実時間法～ディラック場～

フェルミオン伝播関数を「実時間法～クライン・ゴルドン場～」とは別の方法で導きます。こっちの方法で求めた方が、厳密な伝播関数の関係式との対応が見やすいですし、応用が利きやすいです。
ここでも階段関数がおもいっきり出てくるので、混乱しないように気をつけてください。

フェルミオンでもボソンと同じ手続きが出来るので、ディラック場での実時間法による経路積分表示は

$$Z_0[\eta,\overline{\eta}]=\int\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[i\int_C d^4xd^4y\ \overline{\psi}(x)S_C^{-1}(x,y)\psi(y)+i\int_C d^4x\big(\overline{\eta}(x)\psi(x)+\overline{\psi}(x)\eta(x)\big)\Big]$$

$$S_C^{-1}(x)=i\gamma^\mu\partial_\mu-m$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)S_C(x,y)=\delta_C^4(x-y)$$

となっています。時間経路 C として C_1,C_2 だけを考えるなら

$$\begin{aligned}Z_0[\eta,\overline{\eta}]=\int\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[&i\int_{C_1}d^4xd^4y\ \overline{\psi}_1(x)S_{(11)}^{-1}(x,y)\psi_1(y)+i\int_{C_2}d^4xd^4y\ \overline{\psi}_2(x)S_{(22)}^{-1}(x,y)\psi_2(y)\\&+i\int_{C_1}d^4x\int_{C_2}d^4y\ \overline{\psi}_1(x)S_{(12)}^{-1}(x,y)\psi_2(y)+i\int_{C_2}d^4x\int_{C_1}d^4y\ \overline{\psi}_2(x)S_{(21)}^{-1}(x,y)\psi_1(y)\\&+i\int_{-\infty}^{\infty}dx_0\int d^3x\big(\overline{\eta}_1(x)\psi_1(x)+\overline{\psi}_1(x)\eta_1(x)\big)-i\int_{-\infty}^{\infty}dx_0\int d^3x\big(\overline{\eta}_2(x)\psi_2(x)+\overline{\psi}_2(x)\eta_2(x)\big)\Big]\end{aligned}$$

伝播関数による式にするために変形させて、$\psi,\overline{\psi}$ の積分を定数に押し込めれば

$$Z_0[\eta,\overline{\eta}]=\exp\Big[-i\int_C d^4xd^4y\ \overline{\eta}(x)S_C(x,y)\eta(y)\Big]$$

なので、伝播関数は各経路上での源 $\eta_C(y),\overline{\eta}_C(x)$ による汎関数微分

$$iS_C(x,y)=\frac{\delta^2}{\delta\eta_C(y)\delta\overline{\eta}_C(x)}Z_0|_{\eta=\overline{\eta}=0}$$

によって求められます。例えば $\eta_1(x_1)$ を C_1 上、$\overline{\eta}_2(x_2)$ を C_2 上とすれば (経路 C_2 は経路 C_1 よりも後の時間)

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2}{\delta\eta_1(x_1)\delta\overline{\eta}_2(x_2)}Z_0|_{\eta=\overline{\eta}=0}=iS_{(21)}(x_2,x_1)=\langle\psi(x_2)\overline{\psi}(x_1)\rangle_\beta$$

逆なら

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2}{\delta\eta_2(x_2)\delta\overline{\eta}_1(x_1)}Z_0|_{\eta=\overline{\eta}=0}=iS_{(12)}(x_1,x_2)=\langle\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\rangle_\beta=-\langle\overline{\psi}(x_2)\psi(x_1)\rangle_\beta$$

となります。源による汎関数微分の定義はボソンの場合と同じです (C_2 上では $\delta\eta_2(x)/\delta\eta_2(y)=-\delta^4(x-y)$)。

最低次での伝播関数がどうなっているのか求めていきます。「有限密度でのフェルミオン」での関係を使って求めていくことにします (ここでの伝播関数の定義では i が外に出ていることに注意)。最初に時間経路が $-\infty \sim +\infty$ でのフェルミオン伝播関数を求めてみます。フェルミオンの伝播関数 $iS(x,x')$ の定義は

$$iS(x,x') = \theta(t-t')S^{>}(x,x') + \theta(t'-t)S^{<}(x,x')$$

$$S^{>}(x,x') = \langle\psi(x)\overline{\psi}(x')\rangle_\beta\ ,\ S^{<}(x,x') = -\langle\overline{\psi}(x')\psi(x)\rangle_\beta$$

と与えます。「温度グリーン関数」において、スペクトル関数を

$$\rho_F(k) = S^{>}(k) - S^{<}(k)$$

このように定義し、相互作用がないときでの $\rho(p)$ は

$$\rho_F(p) = 2\pi\epsilon(p_0)(\not{p}+m)\delta(p^2-m^2) \quad (\epsilon(p_0) = \theta(p_0) - \theta(-p_0))$$

となっています。これを使って最低次の伝播関数を導きます。

まず $S(x,x')$ を

$$iS(x,x') = \theta(t-t')(S^{>}(x,x') - S^{<}(x,x')) + S^{<}(x,x')$$

このように変形します。これは $t-t'>0$ のときに第一項が消えずに残りますが、$S^{<}(x,x')$ が第二項と打ち消し合い元の式になります。$t-t'<0$ では第二項しか生き残らないので元の式に対応しています。

$S^{>}(x,x')$ と $S^{<}(x,x')$ をフーリエ変換すれば

$$\begin{aligned}
iS(x,x') &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-x')}[\theta(t-t')(S^{>}(k)-S^{<}(k)) + S^{<}(k)] \\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-x')}[\theta(t-t')\rho_F(k) - \rho_F(k)n_F(k_0)] \\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-x')}[\theta(t-t') - n_F(k_0)]\rho_F(k)
\end{aligned}$$

