実時間法〜クライン・ゴルドン場〜

実時間法での実数スカラー場の伝播関数を求めます。ここでは伝播関数が満たす方程式を久保-Martin-Schwingerの関係を満たすように解くという方法で求めます。

実時間法における生成汎関数は

$$Z[J] = N\exp[-\frac{i}{2}\int_C d^4x\int_C d^4yJ(x)\Delta_C(x,y)J(y)]$$

で与えられ、C は C_1 による C_2 経路だとします。このときの $\Delta_C(x-y)$ は方程式として

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Delta_C(x-y) = -\delta_C^4(x-y) \tag{1}$$

を満たすものです。そして、$\Delta_C(x-y)$ を演算子によって書けば

$$i\Delta_C(x_0-y_0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \theta_C(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta_C(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta$$

階段関数 $\theta_C(t-t')$ は

$$\theta_c(t-t') = \begin{cases} \theta(t-t') & \cdots \quad (a) \\ \theta(t'-t) & \cdots \quad (b) \\ 0 & \cdots \quad (c) \\ 1 & \cdots \quad (d) \end{cases} \tag{2}$$

(a) は x_0,y_0 が C_1 上、(b) は x_0,y_0 が C_2 上、(c) は x_0 が C_1 上 , y_0 が C_2 上、(d) は x_0 が C_2 上 , y_0 が C_1 上の場合です。そして、デルタ関数 $\delta_C^4(x-y)$ は

$$\frac{d\theta_c(t-t')}{dt} = \delta_c(t-t') = \begin{cases} \delta(t-t') & \cdots \quad (a) \\ -\delta(t-t') & \cdots \quad (b) \\ 0 & \cdots \quad (c),(d) \end{cases} \tag{3}$$

となっています。

この各経路で定義される伝播関数 $i\Delta_C(x,y)$ をフーリエ変換して運動量表示に持っていくんですが、今の場合、時間の経路が特殊なので 4 次元成分全てを一気にフーリエ変換できません。空間成分は通常通りなので、(1) に対して空間成分のフーリエ変換を行うと ($x_0=t, y_0=t'$ とします)

$$\begin{aligned} \big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\big)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Delta_C(t-t',\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} &= -\delta_C(t-t')\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\ \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{p}^2 + m^2\big)\Delta_C(t-t',\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} &= \end{aligned}$$

よって、空間成分を運動量表示にしたときの方程式は

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2)\Delta_C(t-t',\omega)=-\delta_C(t-t') \quad (\omega=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}) \tag{4}$$

このような形になります。この方程式を満たす $\Delta_C(t-t',\omega)$ を見つけたいんですが、今の場合周期性として

$$G^>(t-t'-i\beta,\omega)=G^<(t-t',\omega)$$

$$(G^>(x,y)=\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta\ ,\ G^<(x,y)=\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta)$$

このような条件 (久保-Martin-Scwinger の関係) があります。これを満たしてくれる解を作ります。(4) はゼロ温度の場合と変わらない方程式なので、時間の正負に対応する階段関数がいると予想できます。そして、階段関数の微分はデルタ関数になるということを踏まえると、2 回の t 微分によって上手いこと $-\omega^2$ を導くようなものが、階段関数にくっついていればいいだろうと考えられます。さらに、久保-Martin-Scwinger の関係を満たしているという条件を加えれば

$$\Delta_C(t-t',\omega)=\theta_C(t-t')f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})+\theta_C(t'-t)f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')}) \tag{5}$$

このような形が考えられます。$\Delta_C(t-t',\omega)$ は、伝播関数の性質

$$\Delta_C(t-t',\omega)=\Delta_C(t'-t,\omega)$$

を持っています。ちなみに虚時間法では単純にフーリエ変換から運動量表示の伝播関数を求めることができていたのは、離散的なフーリエ変換を使うことで久保-Martin-Scwinger の関係を含められていたためです。

