p^2-m^2)\Big]$$

$$= -\Delta_F^*(p) - (\epsilon(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0))[\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]$$

$$S_{(12)}(p) = 2i\pi(\not{p}+m)\epsilon(p_0)n_F(p_0)\delta(p^2-m^2)$$

$$= -\epsilon(p_0)n_F(p_0)[\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]$$

$$S_{(21)}(p) = -2i\pi(\not{p}+m)\epsilon(p_0)[1-n_F(p_0)]\delta(p^2-m^2)$$

$$= \epsilon(p_0)[1-n_F(p_0)][\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]$$

ボソンでは

$$D(x,x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')}[\theta(t-t')+n_B(k_0)]\rho_B(k)$$

によって同じように計算されていくことを考えれば

$$\rho_B(p) = 2\pi\epsilon(p_0)\delta(p^2-m^2)$$

と

$$n_B(p_0) = \theta(p_0)n_B(|p_0|) - \theta(-p_0)n_B(|p_0|) - \theta(-p_0)$$

より

$$\begin{aligned} n_B(p_0)\rho_B(p) &= 2\pi\epsilon(p_0)n_B(p_0)\delta(p^2-m^2) \\ &= 2\pi(\theta(p_0)-\theta(-p_0))[\theta(p_0)n_B(|p_0|)-\theta(-p_0)n_B(|p_0|)-\theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2) \\ &= 2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2) + 2\pi\theta(-p_0)\delta(p^2-m^2) \end{aligned}$$

となっています。これの第二項が階段関数の項とくっついて、ゼロ温度の伝播関数の形になるので

$$\begin{aligned} n_B(p_0)\rho_B(p) - 2\pi\theta(-p_0)\delta(p^2-m^2) &= 2\pi\epsilon(p_0)n_B(p_0)\delta(p^2-m^2) - 2\pi\theta(-p_0)\delta(p^2-m^2) \\ &= 2\pi[\theta(p_0)n_B(p_0) - \theta(-p_0)(1+n_B(p_0))]\delta(p^2-m^2) \end{aligned}$$

とすることで $D_{(11)}$ は

$$
\begin{aligned}
D_{(11)}(p) &= \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} - in_B(p_0)\rho_B(p) \\
&= \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} - 2i\pi[\theta(p_0)n_B(p_0) - \theta(-p_0)(1+n_B(p_0))]\delta(p^2-m^2)
\end{aligned}
$$

他も同様にしていくことで

$$
D_{(11)}(p) = \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} - 2i\pi[\epsilon(p_0)n_B(p_0) - \theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)
$$

$$
= \Delta(p) + [\epsilon(p_0)n_B(p_0) - \theta(-p_0)][\Delta(p) - \Delta^*(p)]
$$

$$
D_{(22)}(p) = \frac{-1}{p^2-m^2-i\epsilon} - 2i\pi[\epsilon(p_0)n_B(p_0) - \theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)
$$

$$
= -\Delta^*(p) + [\epsilon(p_0)n_B(p_0) - \theta(-p_0)][\Delta(p) - \Delta^*(p)]
$$

$$
D_{(12)}(p) = -2i\pi\epsilon(p_0)n_B(p_0)\delta(p^2-m^2)
$$

$$
= \epsilon(p_0)n_B(p_0)[\Delta(p) - \Delta^*(p)]
$$

$$
D_{(21)}(p) = -2i\pi\epsilon(p_0)(1+n_B(p_0))\delta(p^2-m^2)
$$

$$
= \epsilon(p_0)(1+n_B(p_0))[\Delta(p) - \Delta^*(p)]
$$

これらをさらに見た目を綺麗にすることができます。
　先にフェルミオンを見ると、伝播関数は

$$
\begin{aligned}
S_{(11)}(p) &= \Delta_F(p) - (\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p))\sin^2\theta \\
&= \Delta_F(p)(1-\sin^2\theta) + \Delta_F^*(p)\sin^2\theta \\
&= \Delta_F(p)\cos^2\theta + \Delta_F^*(p)\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

このように書くことができて、三角関数は

$$
\sin^2\theta = \epsilon(p_0)n_F(p_0) + \theta(-p_0) = \theta(p_0)n_F(p_0) + \theta(-p_0)(1-n_F(p_0))
$$

$$
\cos^2\theta = -\epsilon(p_0)n_F(p_0) + \theta(p_0) = \theta(p_0)(1-n_F(p_0)) + \theta(-p_0)n_F(p_0)
$$

