伝播関数の対角化

実時間法では伝播関数が 4 成分あるために、2×2 行列となっています。これを対角化した表現に変えることが出来るので、それをみていきます。
H の形式での化学ポテンシャルありの伝播関数を使っています。
ここでは伝播関数を 1 つ新しく定義するので、混乱しないようにしてください。基本的には、β がついているのは温度グリーン関数、R, A は遅延、先進グリーン関数、F は温度ファインマン伝播関数、文字の添え字のないものは実時間法での伝播関数です。
フェルミオンのグリーン関数についている「$*$」はガンマ行列を除いて複素共役を取るように定義します。

ボソンの伝播関数は双曲線関数を使った形で

$$D^0_{(11)}(p)=\Delta(p)\cosh^2\theta-\Delta^*(p)\sinh^2\theta$$

$$D^0_{(22)}(p)=\Delta(p)\sinh^2\theta-\Delta^*(p)\cosh^2\theta$$

$$D^0_{(12)}(p)=e^{-\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta$$

$$D^0_{(21)}(p)=e^{\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta$$

$$\Delta(p)=\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\ ,\ \Delta^*(p)=\frac{1}{p^2-m^2-i\epsilon}$$

$$\sinh^2\theta=\theta(p_0)n_B(p_0-\mu)-\theta(-p_0)(1+n_B(p_0-\mu))$$

$$\cosh^2\theta=\theta(p_0)(1+n_B(p_0-\mu))-\theta(-p_0)n_B(p_0-\mu)$$

$$\sinh\theta\cosh\theta=\epsilon(p_0)\exp[\beta(p_0-\mu)/2]n_B(p_0-\mu)$$

$\epsilon(p_0)=\theta(p_0)-\theta(-p_0)$。ここでの時間経路は $-\infty$ から $+\infty$ に行って、そのまま $+\infty$ から $-\infty$ にいく場合を使っています。$+\infty$ から $+\infty-i\beta/2$ の経路をとっている場合では $D_{(12)}(p)$ では $\exp[\beta p_0/2]$、$D_{(21)}(p)$ では $\exp[-\beta p_0/2]$ がかかるので、exp 部分にいる βp_0 がなくなります ($\sinh\theta\cosh\theta$ での βp_0 は消えない)。また、これは H の形式なので p_0 に μ が含まれていません。K の形式に変更するには p_0 を $p'_0=p_0+\mu$ にすればいいです
4 成分伝播関数 $D_0(p)$ を 2×2 行列で

$$D_0(p)=\begin{pmatrix}\Delta(p)\cosh^2\theta-\Delta^*(p)\sinh^2\theta & e^{-\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta\\ e^{\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta & \Delta(p)\sinh^2\theta-\Delta^*(p)\cosh^2\theta\end{pmatrix}$$

と書きます。これを対角化するような行列が必要なんですが、分かりやすくするために exp 部分を抜いて

$$D_0(p)=\begin{pmatrix}\Delta(p)\cosh^2\theta-\Delta^*(p)\sinh^2\theta & (\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta\\ (\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta & \Delta(p)\sinh^2\theta-\Delta^*(p)\cosh^2\theta\end{pmatrix}$$

これを見ると、sinh と cosh による回転行列 (ローレンツ変換の行列) を使えば対角化できそうなので

$$V=\begin{pmatrix}\cosh\theta & -\sinh\theta\\ -\sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix}$$

という行列を考えます。実際にやってみると

$$
\begin{aligned}
(VD_0'V)_{11} &= V_{11}^2(D_0')_{11} + V_{12}(D_0')_{21}V_{11} + V_{11}(D_0')_{12}V_{21} + V_{12}(D_0')_{22}V_{21} \\
&= \Delta(p)\cosh^4\theta - \Delta^*(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta - (\Delta(p) - \Delta^*(p))\sinh^2\theta\cosh^2\theta \\
&\quad - (\Delta(p) - \Delta^*(p))\sinh^2\theta\cosh^2\theta + \Delta(p)\sinh^4\theta - \Delta^*(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta \\
&= \Delta(p)\cosh^4\theta - \Delta(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta - \Delta(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta + \Delta(p)\sinh^4\theta \\
&= \Delta(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(VD_0'V)_{22} &= V_{21}(D_0')_{11}V_{12} + V_{22}(D_0')_{21}V_{12} + V_{21}(D_0')_{12}V_{22} + V_{22}^2(D_0')_{22} \\
&= \Delta(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta - \Delta^*(p)\sinh^4\theta - (\Delta(p) - \Delta^*(p))\sinh^2\theta\cosh^2\theta \\
&\quad - (\Delta(p) - \Delta^*(p))\sinh^2\theta\cosh^2\theta + \Delta(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta - \Delta^*(p)\cosh^4\theta \\
&= -\Delta^*(p)\sinh^4\theta + \Delta^*(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta + \Delta^*(p)\sinh^2\theta\cosh^2\theta - \Delta^*(p)\cosh^4\theta \\
&= -\Delta^*(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(VD_0'V)_{12} &= V_{11}(D_0')_{11}V_{12} + V_{12}(D_0')_{21}V_{12} + V_{11}(D_0')_{12}V_{22} + V_{12}(D_0')_{22}V_{22} \\
&= -\Delta(p)\sinh\theta\cosh^3\theta + \Delta^*(p)\sinh^3\theta\cosh\theta + (\Delta(p) - \Delta^*(p))\sinh^3\theta\cosh\theta \\
&\quad + (\Delta(p) - \Delta^*(p))\sinh\theta\cosh^3\theta - \Delta(p)\sinh^3\theta\cosh\theta + \Delta^*(p)\sinh\theta\cosh^3\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$(VD_0'V)_{21}$ は $(VD_0'V)_{12}$ と同じで 0 になります。というわけで、対角化されています。そして V を