ここで、伝播関数を考えるときに C_3, C_4 を無視した理由が分かります。例えば、t が C_1 上で t' が C_3 上にいるとしたとき、t' は t_- となって、(5) は、σ を $0\sim\beta$ として

$$\Delta_{(13)}(t-t_-+i\rho,\omega)=f(\omega)(e^{-i\omega(t-t_-+i\sigma)}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t_-+i\sigma)})=f(\omega)(e^{-i\omega(t-t_-+i\sigma)}+e^{i\omega(t-t_-+i(\sigma-\beta))})$$

C_3 の方が C_1 より後の時間なので $\theta_C(t'-t)$ の項を拾っています。このとき t_- を $-\infty$ に持っていけば、σ と $(\sigma-\beta)<0$ 部分が減衰の役割を果たし

$$\lim_{t_-\to-\infty}\Delta_{(13)}(t-t_-+i\sigma,\omega)=0$$

となります。つまり、C_3 上に時間がいるときは、伝播関数が 0 になることが分かります。これは他の、C_2 と C_3 の組み合わせでも同じになるので、C_3 からの伝播関数の寄与というのは出てきません。このような事情があるので、伝播関数を考えるときには C_3, C_4 を無視でき、経路積分上でも C_3, C_4 の寄与は規格化定数にいれてしまえます。

$f(\omega)$ を決めるために (5) を (4) に代入します (ついでに言えば、(4) を満たすような $f(\omega)$ があれば (5) でよかったということも分かります)。このとき、階段関数の微分がでてくるんですが、これは (2) のように経路で場合分けされていることに注意する必要があります。デルタ関数 $\delta_C(t-t')$ に関しては

$$\int_C dt'\delta_C(t-t')F(t')=F(t)$$

となっているのであまり気にする必要はないです。

(5) の第一項に t 微分を行うと

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(\theta_C(t-t')f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})\big)\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\big[\delta_C(t-t')f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})+\theta_C(t-t')f(\omega)(i\omega e^{i\omega(t-t')}-i\omega e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})\big]\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\big[\delta_C(t-t')f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})\big]\\
&+\delta_C(t-t')f(\omega)(i\omega e^{i\omega(t-t')}-i\omega e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})+\theta_C(t-t')f(\omega)(-\omega^2 e^{i\omega(t-t')}-\omega^2 e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})
\end{aligned}
$$

同様に第二項では

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(\theta_C(t'-t)f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\big)\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\big[-\delta_C(t'-t)f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})+\theta_C(t'-t)f(\omega)(-i\omega e^{-i\omega(t-t')}+i\omega e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\big]\\
=&-\frac{\partial}{\partial t}\big[\delta_C(t-t')f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\big]\\
&-\delta_C(t-t')f(\omega)(-i\omega e^{-i\omega(t-t')}+i\omega e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})+\theta_C(t'-t)f(\omega)(-\omega^2 e^{-i\omega(t-t')}-\omega^2 e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})
\end{aligned}
$$

というわけで、(4) の左辺は

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega^2)\Delta_C(t-t',\omega)\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\big[\delta_C(t-t')f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})\big]+\delta_C(t-t')i\omega f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}-e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})\\
&-\theta_C(t-t')\omega^2 f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})+\theta_C(t-t')\omega^2 f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\big[\delta_C(t-t')f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\big]+\delta_C(t-t')i\omega f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}-e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\\
&-\theta_C(t'-t)\omega^2 f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})+\theta_C(t'-t)\omega^2 f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\big[\delta_C(t-t')f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})\big]-\frac{\partial}{\partial t}\big[\delta_C(t-t')f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\big]\\
&+\delta_C(t-t')i\omega f(\omega)(e^{i\omega(t-t')}-e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})+\delta_C(t-t')i\omega f(\omega)(e^{-i\omega(t-t')}-e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})
\end{aligned}
$$

第一項と第二項が消えて、第三項と第四項を足したら $\delta_C(t-t')$ になるように $f(\omega)$ を決めればいいです。まともにやるのは面倒なので、デルタ関数を潰すために、t で積分を行えば

$$
2i\omega f(\omega)(1-e^{\beta\omega})=-1
$$

となるので、$f(\omega)$ は

$$f(\omega)=\frac{1}{2i\omega}\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}=\frac{1}{2i\omega}n_B(\omega)$$