途中で

$$S^{<}(k) = \frac{\rho(k)}{e^{\beta k_0}+1} = -\rho_F(k)n_F(k_0)$$

を使っています (「温度グリーン関数」のフェルミオンの話をしているところ参照)。これを時間経路が $-\infty$ から $+\infty$ になっているとして、フーリエ変換すれば

$$\begin{aligned}
iS(p) &= \int d^4xd^4x' iS(x,x')e^{ipx-ipx'} \\
&= \int d^4xd^4x'\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ip(x-x')}e^{-ik(x-x')}[\theta(t-t') - n_F(k_0)]\rho_F(k) \\
&= A_\theta - A_n
\end{aligned} \tag{1}$$

ちなみに、ボソンで同じことを行えば

$$iD(p)=\int d^4xd^4x'\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ipx-ipx'}e^{-ik(x-x')}[\theta(t-t')+n_B(k)]\rho_B(k)$$

このように分布関数の符号が変わるだけです。
　階段関数 $\theta(t-t')$ は

$$\theta(t-t')=\frac{-1}{2\pi i}\int dz\frac{e^{-iz(t-t')}}{z+i\epsilon}$$

であることより、A_θ は

$$\begin{aligned}
A_\theta=&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^4xd^4x'e^{i(p-k)x}e^{i(-p+k)x'}\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{e^{-iz(t-t')}}{z+i\epsilon}\rho_F(k)\\
=&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^3xd^3x'e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}e^{i(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}'}\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}dtdt'\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{1}{z+i\epsilon}e^{i(p_0-k_0-z)t}e^{i(-p_0+k_0+z)t'}\rho_F(k)\\
=&\frac{-1}{2\pi i}(2\pi)^8\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{1}{z+i\epsilon}\delta(p_0-k_0-z)\delta(-p_0+k_0+z)\rho_F(k)\\
=&\frac{-1}{2\pi i}(2\pi)^8\delta(0)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\frac{\not{k}+m}{p_0-k_0+i\epsilon}2\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)\\
=&i(2\pi)^8\delta(0)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\frac{\not{k}+m}{p_0-k_0+i\epsilon}\epsilon(k_0)\delta(k_0^2-E_{\boldsymbol{k}}^2)\\
=&i(2\pi)^8\delta(0)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\frac{\not{k}+m}{p_0-k_0+i\epsilon}\\
&\qquad\times(\theta(k_0)-\theta(-k_0))\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}(\delta(k_0-E_{\boldsymbol{k}})+\delta(k_0+E_{\boldsymbol{k}}))\\
=&i(2\pi)^8\delta^4(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{(2\pi)^4}\frac{k_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-k_0+i\epsilon}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\theta(k_0)-\theta(-k_0))(\delta(k_0-E_{\boldsymbol{p}})+\delta(k_0+E_{\boldsymbol{p}}))\\
=&i(2\pi)^4\delta^4(0)\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big(\frac{E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}-\frac{-E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0+E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}\Big)\\
=&i(2\pi)^4\delta^4(0)(p_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big(P\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}}-i\pi\delta(p_0-E_{\boldsymbol{p}})-P\frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{p}}}+i\pi\delta(p_0+E_{\boldsymbol{p}})\Big)\\
=&i(2\pi)^4\delta^4(0)(\not{p}+m)\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big(P\frac{2E_{\boldsymbol{p}}}{p_0^2-E_{\boldsymbol{p}}^2}-i\pi\delta(p_0-E_{\boldsymbol{p}})+i\pi\delta(p_0+E_{\boldsymbol{p}})\Big)
\end{aligned}$$

ここで出てきた記号 P は主値を表わすもので

$$\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}\pm i\epsilon}=P\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}}\mp i\pi\delta(p_0-E_{\boldsymbol{p}})$$

となっています。細かいことは場の量子論の「伝播関数について」を見てください。ちなみに

$$\frac{E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}-\frac{-E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0+E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}=\frac{2E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0p_0+2(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)E_{\boldsymbol{p}}}{(p_0+i\epsilon)^2-E_{\boldsymbol{p}}^2}$$
$$=\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\frac{2E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0p_0+2(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)E_{\boldsymbol{p}}}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}-\frac{2E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0p_0+2(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)E_{\boldsymbol{p}}}{p_0+E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon})$$
$$=\frac{\gamma_0p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}-\frac{\gamma_0p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0+E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}$$

また、$(2\pi)^4\delta^4(0)$ は運動量保存のデルタ関数なので無視します。

ここではスペクトル関数に相互作用なしのものを使っていますが、下の補足にスペクトル関数をそのまま残した場合の形を載せています (補足の載せている形から出発した方が分かりやすかったです)。

残っている A_n は明らかに、k を p に変えればいいだけなので

$$A_n=n_F(p_0)\rho(p)=2\pi\epsilon(p_0)n_F(p_0)(\not p+m)\delta(p^2-m^2)$$

階段関数がいるので、フェルミオンの分布関数 $n_F(p_0)$ が

$$n_F(p_0)=\theta(p_0)n_F(|p_0|)-\theta(-p_0)n_F(|p_0|)+\theta(-p_0)=\epsilon(p_0)n_F(|p_0|)+\theta(-p_0) \tag{2}$$

と書けることを利用して絶対値を使った表記にします。$p_0<0$ のとき、これの左辺は

$$n_F(p_0<0)=\frac{1}{e^{-\beta|p_0|}+1}$$

そして、右辺は

$$-n_F(|p_0|)+1=n_F(-|p_0|)$$

となるので、ちゃんと合っています。これを使って変形すると

$$\begin{aligned}A_n &= 2\pi\epsilon(p_0)n_F(p_0)\delta(p^2-m^2)(\not p+m)\\ &= 2\pi\epsilon(p_0)[\theta(p_0)n_F(|p_0|)-\theta(-p_0)n_F(|p_0|)+\theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)(\not p+m)\\ &= 2\pi\big[\theta(p_0)n_F(|p_0|)+\theta(-p_0)n_F(|p_0|)-\theta(-p_0)\big]\delta(p^2-m^2)(\not p+m)\\ &= \big[2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2-m^2)-\frac{2\pi}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta(p_0+E_{\boldsymbol{p}})\big](\not p+m)\end{aligned} \tag{3}$$