$$
V = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta \\ -e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}
$$

とすることで exp 部分を無視しない場合になって、同じように

$$
VD_0(p)V = \begin{pmatrix} \Delta(p) & 0 \\ 0 & -\Delta^*(p) \end{pmatrix}
$$

そして V の逆行列は

$$
V^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta \\ e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}
$$

で与えられるので

$$
D_0(p) = V^{-1}\begin{pmatrix} \Delta(p) & 0 \\ 0 & -\Delta^*(p) \end{pmatrix}V^{-1}
$$

となります。$\Delta(p)$ はゼロ温度でのファインマン伝播関数なので、相互作用なしの段階で V^{-1} はゼロ温度のファインマン伝播関数を有限温度での伝播関数へと変換する行列になっていて、Bogoliubov 行列と呼ばれます。この行列はいろんなところで出てきます。

フェルミオンの場合も同じように対角化できます。フェルミオンの伝播関数は

$$S^0_{(11)}(p) = \Delta_f(p)\cos^2\theta + \Delta^*_f(p)\sin^2\theta$$

$$S^0_{(22)}(p) = -\Delta_f(p)\sin^2\theta - \Delta^*_f(p)\cos^2\theta$$

$$S^0_{(12)}(p) = -e^{-\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta_f(p) - \Delta^*_f(p))\sin\theta\cos\theta$$

$$S^0_{(21)}(p) = e^{\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta_f(p) - \Delta^*_f(p))\sin\theta\cos\theta$$

$$\Delta_f(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}\ ,\ \Delta^*_f(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2-i\epsilon}$$

$$\sin^2\theta = \theta(p_0)n_F(p_0-\mu) + \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu))$$

$$\cos^2\theta = \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)$$

$$\sin\theta\cos\theta = \epsilon(p_0)e^{\beta(p_0-\mu)/2}n_F(p_0-\mu)$$

このときの「$*$」はガンマ行列を除いた部分に対する複素共役を意味します。フェルミオンでは時間経路に $-i\beta/2$ を差し込んだ場合、$S_{(12)}(p)$、$S_{(21)}(p)$ の exp 内の $\beta p_0/2$ がなくなります。これらを行列にすれば

$$S_0(p) = \begin{pmatrix} \Delta_f(p)\cos^2\theta + \Delta^*_f(p)\sin^2\theta & -e^{-\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta_f(p) - \Delta^*_f(p))\sin\theta\cos\theta \\ e^{\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta_f(p) - \Delta^*_f(p))\sin\theta\cos\theta & -\Delta_f(p)\sin^2\theta - \Delta^*_f(p)\cos^2 \end{pmatrix}$$

今度は三角関数なので、回転行列

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta \\ -e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

によって対角化できます。これも実際にやっておくと

$$\begin{aligned}
(MS_0M)_{11} &= M^2_{11}(S_0)_{11} + M_{12}(S_0)_{21}M_{11} + M_{11}(S_0)_{12}M_{21} + M_{12}(S_0)_{22}M_{21} \\
&= \Delta_f(p)\cos^4\theta + \Delta^*_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta + [\Delta_f(p) - \Delta^*_f(p)]\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\quad + [\Delta_f(p) - \Delta^*_f(p)]\sin^2\theta\cos^2\theta + \Delta_f(p)\sin^4\theta + \Delta^*_f(p)\sin^2\cos^2 \\
&= \Delta_f(p)\cos^4\theta + \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta + \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta + \Delta_f(p)\sin^4\theta \\
&= \Delta_f(p)\cos^2\theta(1-\sin^2\theta) + \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\quad + \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta + \Delta_f(p)\sin^2\theta(1-\cos^2\theta) \\
&= \Delta_f(p)\cos^2\theta - \Delta_f(p)\cos^2\theta\sin^2\theta + \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\quad + \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta + \Delta_f(p)\sin^2\theta - \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&= \Delta_f(p)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(MS_0M)_{22} &= M_{21}(S_0)_{11}M_{12} + M_{22}(S_0)_{21}M_{12} + M_{21}(S_0)_{12}M_{22} + M_{22}^2(S_0)_{22} \\
&= -\Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2\theta - \Delta_f^*(p)\sin^4\theta + [\Delta_f(p) - \Delta_f^*(p)]\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\quad + [\Delta_f(p) - \Delta_f^*(p)]\sin^2\theta\cos^2\theta - \Delta_f(p)\sin^2\theta\cos^2 - \Delta_f^*(p)\cos^4 \\
&= -\Delta_f^*(p)\sin^4\theta - \Delta_f^*(p)\sin^2\theta\cos^2\theta - \Delta_f^*(p)\sin^2\theta\cos^2\theta - \Delta_f^*(p)\cos^4\theta \\
&= -\Delta_f^*(p)\sin^2\theta(1-\cos^2\theta) - \Delta_f^*(p)\sin^2\theta\cos^2\theta - \Delta_f^*(p)\sin^2\theta\cos^2\theta - \Delta_f^*(p)\cos^2\theta(1-\sin^2\theta) \\
&= -\Delta_f^*(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(MS_0M)_{12} &= M_{11}(S_0)_{11}M_{12} + M_{12}(S_0)_{21}M_{12} + M_{11}(S_0)_{12}M_{22} + M_{12}(S_0)_{22}M_{22} \\
&= e^{-\beta(p_0-\mu)/2}(\Delta_f(p)\sin\theta\cos^3\theta + \Delta_f^*(p)\sin^3\theta\cos\theta) + e^{-\beta(p_0-\mu)/2}[\Delta_f(p) - \Delta_f^*(p)]\sin^3\theta\cos\theta \\
&\quad - e^{-\beta(p_0-\mu)/2}[\Delta_f(p) - \Delta_f^*(p)]\sin\theta\cos^3\theta + e^{-\beta(p_0-\mu)/2}(-\Delta_f(p)\sin^3\theta\cos\theta - \Delta_f^*(p)\sin\theta\cos^3) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