であることが分かります (n_B はボソンの分布関数)。よって

$$\Delta_C(t-t',\omega)=\theta_C(t-t')\frac{n_B(\omega)}{2i\omega}\big(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')}\big)$$

$$+\theta_C(t'-t)\frac{n_B(\omega)}{2i\omega}\big(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')}\big)$$

これを t,t' が C_1,C_2 にいるとしたときの場合分けによって書いてみます。t,t' が両方とも C_1 にいるときは

$$\begin{aligned}
\Delta_{(11)}(t-t',\omega)=&\theta(t-t')\frac{n_B(\omega)}{2i\omega}(e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega-i\omega(t-t')})+\theta(t'-t)\frac{n_B(\omega)}{2i\omega}(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\\
=&\theta(t-t')\frac{1}{2i\omega}\frac{e^{i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega}e^{-i\omega(t-t')}-e^{-i\omega(t-t')}+e^{-i\omega(t-t')}}{e^{\beta\omega}-1}\\
&+\theta(t'-t)\frac{1}{2i\omega}\frac{e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega}e^{i\omega(t-t')}-e^{i\omega(t-t')}+e^{i\omega(t-t')}}{e^{\beta\omega}-1}\\
=&\theta(t-t')\frac{1}{2i\omega}\frac{e^{i\omega(t-t')}+e^{-i\omega(t-t')}(e^{\beta\omega}-1)+e^{-i\omega(t-t')}}{e^{\beta\omega}-1}\\
&+\theta(t'-t)\frac{1}{2i\omega}\frac{e^{-i\omega(t-t')}+e^{i\omega(t-t')}(e^{\beta\omega}-1)+e^{i\omega(t-t')}}{e^{\beta\omega}-1}\\
=&\theta(t-t')\frac{1}{2i\omega}\big[\frac{e^{i\omega(t-t')}+e^{-i\omega(t-t')}}{e^{\beta\omega}-1}+e^{-i\omega(t-t')}\big]+\theta(t'-t)\frac{1}{2i\omega}\big[\frac{e^{-i\omega(t-t')}+e^{i\omega(t-t')}}{e^{\beta\omega}-1}+e^{i\omega(t-t')}\big]\\
=&\frac{1}{2i\omega}\big[\frac{e^{i\omega(t-t')}+e^{-i\omega(t-t')}}{e^{\beta\omega}-1}+\theta(t-t')e^{-i\omega(t-t')}+\theta(t'-t)e^{i\omega(t-t')}\big]\\
=&\frac{-i}{2\omega}\big[(\theta(t-t')+n_B(\omega))e^{-i\omega(t-t')}+(\theta(t'-t)+n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')}\big]
\end{aligned}$$

下から 3 行目から 2 行目にいくときに、$\theta(t-t')$ と $\theta(t'-t)$ の [ ] 内の第一項が階段関数に関係なく同じなので、階段関数を外して一つにしています ($t-t'$ の正負両方に対して生き残るため)。t が C_1、t' が C_2 にいる場合では

$$\begin{aligned}
\Delta_{(12)}(t-t',\omega) &= \theta(t'-t)\frac{n_B(\omega)}{2i\omega}(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega+i\omega(t-t')})\\
&= \frac{n_B(\omega)}{2i\omega}(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega}e^{i\omega(t-t')})\\
&= \frac{n_B(\omega)}{2i\omega}\big(e^{-i\omega(t-t')}+e^{\beta\omega}e^{i\omega(t-t')}-e^{i\omega(t-t')}+e^{i\omega(t-t')}\big)\\
&= \frac{n_B(\omega)}{2i\omega}\big[e^{-i\omega(t-t')}+e^{i\omega(t-t')}(e^{\beta\omega}-1+1)\big]\\
&= \frac{-i}{2\omega}\big[n_B(\omega)e^{-i\omega(t-t')}+(1+n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')}\big]
\end{aligned}$$

