実時間法

虚時間法において時間は虚時間になり、虚時間に沿って系は発展するように理論が組み立てられています。これは、実数の時間 (実時間) との対応が取れていないという点で相当不便です。計算の後に解析接続することで、実時間にすることが出来ますが、それでも不便であることには変わりないです (計算の途中で好き勝手に解析接続できる保証がない)。というわけで、不便なら最初から実時間を使ってしまえばいいということで作られているのが実時間法 (real time formalism) です。ここでは実時間法を構成するときによく用いられている closed time path method、もしくは Keldysh 公式と呼ばれるものを使います。直訳すれば、閉じた時間経路法とでもなります。
また、「補足：実時間の伝播関数」の最後に実時間法での注意が書いてあるので、そっちも見てください。

閉じた時間経路法に限定する前に、実時間法での経路積分表示を作ってしまいます。やりたいことは実時間を使った定式化ですので、それによって分配関数がどう形式的に書けるのかを簡単に示します。状態ベクトルを $|\phi(\boldsymbol{x});t\rangle$ のように、時間 t_0 での場 $\phi(\boldsymbol{x})$ の状態ベクトルを設定します。これは、$\phi(t_0,\boldsymbol{x})|\phi(\boldsymbol{x});t_0\rangle=\phi(\boldsymbol{x})|\phi(\boldsymbol{x});t_0\rangle$ での状態ベクトルに対応すると定義します。そして、時間は複素数だとします。そうすると、密度行列による分配関数は $\mathrm{tr}\rho$ なので、とりあえず平衡系だとしてみれば $\rho_{eq}=e^{-\beta H}$ から

$$\begin{aligned}Z=\mathrm{tr}\rho_{eq}&=\int d\phi(\boldsymbol{x})\langle\phi(\boldsymbol{x});t_0)|\rho_{eq}|\phi(\boldsymbol{x});t_0\rangle\\&=\int d\phi(\boldsymbol{x})\langle\phi(\boldsymbol{x});t_0|e^{-\beta H}|\phi(\boldsymbol{x});t_0\rangle\\&=\int d\phi(\boldsymbol{x})\langle\phi(\boldsymbol{x});t_0-i\beta)|\phi(\boldsymbol{x});t_0\rangle\end{aligned}\tag{1}$$

最後に

$$|\phi(\boldsymbol{x},t)\rangle=e^{iHt}|\phi(\boldsymbol{x},t=0)\rangle\ \Rightarrow\ |\phi(\boldsymbol{x},t-i\beta)\rangle=e^{-\beta H}|\phi(\boldsymbol{x},t)\rangle$$

を使っています。虚時間法による経路積分表示と違うのは、実時間の指定を入れている点です。この場合、明らかに経路積分の式に対応しているので、分配関数自体は形式的に

$$Z=\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[\int_C dt\int d^3x\mathcal{L}[\phi]\Big]$$

このように書けます。ϕ は周期性 $\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t-i\beta)$ を持ちます。
ちなみに、非平衡系 (非平衡は平衡でない場合) では、密度行列は時間発展演算子とは見なせないという点に注意してください。つまり、非平衡系での一般的な形は、完全性を挟んで

$$\begin{aligned}Z&=\int d\phi_1(\boldsymbol{x})\langle\phi_1(\boldsymbol{x});t_0)|\rho(t_0)|\phi_1(\boldsymbol{x});t_0\rangle\\&=\int d\phi_1(\boldsymbol{x})d\phi_2(\boldsymbol{x})\langle\phi_1(\boldsymbol{x});t_0|\rho(t_0)|\phi_2(\boldsymbol{x});t_0\rangle\langle\phi_2(\boldsymbol{x});t_0|\phi_1(\boldsymbol{x});t_0\rangle\end{aligned}$$

$\rho(t_0)$ は時間 t_0(初期条件) での密度行列です ($\rho(t_0)\neq\rho_{eq}=e^{-\beta H}$ に注意)。密度行列を含まない部分は、時間経路がどうなっているのかは別にして、経路積分の形によって

$$Z = \mathrm{tr}\rho = \int d\phi_1(\boldsymbol{x})d\phi_2(\boldsymbol{x})\langle\phi_1(\boldsymbol{x});t_0|\rho(t_0)|\phi_2(\boldsymbol{x});t_0\rangle \int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathcal{D}\phi \exp\Big[\int_C dt \int d^3x\mathcal{L}[\phi]\Big] \tag{2}$$