よって

$$
\begin{aligned}
iS(p) &= A_\theta - A_n \\
&= (\not p + m)\Big[\frac{i}{2E_{\boldsymbol p}}(P\frac{2E_{\boldsymbol p}}{p_0^2 - E_{\boldsymbol p}^2} - i\pi\delta(p_0 - E_{\boldsymbol p}) + i\pi\delta(p_0 + E_{\boldsymbol p})) \\
&\qquad\qquad\qquad - (2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2) - \frac{2\pi}{2E_{\boldsymbol p}}\delta(p_0 + E_{\boldsymbol p}))\Big] \\
&= (\not p + m)\Big[\frac{i}{2E_{\boldsymbol p}}(P\frac{2E_{\boldsymbol p}}{p_0^2 - E_{\boldsymbol p}^2} - i\pi\delta(p_0 - E_{\boldsymbol p}) + i\pi\delta(p_0 + E_{\boldsymbol p})) + \frac{2\pi}{2E_{\boldsymbol p}}\delta(p_0 + E_{\boldsymbol p}) - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \\
&= (\not p + m)\Big[\frac{1}{2E_{\boldsymbol p}}(P\frac{i2E_{\boldsymbol p}}{p_0^2 - E_{\boldsymbol p}^2} + \pi\delta(p_0 - E_{\boldsymbol p}) + \pi\delta(p_0 + E_{\boldsymbol p})) - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \\
&= (\not p + m)\Big[i(P\frac{1}{p_0^2 - E_{\boldsymbol p}^2} - i\pi\delta(p_0^2 - E_{\boldsymbol p}^2)) - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \\
&= (\not p + m)\Big[\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となります。これが素直に考えた時の実時間上で求められる伝播関数です。しかし、実時間上での理論はもっと複雑であることは「実時間法」で示したとおりです。というわけで、(1) を閉じた時間経路法でのものに変えます。閉じた時間経路での $iS_C(x, x')$ は

$$
\begin{aligned}
iS_C(x, x') &= \theta_C(t - t')S^>(x, x') + \theta_C(t' - t)S^<(x, x') \\
&= \theta_C(t - t')(S^>(x, x') - S^<(x, x')) + S^<(x, x')
\end{aligned}
$$

時間経路 C は-∞ から ∞ を C_1、∞ から-∞ を C_2 です。t, t' が C_1 上での伝播関数を $S_{(11)}(x, x')$、C_2 上でのものを $S_{(22)}(x, x')$、C_1 上に t, C_2 上に t' のものを $S_{(12)}(x, x')$、C_1 上に t', C_2 上に t のものを $S_{(21)}(x, x')$ とします。この経路によって

$$
\begin{aligned}
iS_{(11)}(x, y) &= \theta(x_0 - y_0)S^>(x, y) + \theta(y_0 - x_0)S^<(x, y) \\
iS_{(22)}(x, y) &= \theta(y_0 - x_0)S^>(x, y) + \theta(x_0 - y_0)S^<(x, y) \\
iS_{(12)}(x, y) &= S^<(x, y) = -\langle\overline{\psi}(y)\psi(x)\rangle_\beta \\
iS_{(21)}(x, y) &= S^>(x, y) = \langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle_\beta
\end{aligned}
$$

そして (1) は

$$
\begin{aligned}
iS_C(p) &= \int d^4x d^4x' iS_C(x, x')e^{ipx - ipx'} \\
&= \int d^4x d^4x' e^{ipx - ipx'} e^{-ik(x - x')} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}[\theta_C(t - t') - n_F(k_0)]\rho_F(k)
\end{aligned}
$$

$S_{(11)}(p)$ はそのまま (4) が対応します。$S_{(12)}$ では常に t' が t よりも後の時間にいるので階段関数が消えて

$$
\begin{aligned}
iS_{(12)}(p) &= -\int d^4x d^4x' e^{ipx-ipx'}e^{-ik(x-x')}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}n_F(k_0)\rho_F(k) \\
&= -n_F(p_0)\rho_F(p) \\
&= -2\pi\epsilon(p_0)(\not{p}+m)n_F(p_0)\delta(p^2-m^2)
\end{aligned}
$$

変形させるために、ここでも $n_F(p_0)$ が

$$
n_F(p_0) = \theta(p_0)n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)
$$

と書けることを利用します。これによって

$$
\begin{aligned}
iS_{(12)} =& -2\pi\epsilon(p_0)(\not{p}+m)[\theta(p_0)n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2) \\
=& -2\pi(\not{p}+m)\big(\theta(p_0)-\theta(-p_0)\big)\big[\theta(p_0)n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)\big]\delta(p^2-m^2) \\
=& -2\pi(\not{p}+m)\big[\theta(p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)\big]\delta(p^2-m^2) \\
=& -2\pi(\not{p}+m)[n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)
\end{aligned}
$$

$S_{(21)}(x,x')$ では t は常に t' よりも大きな時間にいるので、

$$
\begin{aligned}
iS_{(21)}(p) &= [1-n_F(p_0)]\rho_F(p) \\
&= [1-\theta(p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)]\rho_F(p) \\
&= [\theta(p_0)+\theta(-p_0)-\theta(p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)]\rho_F(p) \\
&= [\theta(p_0)-\theta(p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F(|p_0|)]\rho_F(p) \\
&= 2\pi\epsilon(p_0)(\not{p}+m)\big[\theta(p_0)-\theta(p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F(|p_0|)\big]\delta(p^2-m^2) \\
&= 2\pi(\not{p}+m)\big(\theta(p_0)-\theta(-p_0)\big)\big[\theta(p_0)-\theta(p_0)n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F(|p_0|)\big]\delta(p^2-m^2) \\
&= 2\pi(\not{p}+m)\big[\theta(p_0)-\theta(p_0)n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)n_F(|p_0|)\big]\delta(p^2-m^2) \\
&= -2\pi(\not{p}+m)[n_F(|p_0|)-\theta(p_0)]\delta(p^2-m^2)
\end{aligned}
$$