というわけで

$$
MS_0(p)M = \begin{pmatrix} \Delta_f(p) & 0 \\ 0 & -\Delta_f^*(p) \end{pmatrix}
$$

と対角化され、M^{-1} によって

$$
S_0(p) = M^{-1}\begin{pmatrix} \Delta_f(p) & 0 \\ 0 & -\Delta_f^*(p) \end{pmatrix}M^{-1}
$$

$$
M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta \\ e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

となります。ここでも、相互作用なしの段階で M^{-1} はゼロ温度でのファインマン伝播関数を有限温度の伝播関数に変換する行列となっています。

相互作用がない段階で見てきましたが、厳密な伝播関数に対しても同じ行列によって対角化されます。それを見るために、新しい伝播関数として

$$
G_F(p_0,\boldsymbol{p}) = -(\theta(p_0)G_R(p_0,\boldsymbol{p}) + \theta(-p_0)G_A(p_0,\boldsymbol{p})) \tag{1}
$$

というのを定義します。右辺にマイナスがついているのは、後で示すように温度グリーン関数との対応のためです。遅延、先進グリーン関数は

$$
G_R(x,y) = i\theta(x_0-y_0)(iG_{(21)}(x,y) - iG_{(12)}(x,y))
$$

$$
G_A(x,y) = -i\theta(y_0-x_0)(iG_{(21)}(x,y) - iG_{(12)}(x,y))
$$

$$
(iG_{(21)}(x,y) = iG^{>}(x,y)\ ,\ iG_{(12)}(x,y) = iG^{<}(x,y))
$$

と定義しています。後で分かりますが、G_F はゼロ温度でのファインマン伝播関数の形になると仮定されているので、温度ファインマン伝播関数 (thermal Feynman propagator) と呼ばれます。
　遅延、先進グリーン関数は温度グリーン関数と $G_\beta(p_0+i\epsilon)=G_R(p_0),\ G_\beta(p_0-i\epsilon)=G_A(p_0)$ でつながっているので

$$G_F(p_0,\boldsymbol{p})=-(\theta(p_0)G_\beta(p_0+i\epsilon,\boldsymbol{p})+\theta(-p_0)G_\beta(p_0-i\epsilon,\boldsymbol{p}))$$

ここで、温度グリーン関数のスペクトル関数による表現

$$G_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n-z}$$

を使い、遅延グリーン関数を変形させると

$$\begin{aligned}
G_R(p_0,\boldsymbol{p})=&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon}\\
=&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon}\\
=&-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz\frac{\rho(-z,\boldsymbol{p})}{p_0+z+i\epsilon}-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon}\\
=&-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz(\frac{\rho(-z,\boldsymbol{p})}{p_0+z+i\epsilon}+\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon})
\end{aligned}$$

先進でも同じなので

$$G_F(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz(\theta(p_0)(\frac{\rho(-z,\boldsymbol{p})}{p_0+z+i\epsilon}+\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon})+\theta(-p_0)(\frac{\rho(-z,\boldsymbol{p})}{p_0+z-i\epsilon}+\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z-i\epsilon}))$$