このように定義されます。また、$\sin^2\theta\cos^2\theta$ は

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta\cos^2\theta &= [\theta(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0)(1-n_F(p_0))][\theta(p_0)(1-n_F(p_0))+\theta(-p_0)n_F(p_0)] \\
&= \theta(p_0)n_F(p_0)(1-n_F(p_0))+\theta(-p_0)(1-n_F(p_0))n_F(p_0) \\
&= n_F(p_0)(1-n_F(p_0)) \\
&= n_F(p_0)\frac{e^{\beta p_0}}{e^{\beta p_0}+1} \\
&= e^{\beta p_0}n_F^2(p_0)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

このようになっています。$S_{(12)}(p)$ も同じように書き換えると

$$
\begin{aligned}
S_{12}(p) &= 2i\pi(\not{p}+m)\epsilon(p_0)n_F(p_0)\delta(p^2-m^2) \\
&= -[\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]\epsilon(p_0)n_F(p_0) \\
&= -\exp[-\beta p_0/2][\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

$\sin\theta\cos\theta$ は

$$\sin\theta\cos\theta=\epsilon(p_0)\exp[\beta p_0/2]n_F(p_0)$$

となります。これの二乗をとれば

$$(\sin\theta\cos\theta)^2=(\theta(p_0)+\theta(-p_0))\exp[\beta p_0](\frac{1}{e^{\beta p_0}+1})^2=e^{\beta p_0}(\frac{1}{e^{\beta p_0}+1})^2$$

となるので、ちゃんと (3) と一致します。$S_{22}(p)$ と $S_{21}(p)$ も同じようにすることで

$$S_{(11)}(p)=\Delta_F(p)\cos^2\theta+\Delta_F^*(p)\sin^2\theta$$

$$S_{(22)}(p)=-\Delta_F(p)\sin^2\theta-\Delta_F^*(p)\cos^2\theta$$

$$S_{(12)}(p)=-e^{-\beta p_0/2}[\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]\sin\theta\cos\theta$$

$$S_{(21)}(p)=e^{\beta p_0/2}[\Delta_F(p)-\Delta_F^*(p)]\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin^2\theta=\theta(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0)(1-n_F(p_0))$$

$$\cos^2\theta=\theta(p_0)(1-n_F(p_0))+\theta(-p_0)n_F(p_0)$$

$$\sin\theta\cos\theta=\epsilon(p_0)e^{\beta p_0/2}n_F(p_0)$$

また

$$\theta(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0)(1-n_F(p_0))=\theta(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0)n_F(-p_0)$$

$$\begin{aligned}
&\theta(p_0)(1-n_F(p_0))+\theta(-p_0)n_F(p_0)\\
&\quad=\theta(p_0)-\theta(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0)n_F(p_0)\\
&\quad=\theta(p_0)-\theta(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0)(1-n_F(-p_0))\\
&\quad=1-\theta(p_0)n_F(p_0)-\theta(-p_0)n_F(-p_0)
\end{aligned}$$

なので

$$N_F(p_0)=\theta(p_0)n_F(p_0)+\theta(-p_0)n_F(-p_0)$$

とすることで

$$\sin\theta=\sqrt{N_F}\ ,\ \cos\theta=\epsilon(p_0)\sqrt{1-N_F(p_0)}$$

と書けます。cos の $\epsilon(p_0)$ は

$$\begin{aligned}
&\sqrt{N_F}\sqrt{1-N_F(p_0)}\\
&\quad=(\theta(p_0)\sqrt{n_F(p_0)}+\theta(-p_0)\sqrt{n_F(-p_0)})(\theta(p_0)\sqrt{1-n_F(p_0)}+\theta(-p_0)\sqrt{1-n_F(-p_0)})\\
&\quad=(\theta(p_0)\sqrt{n_F(p_0)}+\theta(-p_0)\sqrt{n_F(-p_0)})(\theta(p_0)e^{\beta p_0/2}\sqrt{n_F(p_0)}+\theta(-p_0)e^{-\beta p_0/2}\sqrt{n_F(-p_0)})\\
&\quad=\theta(p_0)e^{\beta p_0/2}n_F(p_0)+\theta(-p_0)e^{-\beta p_0/2}n_F(-p_0)\\
&\quad=\theta(p_0)e^{\beta p_0/2}n_F(p_0)+\theta(-p_0)e^{\beta p_0/2}n_F(p_0)
\end{aligned}$$

となっているので、$\sin\theta\cos\theta$ と一致させるためにつけています。
ボソンでは $\Delta_F(p)$ が $\Delta(p)$ になり、分布関数の符号が違うだけなので、同じようにすればいいです。$D_{(11)}(p)$ は

$$\begin{aligned}
D_{(11)}(p)&=\Delta(p)+(\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh^2\theta\\
&=\Delta(p)(1+\sinh^2\theta)-\Delta^*(p)\sinh^2\theta\\
&=\Delta(p)\cosh^2\theta-\Delta^*(p)\sinh^2\theta
\end{aligned}$$