最後の $S_{(22)}(x,x')$ は $\theta_C(x-x') = \theta(x'-x)$ とすればいいので

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x d^4x' e^{ipx-ipx'}e^{-ik(x-x')}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\theta(t'-t)\rho_F(k) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^4x d^4x' e^{i(p-k)x}e^{i(-p+k)x'}\frac{-1}{2\pi i}\int dz \frac{e^{-iz(t'-t)}}{z+i\epsilon}\rho_F(k) \\
&= i(2\pi)^4\delta^4(0)(\not{p}+m)\frac{-1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\big(\frac{1}{p_0-E_{\boldsymbol{p}}-i\epsilon} - \frac{1}{p_0+E_{\boldsymbol{p}}-i\epsilon}\big) \\
&= \frac{-i}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\not{p}+m)\big(P\frac{2E_{\boldsymbol{p}}}{p_0^2-E_{\boldsymbol{p}}^2} + i\pi\delta(p_0-E_{\boldsymbol{p}}) - i\pi\delta(p_0+E_{\boldsymbol{p}})\big)
\end{aligned}
$$

$n_F(p_0)$ の項は (3) と同じなので

$$
\begin{aligned}
iS_{(22)}(p) = (\not p + m)\Big[&\frac{-i}{2E_{\boldsymbol{p}}}\big(P\frac{2E_{\boldsymbol{p}}}{p_0^2 - E_{\boldsymbol{p}}^2} + i\pi\delta(p_0 - E_{\boldsymbol{p}}) - i\pi\delta(p_0 + E_{\boldsymbol{p}})\big) \\
&- \big(2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2) + n_F(|p_0|)\delta(p_0 + E_{\boldsymbol{p}}) - \frac{2\pi}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta(p_0 + E_{\boldsymbol{p}})\big)\Big] \\
= (\not p + m)\Big[&\frac{-i}{2E_{\boldsymbol{p}}}\big(P\frac{2E_{\boldsymbol{p}}}{p_0^2 - E_{\boldsymbol{p}}^2} + i\pi\delta(p_0 - E_{\boldsymbol{p}}) - i\pi\delta(p_0 + E_{\boldsymbol{p}}) + 2\pi i\delta(p_0 + E_{\boldsymbol{p}})\big) \\
&- 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \\
= (\not p + m)\Big[&- i\big(P\frac{1}{p_0^2 - E_{\boldsymbol{p}}^2} + i\pi\delta(p_0^2 - E_{\boldsymbol{p}}^2)\big) - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \\
= (\not p + m)\Big[&- \frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big]
\end{aligned}
$$

全部をまとめると

$$
\begin{aligned}
iS_{(11)}(p) &= (\not p + m)\Big[\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \\
iS_{(22)}(p) &= (\not p + m)\Big[- \frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)\Big] \\
iS_{(12)}(p) &= 2\pi(\not p + m)\big[- n_F(|p_0|) + \theta(-p_0)\big]\delta(p^2 - m^2) \\
iS_{(21)}(p) &= 2\pi(\not p + m)\big[- n_F(|p_0|) + \theta(p_0)\big]\delta(p^2 - m^2)
\end{aligned}
$$

$n_F(|p_0|)$ のように絶対値表記にしたくなければ (2 を変形した

$$\epsilon(p_0)n_F(p_0) = n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)$$

を使って置き換えればいいです。また、時間経路において C_1 から C_2 にいくときに、$-i\sigma(\sigma < \beta)$ だけずらしたときはボソンと同じで、この場合では $S_{(12)}$ に $e^{\sigma p_0}$、$S_{(21)}$ に $e^{-\sigma p_0}$ がつきます。$\sigma = \beta/2$ としたときは

$$iS_{(12)}(p) = -n_F(p_0)\rho_F(p)\ ,\ iS_{(21)}(p) = [1 - n_F(p_0)]\rho_F(p)$$

から

$$iS_{(12)}(p) = -e^{\beta p_0/2}n_F(p_0)\rho_F(p)\ ,\ iS_{(21)}(p) = e^{\beta p_0/2}n_F(p_0)\rho_F(p)$$

$$n_F(p_0)\rho_F(p) = 2\pi(\not p + m)[n_F(|p_0|) - \theta(-p_0)]\delta(p^2 - m^2)$$

となるので、ボソンと違い $S_{(12)}(p)$ と $S_{(21)}(p)$ は符号が反転します。

ついでに、ボソンの方も載せておくと

$$i\Delta_{(11)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)$$

$$i\Delta_{(22)}(p) = -\frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} + 2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)$$

$$i\Delta_{(12)}(p) = 2\pi[n_B(|p_0|) + \theta(-p_0)]\delta(p^2 - m^2)$$

$$i\Delta_{(21)}(p) = 2\pi[n_B(|p_0|) + \theta(p_0)]\delta(p^2 - m^2)$$

比較すれば分かるように、フェルミオンとボソンの差は $(\not{p} + m)$ と分布関数の符号が違うだけです。$iS_{(11)}(p)$ と $iS_{(22)}(p)$ の虚数 i がいる部分の形はボソンの場合と変わらないので、ゼロ温度部分は $iS_{(11)}(p)$ のガンマ行列を除いた部分の複素共役を取ることで $iS_{(22)}(p)$ に対応させられます。ここでも、フェルミオンのグリーン関数に対する「$*$」はガンマ行列を除いて複素共役を取るという規則を作っておくと便利です (「有限温度でのグリーン関数」参照)。

化学ポテンシャルがある場合も示しておきます。化学ポテンシャルありで便利な関係式を先に出しておくと

$$n_F(p_0 - \mu) = \theta(p_0)N_F(p_0) - \theta(-p_0)N_F(p_0) + \theta(-p_0) = \epsilon(p_0)N_F(p_0) + \theta(-p_0) \tag{5}$$

$$N_F(p_0) = \theta(p_0)n_F^-(|p_0|) + \theta(-p_0)n_F^+(|p_0|)$$

$$n_F(p_0 - \mu) = \frac{1}{e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1}\ ,\ n_F^-(|p_0|) = \frac{1}{e^{\beta(|p_0| - \mu)} + 1}\ ,\ n_F^+(|p_0|) = \frac{1}{e^{\beta(|p_0| + \mu)} + 1}$$