ここでスペクトル関数が奇関数 $\rho(z,\boldsymbol{p})=-\rho(-z,\boldsymbol{p})$ であるなら

$$\begin{aligned}
G_F(p_0,\boldsymbol{p})&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz(\theta(p_0)(\frac{-\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0+z+i\epsilon}+\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon})+\theta(-p_0)(\frac{-\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0+z-i\epsilon}+\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z-i\epsilon}))\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz(\theta(p_0)\frac{2z}{(p_0+i\epsilon)^2-z^2}+\theta(-p_0)\frac{2z}{(p_0-i\epsilon)^2-z^2})\rho(z,\boldsymbol{p})\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz^2(\theta(p_0)\frac{1}{p_0^2-z^2+ip_0\epsilon}+\theta(-p_0)\frac{1}{p_0^2-z^2-ip_0\epsilon})\rho(z,\boldsymbol{p})\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz^2\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0^2-z^2+i\epsilon}
\end{aligned}$$

となります。そして、温度グリーン関数は

$$
\begin{aligned}
G_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p}) =& -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n - z} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n - z} \\
=& -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz\frac{\rho(-z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n + z} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n - z} \\
=& -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz(-\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n + z} + \frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n - z}) \\
=& -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz\frac{2z\rho(z,\boldsymbol{p})}{(i\omega_n)^2 - z^2} \\
=& -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}dz^2\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{(i\omega_n)^2 - z^2}
\end{aligned}
$$

となっているので、スペクトル関数が奇関数のとき、ファインマン温度伝播関数は温度グリーン関数と

$$
G_F(p_0,\boldsymbol{p}) = -G_\beta(p_0 + ip_0\epsilon,\boldsymbol{p})
$$

$$
(\frac{1}{(p_0 + ip_0\epsilon)^2 - z^2} = \frac{1}{p_0^2 - p_0^2\epsilon^2 + 2ip_0^2\epsilon - z^2} = \frac{1}{p_0^2 - z^2 + i\epsilon})
$$

という関係になっています。p_0 を $p_0 + ip_0\epsilon$ に変更することは、ゼロ温度で言えば、ファインマン伝播関数を求めるための経路を取っていることに対応しています (p_0 が正なら $+i\epsilon$ で極をよけ、負なら $-i\epsilon$ でよける経路)。

スカラー場だとして、温度グリーン関数を解析接続してみると

$$
\frac{-1}{(i\omega_n)^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{(p_0 + ip_0\epsilon)^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} = \frac{1}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 + 2ip_0^2\epsilon} = \frac{1}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 + i\epsilon}
$$

となって、ゼロ温度でのファインマン伝播関数になります。このような対応になっているので、(1) でマイナスをつけて定義していますし、温度グリーン関数との対応上 $G_F(p_0,\boldsymbol{p})$ には i がいないので、i を外に出すようにして定義していません (実時間法での伝播関数は i を外に出して定義しています。) また、「有限温度でのグリーン関数」で出てきた最低次でのスペクトル関数を使えば

$$
\begin{aligned}
G_F(p_0,\boldsymbol{p}) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz^2\frac{1}{p_0^2 - z^2 + i\epsilon}2\pi\epsilon(z)\delta(z^2 - E^2) \quad (E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2) \\
=& \int_0^\infty dz\frac{2z}{p_0^2 - z^2 + i\epsilon}\epsilon(z)\delta(z^2 - E^2) \\
=& \frac{2E}{p_0^2 - E^2 + i\epsilon}\frac{1}{2E} \\
=& \frac{1}{p_0^2 - E^2 + i\epsilon}
\end{aligned}
$$

となって、同じようにゼロ温度でのファインマン伝播関数になっていることを確かめられます。フェルミオンのスペクトル関数は奇関数になっていないので、スペクトル関数を使って計算してもゼロ温度でのファインマン伝播関数になりません。

スペクトル関数が遅延と先進によって

$$
\rho(p) = -i(G_R(p) - G_A(p))
$$

と与えられることと、先進と遅延が $G_R(p) = G_A^*(p)$ となっているなら (1) とその複素共役

$$
\begin{aligned}
G_F(p) &= -(\theta(p_0)G_R(p) + \theta(-p_0)G_A(p)) \\
G_F^*(p) &= -(\theta(p_0)G_R^*(p) + \theta(-p_0)G_A^*(p)) = -(\theta(p_0)G_A(p) + \theta(-p_0)G_R(p))
\end{aligned}
$$

から

$$
G_R(p) = -\theta(p_0)G_F(p) - \theta(-p_0)G_F^*(p)
$$

となっていることを使えば、スペクトル関数は温度ファインマン伝播関数によって

$$
\begin{aligned}
\rho(p) = & -i(G_R(p) - G_R^*(p)) \\
&= i(\theta(p_0)G_F(p) + \theta(-p_0)G_F^*(p) - \theta(p_0)G_F^*(p) - \theta(-p_0)G_F(p)) \\
&= i\epsilon(p_0)(G_F(p) - G_F^*(p))
\end{aligned}
$$

　ここからフェルミオンだとし、S_F を厳密な温度ファインマン伝播関数、$S_{(ab)}$ を実時間法でのフェルミオンの厳密な伝播関数だとします。フェルミオンのスペクトル関数 $\sigma(p)$ による $iS_{(12)}$ と $iS_{(21)}$ の表現

$$
\begin{aligned}
iS_{(21)}(p) &= iS^{>}(p) = (1 - n_F(p_0 - \mu))\sigma(p) \\
iS_{(12)}(p) &= iS^{<}(p) = -n_F(p_0 - \mu)\sigma(p)
\end{aligned}
$$