$\Delta_{(22)}$ と $\Delta_{(21)}$ も同様にすることで、まとめて全部を書くと

$$\Delta_{(11)}(t-t',\omega)=\frac{-i}{2\omega}\big[(\theta(t-t')+n_B(\omega))e^{-i\omega(t-t')}+(\theta(t'-t)+n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')}\big]$$

$$\Delta_{(22)}(t-t',\omega)=\frac{-i}{2\omega}\big[(\theta(t-t')+n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')}+(\theta(t'-t)+n_B(\omega))e^{-i\omega(t-t')}\big]$$

$$\Delta_{(12)}(t-t',\omega)=\frac{-i}{2\omega}\big[n_B(\omega)e^{-i\omega(t-t')}+(1+n_B(\omega))e^{i\omega(t-t')}\big]$$

$$\Delta_{(21)}(t-t',\omega)=\frac{-i}{2\omega}\big[n_B(\omega)e^{i\omega(t-t')}+(1+n_B(\omega))e^{-i\omega(t-t')}\big]$$

このような 4 つの伝播関数が出来上がります。$\Delta_{(ab)}(t-t')$ の t,t' の位置と添え字 (ab) はそれぞれ対応した経路上にいます。例えば $\Delta_{(21)}(t-t',\omega)$ では、C_2 上に t で C_1 上に t' です。この時間の順序から、$\Delta_{(12)}(x,y)$ は $\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta$、$\Delta_{(21)}(x,y)$ は $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta$ に対応しています。

完全に運動量表示にするために $\Delta_{(ab)}(t-t',\omega)$ の時間成分を変換します。$\Delta_{(11)}(t-t',\omega)$ の $n_B(\omega)$ を含まない項は

$$\begin{aligned}
&\frac{-i}{2\omega}\int dtdt'[\theta(t-t')e^{-i\omega(t-t')}+\theta(t'-t)e^{i\omega(t-t')}]e^{ip_0(t-t')}\\
&=\frac{-i}{2\omega}\int dtdt'\Big[\frac{1}{2\pi i}\int dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-i\epsilon}e^{-i\omega(t-t')}-\frac{1}{2\pi i}\int dz\frac{e^{-iz(t'-t)}}{z+i\epsilon}e^{i\omega(t-t')}\Big]e^{ip_0(t-t')}\\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{1}{2\pi i}\int dtdt'\Big[\int dz\frac{1}{z-i\epsilon}e^{i(-\omega+z+p_0)t}e^{-i(-\omega+z+p_0)t'}-\int dz\frac{1}{z+i\epsilon}e^{i(\omega+z+p_0)t}e^{-i(\omega+z+p_0)t}\Big]\\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{(2\pi)^2}{2\pi i}\Big[\int dz\frac{1}{z-i\epsilon}\delta(-\omega+z+p_0)\delta(-\omega+z+p_0)-\int dz\frac{1}{z+i\epsilon}\delta(\omega+z+p_0)\delta(\omega+z+p_0)\Big]\\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{(2\pi)^2}{2\pi i}(\frac{1}{-p_0+\omega-i\epsilon}-\frac{1}{-p_0-\omega+i\epsilon})\delta(0)\\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{(2\pi)^2}{2\pi i}(\frac{-p_0-\omega+p_0-\omega}{(p_0-\omega+i\epsilon)(p_0+\omega-i\epsilon)})\delta(0)\\
&=\frac{1}{(p_0-\omega+i\epsilon)(p_0+\omega-i\epsilon)}2\pi\delta(0)\\
&=\frac{1}{p_0^2-(\omega-i\epsilon)^2}2\pi\delta(0)\\
&=\frac{1}{p_0^2-\omega^2+i\epsilon}2\pi\delta(0)
\end{aligned}$$

途中で階段関数の式

$$\theta(t'-t) = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int dz \frac{e^{-iz(t'-t)}}{z+i\epsilon}$$

$$\theta(t-t') = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int dz \frac{e^{iz(t-t')}}{z-i\epsilon}$$

を使っています。1 番目のは階段関数の定義式そのもので、2 番目のはそれの複素共役です。exp 部分が $iz(t-t')$ となっているのは、この式を複素積分を使って計算すれば分かります (1 番目は経路が下半円、2 番目は上半円)。最後の行へは、ϵ が微小量で、$\omega > 0$ なので

$$(p_0-\omega+i\epsilon)(p_0+\omega-i\epsilon) = p_0^2-\omega^2+2i\omega\epsilon = p_0^2-\omega^2+i\epsilon'$$