確かめたければ、単純に計算すればいいです。「有限密度でのフェルミオン」でも言いましたが、、$n_F^\pm$ と $\pm\mu$ を対応させていることに注意してください。$n_F^-(|p_0|)$ が粒子、$n_F^+(|p_0|)$ が反粒子に対応します。化学ポテンシャルがいる場合だと、明らかに $n_F(p_0 \pm \mu)$ と $n_F^\pm(p_0)$ の式が違ってくるので、絶対値の場合を分布関数、そうでない場合を分布関数と呼ばずに別の記号で定義することもあります (統計力学から見れば、絶対値の場合を分布関数と呼ぶのが正しい)。$N_F(p_0)$ は粒子と反粒子を含んだ分布関数を表わしています。

伝播関数を求めた出発点

$$iS_C(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')}[\theta_C(t - t') - n_F(k_0)]\rho_F(k)$$

を化学ポテンシャルありに変更するために

$$iS'_C(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')}[\theta_C(t - t') - n_F(k_0 - \mu)]\rho_F(k) \tag{6}$$

とします。「有限密度でのフェルミオン〜別形式〜」での場合を使っています (時間発展がハミルトニアンによってされる)。最低次での ρ_F には化学ポテンシャルがいないので、こっちの形式の方がデルタ関数のことを気にしないですむぶん分かりやすいです。化学ポテンシャルありでのフェルミオンの伝播関数は、(5) を使えば変更点は分布関数の変数に μ が入ってくるだけだというのが分かるので、そこだけを変更すればいいことが予想でき、実際にそうなっていますが、一応まじめにやっておきます。変更されるのは A_n のほうだけで

$$
\begin{aligned}
A'_n =& \int d^4x d^4x' e^{ip(x-x')} e^{-ik(x-x')} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} n_F(k_0-\mu)\rho_F(k) \\
&= n_F(p_0-\mu)\rho(p) \\
&= 2\pi\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)(\not{p}+m)\delta(p^2-m^2) \\
&= 2\pi\epsilon(p_0)\big[\theta(p_0)N_F(p_0)-\theta(-p_0)N_F(p_0)+\theta(-p_0)\big](\not{p}+m)\delta(p^2-m^2) \\
&= \big[2\pi N_F(p_0)\delta(p^2-m^2)-\frac{2\pi}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta(p_0+E_{\boldsymbol{p}})\big](\not{p}+m)
\end{aligned}
$$

よって C_1 上での伝播関数は

$$
iS'(p) = (\not{p}+m)\Big[\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} - 2\pi N_F(p_0)\delta(p^2-m^2)\Big]
$$

デルタ関数 $\delta(p^2-m^2) = (\delta(p-E_{\boldsymbol{p}})+\delta(p+E_{\boldsymbol{p}}))/2E_{\boldsymbol{p}}$ $(E_{\boldsymbol{p}}>0)$ より

$$
iS'(p) = (\not{p}+m)\Big[\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} - 2\pi(\frac{\theta(p_0)}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+1} + \frac{\theta(-p_0)}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}+1})\delta(p^2-m^2)\Big]
$$

と書くこともできます。また

$$
\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu) = N_F(p_0)-\theta(-p_0)
$$

を使うことで

$$
iS'(p) = (\not{p}+m)\Big[\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} - 2\pi(\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)+\theta(-p_0))\delta(p^2-m^2)\Big]
$$

これによって $S'_{(11)}(p)$ と $S'_{(22)}(p)$ は

$$
\begin{aligned}
iS'_{(11)}(p) &= (\not{p}+m)\Big[\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} - 2\pi(\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)+\theta(-p_0))\delta(p^2-m^2)\Big] \\
iS'_{(22)}(p) &= (\not{p}+m)\Big[-\frac{i}{p^2-m^2-i\epsilon} - 2\pi(\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)+\theta(-p_0))\delta(p^2-m^2)\Big]
\end{aligned}
$$

$S'_{(12)}(p), S'_{(21)}(p)$ は単純に $n_F(p_0-\mu)$ にすればいいだけなので

$$
\begin{aligned}
iS'_{(12)}(p) &= -2\pi(\not{p}+m)\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)\delta(p^2-m^2) \\
iS'_{(21)}(p) &= 2\pi(\not{p}+m)\epsilon(p_0)[1-n_F(p_0-\mu)]\delta(p^2-m^2)
\end{aligned}
$$

$S'_{(12)}(p) = e^{-\beta(p_0-\mu)}S'_{(21)}(p)$ の久保-Martin-Schwinger の関係を満たしています。
経路を途中で $-i\sigma$ 動かした場合は単純で (化学ポテンシャルありの S' を S と書いてしまいます)

$$iS_{(12)}(p) = -2\pi e^{\sigma p_0}(\not{p}+m)\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu)\delta(p^2-m^2)$$

$$iS_{(21)}(p) = 2\pi e^{-\sigma p_0}(\not{p}+m)\epsilon(p_0)[1-n_F(p_0-\mu)]\delta(p^2-m^2)$$

となるだけです。$\mu \neq 0$ のときに $\sigma = \beta/2$ にすると、$S_{(12)}(p)$ と $S_{(21)}(p)$ の関係が少し変わります。$S_{(12)}(p)$ では、$p_0 > 0$ と $p_0 < 0$ に対して

$$e^{\beta p_0/2}\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu) = n_F^-(|p_0|) = \frac{e^{\beta|p_0|/2}}{e^{\beta(|p_0|-\mu)}+1} \quad (p_0 > 0)$$

$$\begin{aligned} e^{\beta p_0/2}\epsilon(p_0)n_F(p_0-\mu) &= e^{-\beta|p_0|/2}(n_F^+(|p_0|)-1) \\ &= -e^{-\beta|p_0|/2}\frac{e^{\beta(|p_0|+\mu)}}{e^{\beta(|p_0|+\mu)}+1} \\ &= -e^{\beta|p_0|/2}\frac{e^{\beta\mu}}{e^{\beta(|p_0|+\mu)}+1} \quad (p_0 < 0) \end{aligned}$$