に入れることで

$$
\begin{aligned}
iS_{(21)}(p) &= i\epsilon(p_0)(1 - n_F(p_0 - \mu))(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
iS_{(12)}(p) &= -i\epsilon(p_0)n_F(p_0 - \mu)(S_F(p) - S_F^*(p))
\end{aligned}
$$

$S_F^*(p)$ はガンマ行列を除いた複素共役です。この形は何の近似も使っていないので厳密な表現です。ここでフェルミオンでの三角関数の $\sin\theta\cos\theta$ を見てみると

$$
\begin{aligned}
iS_{(21)}(p) &= i\epsilon(p_0)(1 - n_F(p_0 - \mu))(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
&= i\epsilon(p_0)e^{\beta(p_0-\mu)}n_F(p_0 - \mu)(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
&= ie^{\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta\cos\theta(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
iS_{(12)}(p) = & -ie^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta\cos\theta(S_F(p) - S_F^*(p))
\end{aligned}
$$

となることが分かります。$S_{(11)}$ と $S_{(22)}$ では「実時間法〜伝播関数の性質〜」で求めた

$$
\begin{aligned}
iS_{(11)} &= -iS_R + iS_{(12)} \\
iS_{(22)} &= iS_{(21)} + iS_R
\end{aligned}
$$

を使います。ここでは遅延、先進グリーン関数を「温度グリーン関数」での定義にしているので、符合が反転していることに注意してください。この関係から $S_{(11)}$ は

$$
\begin{aligned}
iS_{(11)}(p) =& \ -iS_R(p) - n_F(p_0-\mu)\sigma(p) \\
S_{(11)}(p) =& \ -S_R(p) - \epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
&= \theta(p_0)S_F(p) + \theta(-p_0)S_F^*(p) - \epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
&= \theta(p_0)S_F(p) + \theta(-p_0)S_F^*(p) \\
&\quad - \theta(p_0)n_F(p_0-\mu)(S_F(p) - S_F^*(p)) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
&= \theta(p_0)S_F(p) - \theta(p_0)n_F(p_0-\mu)S_F(p) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)S_F(p) \\
&\quad + \theta(-p_0)S_F^*(p) + \theta(p_0)n_F(p_0-\mu)S_F^*(p) - \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)S_F^*(p) \\
&= \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu))S_F(p) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)S_F(p) \\
&\quad + \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu))S_F^*(p) + \theta(p_0)n_F(p_0-\mu)S_F^*(p) \\
&= S_F(p)\cos^2\theta + S_F^*(p)\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

同様にしていくことで $S_{(22)}$ は

$$
\begin{aligned}
iS_{(22)}(p) &= iS_R + iS_{(21)} \\
&= iS_R + i\epsilon(p_0)(1-n_F(p_0-\mu))(S_F - S_F^*) \\
S_{(22)} \ &= -\theta(p_0)S_F(p) - \theta(-p_0)S_F^*(p) + \epsilon(p_0)(1-n_F(p_0-\mu))(S_F(p) - S_F^*(p)) \\
=& \ -\theta(p_0)S_F(p) - \theta(-p_0)S_F^*(p) \\
&+ \theta(p_0)S_F(p) - \theta(p_0)n_F(p_0-\mu)S_F(p) - \theta(-p_0)S_F(p) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)S_F(p) \\
&- \theta(p_0)S_F^*(p) + \theta(p_0)n_F(p_0-\mu)S_F^*(p) + \theta(-p_0)S_F^*(p) - \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)S_F^*(p) \\
=& \ -\theta(p_0)n_F(p_0-\mu)S_F(p) - \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu))S_F(p) \\
&- \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)S_F^*(p) - \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu))S_F^*(p) \\
=& \ -S_F(p)\sin^2\theta - S_F^*(p)\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

となります。これらと最低次での表現を見比べてみると、$\Delta_f(p)$ が $S_F(p)$ に変わっているだけなのが分かります。つまり、相互作用がある場合でも

$$
MS(p)M = \begin{pmatrix} S_F(p) & 0 \\ 0 & -S_F^*(p) \end{pmatrix}, \ S(p) = M^{-1}\begin{pmatrix} S_F(p) & 0 \\ 0 & -S_F^*(p) \end{pmatrix}M^{-1}
$$

という関係になっています。これはボソンでも同様で (ボソンでの温度ファインマン伝播関数を D_F、実時間法でのを D)

$$
VD(p)V = \begin{pmatrix} D_F(p) & 0 \\ 0 & -D_F^*(p) \end{pmatrix}, \ D(p) = V^{-1}\begin{pmatrix} D_F(p) & 0 \\ 0 & -D_F^*(p) \end{pmatrix}V^{-1}
$$