としています。また、$2\pi\delta(0)$ は本来運動量保存の $2\pi\delta(p_0-q_0)$ として出てくるものですが、最初から $p_0=q_0$ としているので、$2\pi\delta(0)$ として出てきています。

n_B の項には階段関数もないので、簡単のために $t'=0$ としてしまって

$$\begin{aligned}\frac{-i}{2\omega}n_B(\omega)\int dt(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})e^{ip_0 t} &= \frac{-i}{2\omega}n_B(\omega)\int dt(e^{i(p_0+\omega)t}+e^{i(p_0-\omega)t})\\ &= -in_B(\omega)2\pi\frac{1}{2\omega}(\delta(p_0+\omega)+\delta(p_0-\omega))\\ &= -2\pi i n_B(\omega)\delta(p_0^2-\omega^2)\end{aligned}$$

$$(\delta(p_0^2-\omega^2) = \frac{1}{2\omega}(\delta(p_0-\omega)+\delta(p_0+\omega))$$

となります。n_B の項は $\Delta_{(11)},\Delta_{(12)},\Delta_{(21)},\Delta_{(22)}$ で同じです。

よって、$\Delta_{(11)}(p)$ は

$$\Delta_{(11)}(p) = \frac{1}{p_0^2-\omega^2+i\epsilon} - 2\pi i n_B(\omega)\delta(p_0^2-\omega^2)$$

$\Delta_{(11)}(t-t',\omega)$ と $\Delta_{(22)}(t-t',\omega)$ の式を比べると、n_B を含まない項は複素共役を取って符号を反転させると一致することが分かるので、$\Delta_{(22)}$ のフーリエ変換を行わなくても、結果が分かります。一応同じように直接計算すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{-i}{2\omega}\int dtdt'[\theta(t-t')e^{i\omega(t-t')}+\theta(t'-t)e^{-i\omega(t-t')}]e^{ip_0(t-t')} \\
&=\frac{-i}{2\omega}\int dtdt'\Big[\frac{1}{2\pi i}\int dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-i\epsilon}e^{i\omega(t-t')}-\frac{1}{2\pi i}\int dz\frac{e^{-iz(t'-t)}}{z+i\epsilon}e^{-i\omega(t-t')}\Big]e^{ip_0(t-t')} \\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{1}{2\pi i}\int dtdt'\Big[\int dz\frac{1}{z-i\epsilon}e^{i(\omega+z+p_0)t}e^{-i(\omega+z+p_0)t'}-\int dz\frac{1}{z+i\epsilon}e^{-i(\omega-z-p_0)t}e^{i(\omega-z-p_0)t}\Big] \\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{(2\pi)^2}{2\pi i}\Big[\int dz\frac{1}{z-i\epsilon}\delta(\omega+z+p_0)\delta(\omega+z+p_0)-\int dz\frac{1}{z+i\epsilon}\delta(\omega-z-p_0)\delta(\omega-z-p_0)\Big] \\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{1}{2\pi i}(2\pi)^2[\frac{-1}{p_0+\omega+i\epsilon}+\frac{1}{p_0-\omega-i\epsilon}]\delta(0) \\
&=\frac{-i}{2\omega}\frac{(2\pi)^2}{2\pi i}\frac{2\omega}{(p_0+\omega+i\epsilon)(p_0-\omega-i\epsilon)}\delta(0) \\
&=\frac{-1}{p_0^2-\omega^2-i\epsilon}2\pi\delta(0)
\end{aligned}
$$

としても求められます。最後の行へは、$\Delta_{(11)}$ と同じように

$$
(p_0+\omega+i\epsilon)(p_0-\omega-i\epsilon)=p_0^2-\omega^2+ip_0\epsilon-ip_0\epsilon-2i\omega\epsilon=p_0^2-\omega^2-i\epsilon'
$$