$S_{(21)}(p)$ では

$$e^{-\beta p_0/2}\epsilon(p_0)[1-n_F(p_0-\mu)] = e^{-\beta p_0/2}\theta(p_0)[1-n_F(p_0-\mu)] - e^{-\beta p_0/2}\theta(-p_0)[1-n_F(p_0-\mu)]$$

$p_0 > 0$ で

$$\begin{aligned} e^{-\beta|p_0|/2}[1-n_F(|p_0|-\mu)] = e^{-\beta|p_0|/2}[1-n_F^-(|p_0|)] &= e^{-\beta|p_0|/2}(1-\frac{1}{e^{\beta(|p_0|-\mu)}+1}) \\ &= e^{-\beta|p_0|/2}\frac{e^{\beta(|p_0|-\mu)}}{e^{\beta(|p_0|-\mu}+1} \\ &= e^{\beta|p_0|/2}\frac{e^{-\beta\mu}}{e^{\beta(|p_0|-\mu}+1} \end{aligned}$$

$p_0 < 0$ で

$$-e^{\beta|p_0|/2}[1-n_F(-|p_0|-\mu)] = -e^{\beta|p_0|/2}[1+n_F^+(|p_0|)-1] = -\frac{e^{\beta|p_0|/2}}{e^{\beta(|p_0|+\mu)}+1}$$

これらを比べてみると $p_0 > 0,\ p_0 < 0$ 両方に対して $S_{21}(p)$ に $-e^{\beta\mu}$ をかければ $S_{12}(p)$ と等しくなっていくことが分かります。つまり

$$S_{(12)}(p) = -e^{\beta\mu}S_{(21)}(p)$$

このようになります。$\mu = 0$ で $S_{(12)}(p) = -S_{(21)}(p)$ になります。

最後に時間発展として $K = H - \mu N$ を使った場合も示しておきます。今度はスペクトル関数のほうに化学ポテンシャルがいるタイプで

$$iS_C(x,x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-x')}[\theta_C(t-t')-n_F(k_0)]\rho_F(k_0+\mu,\boldsymbol{k})$$

というのです (ρ_F は $k_0+\mu$ 依存するとしています)。この場合では $n_F(k_0)$ がそのままで、スペクトル関数が変更されて、A_n は

$$
\begin{aligned}
A_n &= n_F(p_0)\rho(p_0+\mu,\boldsymbol{p}) = 2\pi\epsilon(p'_0)n_F(p_0)(\not{p}'+m)\delta(p'^2-m^2)\\
&= 2\pi\epsilon(p'_0)n_F(p_0)(\not{p}'+m)\delta(p'^2-m^2)\\
&= 2\pi(\not{p}'+m)n_F(p'_0-\mu)\epsilon(p'_0)\delta(p'^2-m^2)\\
&= 2\pi(\not{p}'+m)[\epsilon(p'_0)N_F(p'_0)+\theta(-p'_0)]\epsilon(p'_0)\delta(p'^2-m^2)\\
&= 2\pi(\not{p}'+m)[N_F(p'_0)-\theta(-p'_0)]\delta(p'^2-m^2)\\
&= 2\pi(\not{p}'+m)[N_F(p'_0)\delta(p'^2-m^2)-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta(p'_0+E_{\boldsymbol{p}})]
\end{aligned}
$$

となります ($p'_\mu=(p'_0=p_0+\mu,p_i)$)。$A_\theta$ では時間経路が C_1 の場合で

$$
\begin{aligned}
A_\theta &= \frac{-1}{2\pi i}(2\pi)^8\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\int dz\frac{1}{z+i\epsilon}\delta(p_0-k_0-z)\delta(-p_0+k_0+z)\rho_F(k)\\
&= i(2\pi)^8\delta(0)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\frac{(k_0+\mu)\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-k_0+i\epsilon}\epsilon(k_0+\mu)\delta((k_0+\mu)^2-\boldsymbol{k}^2-m^2)
\end{aligned}
$$

ここで、k_0 積分を $k'_0=k_0+\mu$ に変更して (合わせるために $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}'$ と書きます)

$$
\begin{aligned}
A_\theta &= i(2\pi)^8\delta(0)\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}')\frac{k'_0\gamma_0-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-(k'_0-\mu)+i\epsilon}\epsilon(k'_0)\delta(k'^2_0-\boldsymbol{k}'^2-m^2)\\
&= i(2\pi)^8\delta(0)\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}')\frac{k'_0\gamma_0-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-(k'_0-\mu)+i\epsilon}\\
&\qquad\qquad\times(\theta(k'_0)-\theta(-k'_0))\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}(\delta(k'_0-E_{\boldsymbol{k}})+\delta(k'_0+E_{\boldsymbol{k}}))\\
&= i(2\pi)^8\delta^4(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'_0}{(2\pi)^4}\frac{k'_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0-(k'_0-\mu)+i\epsilon}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\theta(k'_0)-\theta(-k'_0))(\delta(k'_0-E_{\boldsymbol{p}})+\delta(k'_0+E_{\boldsymbol{p}}))\\
&= i(2\pi)^4\delta^4(0)\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big(\frac{E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0+\mu-E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}-\frac{-E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{p_0+\mu+E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}\Big)\\
&= i(2\pi)^4\delta^4(0)((p_0+\mu)\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)\\
&\quad\times\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big(P\frac{1}{p_0+\mu-E_{\boldsymbol{p}}}-i\pi\delta(p_0+\mu-E_{\boldsymbol{p}})-P\frac{1}{p_0+\mu+E_{\boldsymbol{p}}}+i\pi\delta(p_0+\mu+E_{\boldsymbol{p}})\Big)\\
&= i(2\pi)^4\delta^4(0)(\not{p}'+m)\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\Big(P\frac{2E_{\boldsymbol{p}}}{p'_0-E^2_{\boldsymbol{p}}}-i\pi\delta(p'_0-E_{\boldsymbol{p}})+i\pi\delta(p'_0+E_{\boldsymbol{p}})\Big)
\end{aligned}
$$