となっています。このように、温度ファインマン伝播関数が分かれば、実時間法での 4 成分伝播関数を求めることが出来ます。

伝播関数の逆である 2 点関数 Γ は場の量子論の「自己エネルギーと頂点関数」と同じように

$$\int_C d^4z\Gamma_C(x,z)iG_C(z,y) = i\delta^4_C(x-y)$$

と定義します。C は実時間法での時間経路で、その各経路上でこの式は定義されています。$iG_C(z,y)$ はゼロ温度と同じように

$$iG_{(ab)}(p) = iG^0_{(ab)}(p) + iG^0_{(ac)}(p)\frac{\Sigma_{(cd)}(p)}{i}iG^0_{(db)}(p) + \cdots \tag{2}$$

と展開でき、これは

$$iG_{(ab)}(p) = iG^0_{(ab)}(p) + iG^0_{(ac)}(p)\frac{\Sigma_{(cd)}(p)}{i}iG_{(db)}(p) \tag{3}$$

と書き直せます ((2) を (3) に入れれば同じになる)。また、この式の逆は

$$\begin{aligned}
iG &= (iG^0G^{-1} + iG^0\frac{\Sigma}{i}i)G \\
&= (iG^0G^{-1} + iG^0\Sigma)G \\
i &= iG^0G^{-1} + iG^0\Sigma \\
1 - G^0\Sigma &= G^0G^{-1} \\
(G^0)^{-1} - \Sigma &= G^{-1}
\end{aligned}$$

から

$$G^{-1}_{(ab)}(p) = (G^0_{(ab)}(p))^{-1} - \Sigma_{(ab)}(p)$$

この自己エネルギーも温度ファインマン伝播関数の自己エネルギーから変換行列によって求められます。$G_{(ab)}$ がこのように展開できることと、G_F とは変換行列によって繋がっていることから、温度ファインマン伝播関数はゼロ温度でのファインマン伝播関数と同じように

$$G_F(p) = G^0_F(p) + G^0_F(p)\Sigma_F(p)G_F(p)$$

$$G^*_F(p) = G^{0*}_F(p) + G^{0*}_F(p)\Sigma^*_F(p)G^*_F(p)$$

と書けます。実際に、(3) と変換行列 U(ボソン、フェルミオンをまとめて) による表現から

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}\begin{pmatrix} G_F(p) & 0 \\ 0 & -G_F^*(p) \end{pmatrix}U^{-1} \\
&\quad= U^{-1}\begin{pmatrix} G_F^0(p) & 0 \\ 0 & -G_F^{0*}(p) \end{pmatrix}U^{-1} \\
&\qquad+ U^{-1}\begin{pmatrix} G_F^0(p) & 0 \\ 0 & -G_F^{0*}(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma_F(p) & 0 \\ 0 & -\Sigma_F^*(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_F(p) & 0 \\ 0 & -G_F^*(p) \end{pmatrix}U^{-1} \\
&\quad= U^{-1}\begin{pmatrix} G_F^0(p) & 0 \\ 0 & -G_F^{0*}(p) \end{pmatrix}U^{-1} \\
&\qquad+ U^{-1}\begin{pmatrix} G_F^0(p) & 0 \\ 0 & -G_F^{0*}(p) \end{pmatrix}U^{-1}U\begin{pmatrix} \Sigma_F(p) & 0 \\ 0 & -\Sigma_F^*(p) \end{pmatrix}UU^{-1}\begin{pmatrix} G_F(p) & 0 \\ 0 & -G_F^*(p) \end{pmatrix}U^{-1} \\
&G_{(ab)}(p) = G^0_{(ab)}(p) + G^0_{(ac)}(p)\Sigma_{(cd)}G_{(db)}(p)
\end{aligned}
$$

自己エネルギーに対しては

$$
\Sigma_{(ab)}(p) = U\begin{pmatrix} \Sigma_F(p) & 0 \\ 0 & -\Sigma_F^*(p) \end{pmatrix}U
$$

となっており、伝播関数の場合と異なり、逆行列ではなくなります。

フェルミオンの場合で $\Sigma_{(ab)}(p)$ を計算してみると ($\Sigma_F, -\Sigma_F^*$ の対角行列を $\overline{\Sigma}_F$ と書きます)

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{(11)}(p) &= M_{11}^2(\overline{\Sigma}_F)_{11} + M_{12}(\overline{\Sigma}_F)_{22}M_{21} + M_{12}(\overline{\Sigma}_F)_{21}M_{11} + M_{11}(\overline{\Sigma}_F)_{12}M_{21} \\
&= \Sigma_F\cos^2\theta + \Sigma_F^*\sin^2\theta \\
\Sigma_{(22)}(p) &= M_{22}^2(\overline{\Sigma}_F)_{22} + M_{21}(\overline{\Sigma}_F)_{11}M_{12} + M_{22}(\overline{\Sigma}_F)_{21}M_{12} + M_{21}(\overline{\Sigma}_F)_{12}M_{22} \\
&= -\Sigma_F^*\cos^2\theta - \Sigma_F\sin^2\theta \\
\Sigma_{(21)} &= M_{21}(\overline{\Sigma}_F)_{11}M_{11} + M_{22}(\overline{\Sigma}_F)_{22}M_{21} + M_{21}(\overline{\Sigma}_F)_{12}M_{21} + M_{22}(\overline{\Sigma}_F)_{21}M_{11} \\
&= -\Sigma_F e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta\cos\theta + e^{\beta(p_0-\mu)/2}\Sigma_F^*\sin\theta\cos\theta \\
\Sigma_{(12)} &= M_{11}(\overline{\Sigma}_F)_{11}M_{12} + M_{12}(\overline{\Sigma}_F)_{22}M_{22} + M_{11}(\overline{\Sigma}_F)_{12}M_{22} + M_{12}(\overline{\Sigma}_F)_{21}M_{12} \\
&= e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\Sigma_F\sin\theta\cos\theta - e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\Sigma_F^*\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