を使っています。

$\Delta_{(12)}$ には階段関数がいないので、全部の項に対しては $t'=0$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\int dt\Delta_{(12)}e^{ip_0t} &= \frac{-i}{2\omega}\int dtdt'[e^{i\omega t}+n_B(\omega)(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})]e^{ip_0t} \\
&= \int dt\frac{-i}{2\omega}[e^{i(p_0+\omega)t}+n_B(\omega)(e^{i(p_0+\omega)t}+e^{i(p_0-\omega)t})] \\
&= 2\pi\frac{-i}{2\omega}[\delta(p_0+\omega)+n_B(\omega)(\delta(p_0+\omega)+\delta(p_0-\omega))] \\
&= -2i\pi[\frac{1}{2\omega}\delta(p_0+\omega)+\frac{1}{2\omega}n_B(\omega)(\delta(p_0+\omega)+\delta(p_0-\omega))] \\
&= -2i\pi[\theta(-p_0)\delta(p_0^2-\omega^2)+n_B(\omega)\delta(p_0^2-\omega^2)]
\end{aligned}
$$

最後の行へは

$$
\theta(-p_0)\delta(p_0^2-\omega^2)=\theta(-p_0)\frac{1}{2\omega}(\delta(p_0+\omega)+\delta(p_0-\omega))=\frac{1}{2\omega}\delta(p_0+\omega)
$$

となっていることを使っています。$\Delta_{(21)}$ も同様にすることで

$$
\Delta_{(21)}(p)=-2i\pi[\theta(p_0)+n_B(\omega)]\delta(p_0^2-\omega^2)
$$

ボソンの分布関数に ω を使ってきましたが、デルタ関数から $\omega^2=p_0^2$ で、$\omega>0$ としているところから、$\omega=|p_0|$ と置き換えることも出来ます。全部をまとめて書くと

$$i\Delta_{(11)}(p)=\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}+2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)$$

$$i\Delta_{(22)}(p)=-\frac{i}{p^2-m^2-i\epsilon}+2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)$$

$$i\Delta_{(12)}(p)=2\pi[\theta(-p_0)+n_B(|p_0|)]\delta(p^2-m^2)$$

$$i\Delta_{(21)}(p)=2\pi[\theta(p_0)+n_B(|p_0|)]\delta(p^2-m^2)$$

$\Delta_{(11)}(p)$ は明らかに $T=0(\beta\Rightarrow\infty)$ の極限でゼロ温度の伝播関数と一致していることが分かります。

最後に経路に $i\sigma$ を加えた場合を示します。これは、C_1 から C_2 に移る時に、虚軸方向に $-i\sigma$ 動かすことになります $(\sigma<\beta)$。つまり、C_1 の終点が t_+ で C_2 の始点が $t_+-i\sigma$ となります。これによって変更を受けるのは明らかに $\Delta_{(12)},\Delta_{(21)}$ だけです。しかも、C_2 上にいる時間を $-i\sigma$ 動かせばいいだけなので

$$\begin{aligned}\Delta_{(12)}(t-t'+i\sigma,\omega)&=\frac{-i}{2\omega}[n_B(\omega)e^{-i\omega(t-t'+i\sigma)}+(1+n_B(\omega))e^{i\omega(t-t'+i\sigma)}]\\&=\frac{-i}{2\omega}[n_B(\omega)e^{\sigma\omega}e^{-i\omega(t-t')}+(1+n_B(\omega))e^{-\sigma\omega}e^{i\omega(t-t')}]\\&=\frac{-i}{2\omega}[e^{-\sigma\omega}e^{i\omega(t-t')}+n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}e^{-i\omega(t-t')}+e^{-\sigma\omega}e^{i\omega(t-t')})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{(21)}(t-i\sigma-t',\omega)&=\frac{-i}{2\omega}[n_B(\omega)e^{i\omega(t-i\sigma-t')}+(1+n_B(\omega))e^{-i\omega(t-i\sigma-t')}]\\&=\frac{-i}{2\omega}[e^{-\sigma\omega}e^{-i\omega(t-t')}+n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}e^{i\omega(t-t')}+e^{-\sigma\omega}e^{-i\omega(t-t')})]\end{aligned}$$