というわけで、p が p' に置き換わっているだけなので

$$iS(p)=(\not{p}'+m)\Big[\frac{i}{p'^2-m^2+i\epsilon}-2\pi N_F(p'_0)\delta(p'^2-m^2)\Big]$$
$$=(\not{p}'+m)\Big[\frac{i}{p'^2-m^2+i\epsilon}-2\pi(\epsilon(p'_0)n_F(p'_0-\mu)+\theta(-p'_0))\delta(p'^2-m^2)\Big]$$

$E_{\boldsymbol{p}}$ を使うなら

$$iS(p)=(\not{p}'+m)\Big[\frac{i}{p'^2-m^2+i\epsilon}-2\pi(\frac{\theta(p'_0)}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+1}+\frac{\theta(-p'_0)}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}+1})\delta(p'^2-m^2)\Big]$$

となります。よって

$$iS_{(11)}(p)=(\not{p}'+m)\Big[\frac{i}{p'^2-m^2+i\epsilon}-2\pi(\epsilon(p'_0)n_F(p'_0-\mu)+\theta(-p'_0))\delta(p'^2-m^2)\Big]$$
$$iS_{(22)}(p)=(\not{p}'+m)\Big[-\frac{i}{p'^2-m^2-i\epsilon}-2\pi(\epsilon(p'_0)n_F(p'_0-\mu)+\theta(-p'_0))\delta(p'^2-m^2)\Big]$$
$$iS_{(12)}(p)=-2\pi(p'$$
$$iS_{(21)}(p)=2\pi(\not{p}'+m)\epsilon(p'_0)[1-n_F(p'_0-\mu)]\delta(p'^2-m^2)$$

$n_F(p'_0-\mu)$ は $n_F(p_0)$ ですが、そろえるために p'_0 にして書いています。この形のやっかいな点は階段関数に μ がいる点です。ちなみに $S_{(11)}(p)$ のデルタ関数項は

$$(\epsilon(p'_0)n_F(p'_0-\mu)+\theta(-p'_0))\delta(p'^2-m^2)$$
$$=(\epsilon(p'_0)n_F(p'_0-\mu)+\theta(-p'_0))\delta(p'^2_0-E^2)$$
$$=\frac{1}{2E}\big(\theta(p_0+\mu)n_F(p_0)+\theta(-p_0-\mu)(1-n_F(p_0))\big)\big(\delta(p_0+\mu-E)+\delta(p_0+\mu+E)\big)$$
$$=\frac{1}{2E}\big(\theta(p_0+\mu)n_F(p_0)+\theta(-p_0-\mu)n_F(-p_0)\big)\big(\delta(p_0+\mu-E)+\delta(p_0+\mu+E)\big)$$
$$=\frac{1}{2E}\theta(p_0+\mu)n_F(E-\mu)+\theta(-p_0-\mu)n_F(-(-E-\mu)))(\delta(p_0+\mu-E)+\delta(p_0+\mu-(-E))$$

このときデルタ関数と階段関数の関係から

$$(\theta(p_0+\mu)n_F(E-\mu)+\theta(-p_0-\mu)n_F(E+\mu))\delta(p'^2-m^2)$$

となって、「有限密度でのフェルミオン」の最後に載せた形になります。
　というわけで、明らかに異なった形が導出されます。一致させるにはフーリエ変換 (6) において

$$A'_n=\int d^4xd^4x'e^{i(p_0+\mu)(t-t')}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}e^{-ik(x-x')}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}n_F(k_0-\mu)\rho_F(k)$$

とします。そうすると

$$
\begin{aligned}
A'_n =& \int d^4xd^4x' e^{i(p_0+\mu-k_0)(t-t')} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} n_F(k_0-\mu)\rho_F(k) \\
=& \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3xd^3x' e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} n_F(p_0)\rho_F(p_0+\mu,\boldsymbol{k}) \\
=& n_F(p_0)\rho_F(p_0+\mu,\boldsymbol{p})
\end{aligned}
$$

となって、A'_n が A_n に一致します (運動量保存のデルタ関数は無視しています)。A'_θ でも

$$
\begin{aligned}
A'_\theta =& \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^4xd^4x' e^{i(p_0+\mu-k_0)(t-t')} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(t-t')}}{z+i\epsilon} \rho_F(k) \\
=& \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^3xd^3x' e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}} e^{i(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}'} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dtdt' \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z+i\epsilon} e^{i(p_0+\mu-k_0-z)t} e^{i(-p_0-\mu+k_0+z)t'} \rho_F(k) \\
=& \frac{-1}{2\pi i}(2\pi)^8\delta(0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}') \frac{\not{k}+m}{p_0-(k_0-\mu)+i\epsilon} 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k_0^2-E_{\boldsymbol{p}}^2)
\end{aligned}
$$

これは k_0 が k'_0 なのだと思えば一致します。というわけで、一致した結果を導けます。もっと単純には H の形式での p_0 を $p'_0 = p_0 + \mu$ にすれば一致します。このこととフーリエ変換の変更で一致するということから、二つの形式の差は外線エネルギー p_0 に μ が含まれているかいないかということで、エネルギーが単に μ だけシフトしているだけと言えます。これは「有限密度でのフェルミオン〜別形式〜」でした話と同じことです。ちなみに、虚時間法の結果と直接対応するのは時間発展として K を使った形式の方です。