とできます。$\mathcal{D}\phi$ 積分の外にある部分が初期条件となります。細かい話をするつもりはないので言うだけですが、t_0 から出発して t_0 に戻ってくる経路 (閉じた時間経路) を使うと、密度行列 $\rho(t_0)$ は時間独立になります。なので、結局は最初の形でも大まかには問題ないです。

実時間の定式化で問題になるのが、時間の経路 C です。なんで問題になるのかは、(1) において、終状態の時間が $t-i\beta$ となっているためです。つまり、通常の経路積分の時間発展は正直に始状態から終状態の時間に向かっていくのに対して、今は、複素平面上で t から始まって $t-i\beta$ で終わるという変な指定しかされていません。しかも、t の実軸上の動きについては何も言っていません。しかし、今知りたいのは実時間による n 点相関関数の表現なので、この実軸上を動くという要求を加えます。つまり、実軸に沿った経路を含めるように制限します。というわけで、時間の経路 C は、始点が t_i、終点が $t_i-i\beta$ で、実軸に沿った経路を含めていればいいということになります。このような経路はかなり任意に選ぶことが出来ます。この経路の選び方でよく使われるのが、閉じた時間経路法です。いきなり経路を示してしまってもいいんですが、時間発展演算子の関係から経路を導きます。

ちなみに、「補足：実時間の伝播関数」で導いた有限温度のファインマン伝播関数はこのような理由から中途半端であることが分かります。つまり、「補足：実時間の伝播関数」で導いたのは実軸上を過去から未来へ向かう時間に対してだけで、他の時間経路の影響がどこにもありません。これがどう変更されるのかを見ていくことになります。

閉じた時間経路法による実時間法は虚時間法と同じようにして作られるので、途中までは虚時間法と同じようなことをしていきます。まず、時間に依存する密度行列を考えます (非平衡系でも使えるように定式化していきます)。密度行列は

$$\rho(t) = \sum_n p_n|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)| \tag{3}$$

p_n は状態 $|\psi_n(t)\rangle$ を見つける確率で、確率は

$$\sum_n p_n = 1$$

このように規格化されているとします。シュレーディンガー表示での演算子の熱的平均は密度行列から

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle_\beta(t) &= \mathrm{tr}(\rho(t)A) \\
&= \sum_i \langle i|\rho(t)A|i\rangle \\
&= \sum_i\sum_n p_n\langle i|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|A|i\rangle \\
&= \sum_i\sum_n p_n\langle\psi_n(t)|A|i\rangle\langle i|\psi_n(t)\rangle \\
&= \sum_n p_n\langle\psi_n(t)|A|\psi_n(t)\rangle
\end{aligned}$$

このようになっていることが分かります (量子論での期待値 $\langle\psi_n(t)|A|\psi_n(t)\rangle$ を確率 p_n で平均したのが熱的平均)。シュレーディンガー表示なので演算子は時間依存を持っていないので、$\langle A\rangle(t)$ と書いています。ただし、この表記にはシュレーディンガー表示で行っているという意味しかないです。なぜなら、後で出てくる時間発展演算子 $U(t,0)$ で時間依存する密度行列を

$$\rho(t) = U(t,0)\rho(0)U(0,t)$$

と与えたとき

$$\mathrm{tr}[\rho(t)A] = \mathrm{tr}[U(t,0)\rho(0)U(0,t)A] = \mathrm{tr}[\rho(0)U(0,t)AU(t,0)] = \mathrm{tr}[\rho(0)A(t)]$$

となって、時間依存する演算子の場合に書き換えられるからです。すぐに出てきますが $\rho(t)$ の方程式は演算子 $A(t)$ によるハイゼンベルグ方程式と符号が逆になっているので、$U(t,0)$ の作用の仕方が逆になります。

シュレーディンガー表示での式から、熱的平均の時間依存性は密度行列の時間に依存しているので、密度行列の時間発展について見ていきます。

確率が時間依存していないとすれば、密度行列 (3) を時間微分することで

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} &= i\sum_n p_n \frac{\partial|\psi_n(t)\rangle}{\partial t}\langle\psi_n(t)| + i\sum_n p_n|\psi_n(t)\rangle\frac{\partial\langle\psi_n(t)|}{\partial t} \\ &= \sum_n p_n H|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)| - \sum_n p_n|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|H \\ &= H\rho(t) - \rho(t)H \\ &= [H, \rho(t)] \end{aligned} \tag{4}$$