フーリエ変換すれば、$\Delta_{(12)}$ は

$$\begin{aligned}\int dt\Delta_{(12)}(t+i\sigma,\omega)e^{ip_0t}&=\frac{-i}{2\omega}\int dt[e^{-\sigma\omega}e^{i\omega t}+n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}e^{-i\omega t}+e^{-\sigma\omega}e^{i\omega t})]e^{ip_0t}\\&=\frac{-i}{2\omega}\int dt[e^{-\sigma\omega}e^{i(p_0+\omega)t}+n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}e^{i(p_0-\omega)t}+e^{-\sigma\omega}e^{i(p_0+\omega)t})]\\&=\frac{-i}{2\omega}2\pi[e^{-\sigma\omega}\delta(p_0+\omega)+n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}\delta(p_0-\omega)+e^{-\sigma\omega}\delta(p_0+\omega))]\\&=-i2\pi[e^{-\sigma\omega}\theta(-p_0)\delta(p_0^2-\omega^2)+n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}\theta(p_0)\delta(p_0^2-\omega^2)+e^{-\sigma\omega}\theta(-p_0)\delta(p_0^2-\omega^2))]\\&=-2i\pi[e^{-\sigma\omega}\theta(-p_0)+n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}\theta(p_0)+e^{-\sigma\omega}\theta(-p_0))]\delta(p_0^2-\omega^2)\\&=-2i\pi[e^{\sigma p_0}\theta(-p_0)+n_B(|p_0|)(e^{\sigma p_0}\theta(p_0)+e^{\sigma p_0}\theta(-p_0))]\delta(p_0^2-\omega^2)\\&=-2i\pi e^{\sigma p_0}[\theta(-p_0)+n_B(|p_0|)]\delta(p_0^2-\omega^2)\end{aligned}$$

$p_0=\pm\omega$ と階段関数による正負の関係を使っています (もしくは 3 行目の段階で、exp 部分の ω をデルタ関数にあわせて $\pm p_0$ に置き換える)。同様にして

$$
\begin{aligned}
\int dt \Delta_{(21)} e^{ip_0 t} &= \frac{-i}{2\omega}\int dt[e^{-\sigma\omega}e^{-i\omega t} + n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}e^{i\omega t} + e^{-\sigma\omega}e^{-i\omega t})]e^{ip_0 t} \\
&= \frac{-i}{2\omega}\int dt[e^{-\sigma\omega}e^{i(p_0-\omega)t} + n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}e^{i(p_0+\omega)t} + e^{-\sigma\omega}e^{i(p_0-\omega)t})] \\
&= \frac{-i}{2\omega}[e^{-\sigma\omega}\delta(p_0-\omega) + n_B(\omega)(e^{\sigma\omega}\delta(p_0+\omega) + e^{-\sigma\omega}\delta(p_0-\omega))] \\
&= \frac{-i}{2\omega}[e^{-\sigma p_0}\delta(p_0-\omega) + n_B(\omega)(e^{-\sigma p_0}\delta(p_0+\omega) + e^{-\sigma p_0}\delta(p_0-\omega))] \\
&= -2\pi i e^{-\sigma p_0}[\theta(p_0) + n_B(|p_0|)]\delta(p_0^2-\omega^2)
\end{aligned}
$$

というわけで、運動量表示において、$i\sigma$ の経路がないものに対して

$$
\Delta_{(12)}(p) \ \Rightarrow \ e^{\sigma p_0}\Delta_{(12)}(p) \ , \ \Delta_{(21)}(p) \ \Rightarrow \ e^{-\sigma p_0}\Delta_{(21)}(p)
$$

というように置き換えればいいということが分かります (単に σ による部分がフーリエ変換のを受けて p_0 と一緒に出てくるだけという単純な話です)。$\sigma = 0$ で閉じた時間経路法に素直になります。

σ のよく取られる値として、$\sigma = \beta/2$ というのがあります。このように取ると何が便利なのかは、$\Delta_{(12)}, \Delta_{(21)}$ を計算してみればわかって