となっていることから

$$
\Sigma_{(11)}(p) = -\Sigma^*_{(22)}(p)
$$

そして、$\Sigma_{(11)}(p)$ の実部と虚部は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p) &= \mathrm{Re}(\Sigma_F)\cos^2\theta + \mathrm{Re}(\Sigma_F^*)\sin^2\theta \\
&= \mathrm{Re}\Sigma_F(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= \mathrm{Re}\Sigma_F(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p) &= \mathrm{Im}(\Sigma_F)\cos^2\theta + \mathrm{Im}(\Sigma_F^*)\sin^2\theta \\
&= \mathrm{Im}\Sigma_F(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= \epsilon(p_0)(1-2n_F(p_0-\mu))\mathrm{Im}\Sigma_F
\end{aligned}
$$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta$ は

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&\quad = \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu) - \theta(p_0)n_F(p_0-\mu) - \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) \\
&\quad = \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) - \theta(p_0)n_F(p_0-\mu) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu) - \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) \\
&\quad = \theta(p_0)(1-2n_F(p_0-\mu)) - \theta(-p_0)(1-2n_F(p_0-\mu)) \\
&\quad = \epsilon(p_0)(1-2n_F(p_0-\mu))
\end{aligned}
$$

となっています。また、$\mathrm{Im}\Sigma_F(p)$ の式にするなら

$$
1-2n_F(p_0-\mu) = \frac{e^{\beta(p_0-\mu)}-1}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1} = (\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2})^{-1}
$$

より

$$
\mathrm{Im}\Sigma_F(p) = \epsilon(p_0)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)
$$

$\Sigma_{(12)}, \Sigma_{(21)}$ はすぐに

$$
\Sigma_{(12)} = -e^{-\beta(p_0-\mu)}\Sigma_{(21)}
$$

となっていることが分かり、久保-Martin-Schwinger の関係を満たしています。$\Sigma_{(12)}$ は変形していくと

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{(12)} &= 2ie^{-\beta(p_0-\mu)/2}\mathrm{Im}\Sigma_F\sin\theta\cos\theta \\
&= 2i\epsilon(p_0)e^{-\beta(p_0-\mu)/2}e^{\beta(p_0-\mu)/2}n_F(p_0-\mu)\mathrm{Im}\Sigma_F \\
&= 2in_F(p_0-\mu)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)
\end{aligned}
$$

と書けることも分かります。
また、時間経路を $-i\beta/2$ 動かしたときは変換行列において三角関数の外にいる exp が $e^{\pm\beta\mu}$ になるので、同じように計算していけば

$$\Sigma_{(21)} = -e^{-\beta\mu/2}\Sigma_F \sin\theta\cos\theta + e^{-\beta\mu/2}\Sigma_F^* \sin\theta\cos\theta$$

$$\Sigma_{(12)} = e^{\beta\mu/2}\Sigma_F \sin\theta\cos\theta - e^{\beta\mu/2}\Sigma_F^* \sin\theta\cos\theta$$

から

$$\Sigma_{(12)} = -e^{\beta\mu}\Sigma_{(21)}$$

$$\Sigma_{(12)} = 2ie^{\beta p_0/2} n_F(p_0-\mu)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

となります。
　ボソンでも同様に

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(11)}(p) &= V_{11}^2(\overline{\Sigma}_F)_{11} + V_{12}(\overline{\Sigma}_F)_{22}V_{21}\\
&= \Sigma_F\cosh^2\theta - \Sigma_F^*\sinh^2\theta\\
\Sigma_{(22)}(p) &= V_{22}^2(\overline{\Sigma}_F)_{22} + V_{21}(\overline{\Sigma}_F)_{11}V_{12}\\
&= -\Sigma_F^*\cosh^2\theta + \Sigma_F\sinh^2\theta\\
\Sigma_{(21)} &= V_{21}(\overline{\Sigma}_F)_{11}V_{11} + V_{22}(\overline{\Sigma}_F)_{22}V_{21}\\
&= -\Sigma_F e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta\cosh\theta + \Sigma_F^* e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta\cosh\theta\\
\Sigma_{(12)} &= V_{11}(\overline{\Sigma}_F)_{11}V_{12} + V_{12}(\overline{\Sigma}_F)_{22}V_{22}\\
&= -\Sigma_F e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta\cosh\theta + \Sigma_F^* e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta\cosh\theta
\end{aligned}$$