途中で状態ベクトルに対する演算子方程式

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle\ ,\ -i\frac{\partial\langle\psi(t)|}{\partial t} = \langle\psi(t)|H$$

を使っています (H は系のハミルトニアン)。(4) は量子力学でのハイゼンベルグ方程式の符号が反転したものになっていて (ハイゼンベルグ方程式の右辺は $[A, H]$)、リウヴィル方程式と呼ばれます。ちなみに、確率が時間依存していないとしているので (エントロピーが時間で変化しない)、基本的に断熱的な過程を見ることになります。

ハミルトニアンが時間依存していなければ、(4) の $\rho(t)$ に対する方程式から

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt}$$

これは $\rho(t)$ の方程式がハイゼンベルグ方程式の符号が逆になっているということからすぐに分かりますし、ちゃんと (4) を成立させていることが確かめられます。そして、この式から分かるように、密度行列が時間に依存しない定数となる $\rho(t) = \rho(0)$ というのは、ハミルトニアンと $\rho(0)$ が交換する時で、そのときには熱平衡状態であることになります。この状況は今知りたいものではないので、無視します (表記の注意ですが、最初の方の非平衡系の話で使ってた $\rho(t_0)$ は初期状態での密度行列なので、$\rho(t_0 = 0)$ とここで言っている $\rho(0)$ は意味が違います)。

ハミルトニアンが時間依存するとしてさらに見ていきます。密度行列の時間発展は時間発展演算子 U によって

$$\rho(t) = U(t,0)\rho(0)U(0,t)$$

と表現できるとします。これを時間微分すると

$$i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = i\frac{\partial U(t,0)}{\partial t}\rho(0)U(0,t) + iU(t,0)\rho(0)\frac{\partial U(0,t)}{\partial t}$$

これが $H(t)\rho(t)-\rho(t)H(t)$ になればいいので、時間発展演算子 U の方程式として

$$i\frac{\partial U(t,0)}{\partial t}=H(t)U(t,0)\ ,\ -i\frac{\partial U(0,t)}{\partial t}=U(0,t)H(t)$$

このようになっています。この式から

$$U(0,t)=U^\dagger(t,0)$$

となっていることも分かります。$U(t)$ が満たす関係として

$$U(t,t)=1$$

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_3)=U(t_1,t_3)\quad(t_1>t_2>t_3)$$

微分方程式を積分形にすれば

$$U(t,t')=T\exp\Big[-i\int_{t'}^{t}dt''H(t'')\Big]\quad(t>t')\tag{5}$$

となります。T は時間順序の記号です。

ここで、ハミルトニアンに対する条件として、負の時間に対してはハミルトニアンは時間依存していないとします

$$H(t)=\begin{cases}H_i & \mathrm{Re}t\leq 0\\ H_r(t) & \mathrm{Re}t\geq 0\end{cases}$$

負の時間に対して時間依存させないのには理由があります。散乱問題を扱う時に、無限大の過去では相互作用が起きていない状態だと仮定しますが、これと同じ発想です。つまり、負の時間では熱平衡状態になっているとし、正の時間から系が発展していくように仮定します。

そうすると、負の時間において密度行列は時間依存していない $\rho(0)$ なので、

$$\rho(0)=\frac{e^{-\beta H_i}}{\mathrm{tr}e^{-\beta H_i}}$$

と書くことができます (両辺のトレースを取れば $\mathrm{tr}\rho(0)=1$ となる)。そして、(5) からハミルトニアンが時間依存していないときの時間発展演算子は

$$U(t,t')=\exp[-iH_i(t-t')]$$

このような単純な時間発展演算子になっていることが分かります。この時間発展演算子において、時間 t を $t'-i\beta$ と置き換えると

$$U(t'-i\beta,t')=\exp[-iH_i(t'-i\beta-t')]=\exp[-\beta H_i]$$

となるので密度行列は

$$\rho(0) = \frac{U(t_- - i\beta, t_-)}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}$$

このように書けます。t_- は負の時間を表わすことにします (大きな負の時間)。

時間依存している密度行列 $\rho(t)$ は、$\rho(0)$ に対して時間発展演算子を作用させることで

$$\rho(t) = U(t,0)\rho(0)U^\dagger(t,0) = \frac{U(t,0)U(t_- - i\beta, t_-)U^\dagger(t,0)}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}$$