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(12)}(p) &= -2i\pi e^{\beta p_0/2}[\theta(-p_0) + n_B(|p_0|)]\delta(p_0^2-\omega^2) \\
&= -2i\pi e^{\beta p_0/2}\big[\theta(-p_0) + \theta(-p_0)n_B(|p_0|) + \theta(p_0)n_B(|p_0|)\big]\delta(p_0^2-\omega^2) \\
&= -2i\pi e^{\beta p_0/2}\big[\theta(-p_0)(1+n_B(|p_0|)) + \theta(p_0)n_B(|p_0|)\big]\delta(p_0^2-\omega^2)
\end{aligned}
$$

二行目へは、与えられた p_0 に対して階段関数はどちらか一方しか選べないことを使っています。この式において、もし $p_0 < 0$ であるなら、第一項より

$$
\begin{aligned}
-2i\pi e^{-\beta|p_0|/2}\Big(1 + \frac{1}{e^{\beta|p_0|}-1}\Big)\delta(p_0^2-\omega^2) &= -2i\pi\Big(e^{-\beta|p_0|/2}\frac{e^{\beta|p_0|}-1}{e^{\beta|p_0|}-1} + \frac{e^{-\beta|p_0|/2}}{e^{\beta|p_0|}-1}\Big)\delta(p_0^2-\omega^2) \\
&= -2i\pi\frac{e^{\beta|p_0|/2}}{e^{\beta|p_0|}-1}\delta(p_0^2-\omega^2) \\
&= -2i\pi e^{\beta|p_0|/2}n_B(|p_0|)\delta(p_0^2-\omega^2)
\end{aligned}
$$

$p_0 > 0$ ならそのまま第二項部分がこれと一致するので、与えられた任意の p_0 に対して

$$
\Delta_{(12)}(p) = -2i\pi e^{\beta|p_0|/2}n_B(|p_0|)\delta(p_0^2-\omega^2)
$$

となります。$\Delta_{(21)}$ でも

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(21)}(p) &= -2\pi i e^{-\beta p_0/2}[\theta(p_0) + n_B(|p_0|)]\delta(p_0^2-\omega^2) \\
&= -2\pi i e^{-\beta p_0/2}\big[\theta(p_0)(1+n_B(|p_0|)) + \theta(-p_0)n_B(|p_0|)\big]\delta(p_0^2-\omega^2)
\end{aligned}
$$

$p_0 > 0$ のとき第一項は

$$\begin{aligned}-2\pi i\Big(e^{-\beta|p_0|/2}+\frac{e^{-\beta|p_0|/2}}{e^{\beta|p_0|}-1}\Big)\delta(p_0^2-\omega^2) &= -2\pi i\frac{e^{\beta|p_0|/2}}{e^{\beta|p_0|}-1}\delta(p_0^2-\omega^2)\\ &= -2\pi i e^{\beta|p_0|/2}n_B(|p_0|)\delta(p_0^2-\omega^2)\end{aligned}$$

となるので

$$\Delta_{(21)}(p)=-2\pi i e^{\beta|p_0|/2}n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)$$

これで分かるように、$\sigma=\beta/2$ と選ぶことの利点は、$\Delta_{(12)}(p),\Delta_{(21)}(p)$ が分布関数を含む項のみで書けるという点と、$\Delta_{(12)}(p),\Delta_{(21)}(p)$ が

$$\Delta_{(12)}(p)=\Delta_{(21)}(p)$$

このように等しくなることです。これは運動量表示における $\Delta_{(12)}(p)$ と $\Delta_{(21)}(p)$ に対する久保-Martin-Schwinger の関係が変更されていることを表しています。元の関係は $\Delta_{(21)}(p)=e^{-\beta p_0}\Delta_{(12)}(p)$ であったのに対して、時間経路上で $-i\beta/2$ ずらすことで

$$\Delta_{(12)}(p)\ \Rightarrow\ e^{\beta p_0/2}\Delta_{(12)}(p)\ ,\ \Delta_{(21)}(p)\ \Rightarrow\ e^{-\beta p_0/2}\Delta_{(21)}(p)$$

このようにフーリエ変換後 $e^{\pm\beta p_0/2}$ が出るように操作したために、うまいこと打ち消しあって $\Delta_{(12)}(p)=\Delta_{(21)}(p)$ になっています。