から

$$\Sigma_{(11)}(p) = -\Sigma_{(22)}^*(p)$$

$$\mathrm{Re}\Sigma_{(11)} = \mathrm{Re}\Sigma_F$$

虚部は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Sigma_{(11)} &= \mathrm{Im}\Sigma_F\cosh^2\theta + \mathrm{Im}\Sigma_F\sinh^2\theta\\
&= \mathrm{Im}\Sigma_F(\theta(p_0)n_B(p_0-\mu) - \theta(-p_0)(1+n_B(p_0-\mu))\\
&\quad +\theta(p_0)(1+n_B(p_0-\mu)) - \theta(-p_0)n_B(p_0-\mu))\\
&= \epsilon(p_0)(1+2n_B(p_0-\mu))\mathrm{Im}\Sigma_F\\
&= \epsilon(p_0)\frac{e^{\beta(p_0-\mu)}+1}{e^{\beta(p_0-\mu)}-1}\mathrm{Im}\Sigma_F\\
&= \epsilon(p_0)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_F
\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\Sigma_F$ の式にすれば

$$\mathrm{Im}\Sigma_F = \epsilon(p_0)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}$$

$\Sigma_{(12)}$ と $\Sigma_{(21)}$ の関係は

$$\Sigma_{(12)} = e^{-\beta(p_0-\mu)}\Sigma_{(21)}$$

$\Sigma_{(12)}$ を変形することで

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(12)} &= -2ie^{-\beta(p_0-\mu)/2}\mathrm{Im}\Sigma_F\sinh\theta\cosh\theta \\
&= -2i\epsilon(p_0)e^{-\beta(p_0-\mu)/2}e^{\beta(p_0-\mu)/2}n_B(p_0-\mu)\mathrm{Im}\Sigma_F \\
&= -2in_B(p_0-\mu)(2n_B(p_0-\mu)+1)^{-1}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)} \\
&= -2in_B(p_0-\mu)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}
\end{aligned}$$

ゴチャゴチャしているのでまとめておきます。

- ボソン (実時間法での 4 成分伝播関数 $D(p)$、温度ファインマン伝播関数 $D_F(p)$)

$$VD(p)V = \begin{pmatrix} D_F(p) & 0 \\ 0 & -D_F^*(p) \end{pmatrix}\ ,\ V = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta \\ -e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

自己エネルギーの関係

$$\Sigma_{(11)}(p) = -\Sigma^*_{(22)}(p)$$

$$\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p) = \mathrm{Re}\Sigma_F(p)$$

$$\mathrm{Im}\Sigma_F(p) = \epsilon(p_0)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = e^{-\beta(p_0-\mu)}\Sigma_{(21)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = -2in_B(p_0-\mu)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

時間経路を $-i\beta/2$ 動かしたときは

$$\Sigma_{(12)}(p) = e^{\beta\mu}\Sigma_{(21)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = -2ie^{\beta p_0/2}n_B(p_0-\mu)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

- フェルミオン (実時間法での 4 成分伝播関数 $S(p)$、温度ファインマン伝播関数 $S_F(p)$)

$$MS(p)M = \begin{pmatrix} S_F(p) & 0 \\ 0 & -S_F^*(p) \end{pmatrix} \ , \ M = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta \\ -e^{\beta(p_0-\mu)/2}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

自己エネルギーの関係

$$\Sigma_{(11)}(p) = -\Sigma^*_{(22)}(p)$$

$$\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p) = \mathrm{Re}\Sigma_F(p)$$

$$\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p) = \epsilon(p_0)(1-2n_F(p_0-\mu))\mathrm{Im}\Sigma_F(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = -e^{-\beta(p_0-\mu)}\Sigma_{(21)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = 2in_F(p_0-\mu)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

時間経路を $-i\beta/2$ 動かしたときは

$$\Sigma_{(12)}(p) = -e^{\beta\mu}\Sigma_{(21)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = 2ie^{\beta p_0/2}n_F(p_0-\mu)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

最後に実時間法での厳密な伝播関数の具体形を示しておきます。ボソンだとして温度ファインマン伝播関数

$$D_F(p) = \frac{1}{p^2-m^2-\Sigma(p)+i\epsilon}$$

を使えば、例えば 11 成分は明らかに

$$D_{(11)}(p) = \frac{1}{p^2-m^2-\Sigma(p)+i\epsilon} + (\frac{1}{p^2-m^2-\Sigma+i\epsilon} - \frac{1}{p^2-m^2-\Sigma^*-i\epsilon})n_B(|p_0|)$$

という形になります。第二項部分は

$$\begin{aligned}\Delta(p)-\Delta^*(p) &= \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} - \frac{1}{p^2-m^2-i\epsilon} \\ &= P\frac{1}{p_0^2-(\boldsymbol{p}^2+m^2)} - i\pi\delta(p_0^2-(\boldsymbol{p}^2+m^2)) - P\frac{1}{p_0^2-(\boldsymbol{p}^2+m^2)} - i\pi\delta(p_0^2-(\boldsymbol{p}^2+m^2)) \\ &= -2i\pi\delta(p_0^2-(\boldsymbol{p}^2+m^2))\end{aligned}$$

を $D_F(p)-D_F^*(p)$ にしたものです。フェルミオンでも同じようにできます。