・補足

スペクトル関数に相互作用なしのものを使わないで、そのまま残しておいた場合の形を示しておきます。おそらくこの形が一番分かりやすいです (arXiv:0901.1045v1 に載っている形)。出発点は、フェルミオンでは

$$
\begin{aligned}
iS_C(p) =& \int_C d^4xd^4x' \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')} e^{-ik(x-x')} [\theta_C(t-t') - n_F(k_0)]\rho_F(k) \\
=& A_\theta + A_n
\end{aligned}
$$

ボソンなら

$$
iD_C(p) = \int_C d^4xd^4x' e^{ipx-ipx'} e^{-ik(x-x')} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\theta_C(t-t') + n_B(k)]\rho_B(k)
$$

スペクトル関数は運動量にしか依存していないので、フーリエ変換部分と階段関数のところだけを計算すればいいです。上で行った計算でスペクトル関数に具体形を入れなければいいだけなので、A_θ は

$$
\begin{aligned}
A_\theta =& \int_{C_1} d^4xd^4x' e^{ipx-ipx'} e^{-ik(x-x')} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \theta(t-t')\rho_F(k) \\
=& \frac{-1}{2\pi i}(2\pi)^8 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^3(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z+i\epsilon} \delta(p_0-k_0-z)\delta(-p_0+k_0+z)\rho_F(k) \\
=& \frac{-1}{2\pi i}(2\pi)^8\delta^3(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z+i\epsilon} \delta(p_0-k_0-z)\delta(-p_0+k_0+z)\rho_F(k) \\
=& (2\pi)^4\delta^4(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{i}{p_0-k_0+i\epsilon} \rho_F(k)
\end{aligned}
$$

A_n は

$$
\begin{aligned}
A_n =& -\int_C d^4xd^4x' \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')} e^{-ik(x-x')} n_F(k_0)\rho_F(k) \\
=& -(2\pi)^3\delta^3(0) \int_{-\infty}^{\infty} dtdt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{ip_0(t-t')} e^{-ik_0(t-t')} n_F(k_0)\rho_F(k_0,\boldsymbol{p}) \\
=& -(2\pi)^4\delta^4(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} 2\pi\delta(k_0-p_0) n_F(k_0)\rho_F(k_0,\boldsymbol{p})
\end{aligned}
$$

よって、運動量保存のデルタ関数を取り除くことで

$$
iS_{(11)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} (\frac{i}{p_0-k_0+i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0)\delta(k_0-p_0))\rho_F(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iD_{(11)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} (\frac{i}{p_0-k_0+i\epsilon} + 2\pi n_B(k_0)\delta(k_0-p_0))\rho_B(k_0,\boldsymbol{p})
$$

残った成分も同様なので

$$
iS_{(11)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \big(\frac{i}{p_0-k_0+i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0)\delta(k_0-p_0)\big)\rho_F(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iS_{(22)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \big(\frac{-i}{p_0-k_0-i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0)\delta(k_0-p_0)\big)\rho_F(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iS_{(12)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \big(-2\pi n_F(k_0)\delta(k_0-p_0)\big)\rho_F(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iS_{(21)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} 2\pi\big(1-n_F(k_0)\big)\delta(k_0-p_0)\rho_F(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iD_{(11)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \big(\frac{i}{p_0-k_0+i\epsilon} + 2\pi n_B(k_0)\delta(k_0-p_0)\big)\rho_B(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iD_{(22)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \big(\frac{-i}{p_0-k_0-i\epsilon} + 2\pi n_B(k_0)\delta(k_0-p_0)\big)\rho_B(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iD_{(12)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} 2\pi n_B(k_0)\delta(k_0-p_0)\rho_B(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iD_{(21)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} 2\pi\big(1+n_B(k_0)\big)\delta(k_0-p_0)\rho_B(k_0,\boldsymbol{p})
$$

これらは

$$
iS_{(ab)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} I_{(ab)}(p_0,k_0)\rho_F(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
iD_{(ab)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} J_{(ab)}(p_0,k_0)\rho_B(k_0,\boldsymbol{p})
$$

$$I_{(11)}(p_0,k_0)=I^*_{(22)}(p_0,k_0)=\frac{i}{p_0-k_0+i\epsilon}-2\pi n_F(k_0)\delta(p_0-k_0)$$

$$I_{(12)}(p_0,k_0)=-2\pi n_F(k_0)\delta(p_0-k_0)\ ,\ I_{(21)}(p_0,k_0)=2\pi(1-n_F(k_0))\delta(p_0-k_0)$$

$$J_{(11)}(p_0,k_0)=J^*_{(22)}(p_0,k_0)=\frac{i}{p_0-k_0+i\epsilon}+2\pi n_B(k_0)\delta(p_0-k_0)$$

$$J_{(12)}(p_0,k_0)=2\pi n_B(k_0)\delta(p_0-k_0)\ ,\ J_{(21)}(p_0,k_0)=2\pi(1+n_B(k_0))\delta(p_0-k_0)$$

と書くことが出来ます。化学ポテンシャルのありのときは H の形式では単に分布関数 $n_F(k_0),n_B(k_0)$ が $n_F(k_0-\mu),n_B(k_0-\mu)$ になるだけです。K の形式では分布関数でなく、スペクトル関数に μ が入り込むことになり、$k_0+\mu$ に依存している限り、$\rho(k_0+\mu,\boldsymbol{p})$ と書けます。また、時間経路を $-i\beta/2$ 動かしたときでは、$iS_{(12)},iD_{(12)}$ に $e^{\beta k_0/2}$、$iS_{(21)},iD_{(21)}$ に $e^{-\beta k_0/2}$ がつくので

$$I_{(12)}=-I_{(21)}=-2\pi e^{\beta k_0/2}n_F(k_0)\delta(p_0-k_0)$$

$$J_{(12)}=J_{(21)}=2\pi e^{\beta k_0/2}n_B(k_0)\delta(p_0-k_0)$$

どうでもいいことですが、この形を示した arXiv:0901.1045v1 は The European Physical Journal C に掲載されているんですが、2009 年にこんな単純なことだけで雑誌に載るっていうのは、実時間法がどれだけ発展していないのかを示しているような気がします (審査員が甘かっただけかもしれませんが)。