と書け、双曲線関数は

$$\sinh^2\theta=\epsilon(p_0)n_B(p_0)-\theta(-p_0)=\theta(p_0)n_B(p_0)-\theta(-p_0)(1+n_B(p_0))$$

$$\cosh^2\theta=\epsilon(p_0)n_B(p_0)+\theta(p_0)=\theta(p_0)(1+n_B(p_0))-\theta(-p_0)n_B(p_0)$$

と定義されます。$\sinh^2\theta\cosh^2\theta$ は

$$\sinh^2\theta\cosh^2\theta = n_B(p_0)(1+n_B(p_0)) = n_B(p_0)\frac{e^{\beta p_0}}{e^{\beta p_0}-1} = e^{\beta p_0}n_B^2(p_0)$$

$D_{(12)}(p)$ は

$$\begin{aligned} D_{(12)}(p) &= -2i\pi\epsilon(p_0)n_B(p_0)\delta(p^2-m^2) \\ &= \epsilon(p_0)n_B(p_0)[\Delta(p)-\Delta^*(p)] \\ &= e^{-\beta p_0/2}[\Delta(p)-\Delta^*(p)]\sinh\theta\cosh\theta \end{aligned}$$

ここでの $\sinh\theta\cosh\theta$ は

$$\sinh\theta\cosh\theta = \epsilon(p_0)e^{\beta p_0/2}n_B(p_0)$$

となります。というわけで

$$D_{(11)}(p) = \Delta(p)\cosh^2\theta - \Delta^*(p)\sinh^2\theta$$

$$D_{(22)}(p) = \Delta(p)\sinh^2\theta - \Delta^*(p)\cosh^2\theta$$

$$D_{(12)}(p) = e^{-\beta p_0/2}[\Delta(p)-\Delta^*(p)]\sinh\theta\cosh\theta$$

$$D_{(21)}(p) = e^{\beta p_0/2}[\Delta(p)-\Delta^*(p)]\sinh\theta\cosh\theta$$

$$\sinh^2\theta = \theta(p_0)n_B(p_0) - \theta(-p_0)(1+n_B(p_0))$$

$$\cosh^2\theta = \theta(p_0)(1+n_B(p_0)) - \theta(-p_0)n_B(p_0)$$

$$\sinh\theta\cosh\theta = \epsilon(p_0)e^{\beta p_0/2}n_B(p_0)$$

これも $N_B(p_0)$

$$N_B(p_0) = \theta(p_0)n_B(p_0) + \theta(-p_0)n_B(-p_0)$$

を使うことで

$$\sinh\theta = \sqrt{N_B(p_0)}\ ,\ \cosh\theta = \sqrt{1+N_B(p_0)}$$

また、化学ポテンシャルありの場合ではフェルミオンは $S_{(12)}, S_{(21)}$ と三角関数が

$$S_{(12)}(p) = -e^{-\beta(p_0-\mu)/2}[\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)]\sin\theta\cos\theta$$
$$S_{(21)}(p) = e^{\beta(p_0-\mu)/2}[\Delta_F(p) - \Delta_F^*(p)]\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin^2\theta = \theta(p_0)n_F(p_0-\mu) + \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu))$$

$$\cos^2\theta = \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)$$

$$\sin\theta\cos\theta = \epsilon(p_0)e^{\beta(p_0-\mu)/2}n_F(p_0-\mu)$$

ボソンでは $D_{(12)}, D_{(21)}$ と双曲線関数が

$$D_{(12)}(p) = e^{-\beta(p_0-\mu)/2}[\Delta(p) - \Delta^*(p)]\sinh\theta\cosh\theta$$
$$D_{(21)}(p) = e^{\beta(p_0-\mu)/2}[\Delta(p) - \Delta^*(p)]\sinh\theta\cosh\theta$$

$$\sinh^2\theta = \theta(p_0)n_B(p_0-\mu) - \theta(-p_0)(1+n_B(p_0-\mu))$$

$$\cosh^2\theta = \theta(p_0)(1+n_B(p_0-\mu)) - \theta(-p_0)n_B(p_0-\mu)$$

$$\sinh\theta\cosh\theta = \epsilon(p_0)e^{\beta(p_0-\mu)/2}n_B(p_0-\mu)$$

となります。これは H の形式での場合です (「有限密度でのフェルミオン〜別形式〜」参照)。なので、K の形式にしたいならここからさらに p_0 を $p'_0 = p_0 + \mu$ におきかえてやる必要があります (この場合は $\Delta(p), \Delta_F(p)$ に対しても)。この手順から分かるように、化学ポテンシャルなしからありに持って行くには、まず H の形式にするために、分布関数部分 (exp 部分) の外線運動量 p_0 を $p_0 - \mu$ にし、そこから K の形式にするために全ての p_0 を $p'_0 = p_0 + \mu$ に置き換えればいいことになります。