これで密度行列の時間発展による表現が得られたので、演算子の熱的平均は、トレースの巡回性を使うことで

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle_\beta(t) &= \mathrm{tr}(\rho(t)A)\\
&= \frac{\mathrm{tr}[U(t,0)U(t_- - i\beta, t_-)U^\dagger(t,0)A]}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}\\
&= \frac{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U^\dagger(t,0)AU(t,0)]}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}\\
&= \frac{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U^\dagger(t,0)AU(t,0)U(0,t_-)U(t_-,0)]}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}\\
&= \frac{\mathrm{tr}[U(t_-,0)U(t_- - i\beta, t_-)U^\dagger(t,0)AU(t,0)U(0,t_-)]}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}\\
&= \frac{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,0)U^\dagger(t,0)AU(t,0)U(0,t_-)]}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}\\
&= \frac{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,0)U(0,t)AU(t,t_-)]}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}\\
&= \frac{\mathrm{tr}(U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,t)AU(t,t_-))}{\mathrm{tr}U(t_- - i\beta, t_-)}
\end{aligned}$$

途中で、負の時間ではハミルトニアンは時間に依存していないことから、$U(t_- - i\beta, t_-)$ と $U(t_-,0)$ は交換できるというのを使っています。ここから、さらに t_+ が大きな正の時間だとして差し込めば

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle_\beta(t) &= \frac{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,t_+)U(t_+,t_-)U(t_-,t)AU(t,t_-)]}{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,t_+)U(t_+,t_-)]}\\
&= \frac{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,t_+)U(t_+,t)AU(t,t_-)]}{\mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,t_+)U(t_+,t_-)]}
\end{aligned} \tag{6}$$

これによって時間発展の仕方は、時間の複素平面上において、まず大きな負の時間 t_- から始まり、時間 t まで進み、そのあと、t から大きな正の時間 t_+ まで進み、また負の時間 t_- に戻り、最後に虚軸に沿って $-\beta$ だけ進むというものです。これが知りたかった時間経路で、これを使った定式化が閉じた時間経路法となります。当然、経路積分での時間積分はこの経路に従うことになります。また、今の場合では、演算子 A は t_- から t_+ へいく間の時間 t にいます。

演算子の熱的平均の定義から、分配関数は (6) の分母であるので、$t_- \to -\infty$ と $t_+ \to +\infty$ の極限で

$$Z = \mathrm{tr}[U(t_- - i\beta, t_-)U(t_-,t_+)U(t_+,t_-)]$$

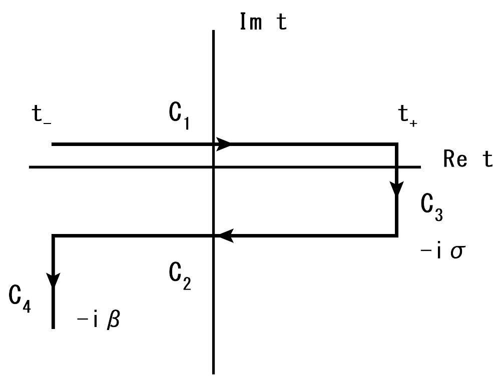
と表現されることになります。これを経路積分と対応させて、源 J を加えることで、生成汎関数の表現として

$$Z[J] = \mathrm{tr}[U_J(t_- - i\beta, t_-)U_J(t_-, t_+)U_J(t_+, t_-)] \tag{7}$$

このような形を与えられます。ここでわざわざ差し込んだ $U_J(t_-, t_+)U_J(t_+, t_-)$ がちゃんと意味を持っていることが分かります。これはもし、J がどの経路においても、例えば最初の t_- から t_+ へ進む経路と t_+ から t_- へと進む経路の上で、同じ値を持つならおとなしく $U_J(t_-, t_+)U_J(t_+, t_-) = 1$ となることを言っています。そうすると明らかに虚時間法での生成汎関数に対応することになるので、熱平衡状態になります (実際に時間発展演算子の形が同じになっているのは見比べれば分かります)。なので、J が一定でない (ハミルトニアンが時間によって変化している) ようなら、それは非平衡状態を記述します。

というわけで、実時間法でも虚時間法と同じように、ゼロ温度での生成汎関数における時間積分の経路を変更することで得られます。実時間法による時間の経路は複雑になっていますが、場の量子論で通常使うハミルトニアンにおいては経路積分に対する基本的な構造がほとんど変わりません。

ここでは時間経路 C を C_1, C_2, C_3 のように表現しましたが、もう少し一般化できます。新しい経路として C_1 から C_2 に移る時に、虚軸方向に $-i\sigma$ $(\sigma < \beta)$ 動かしたものを加えます。つまり、t_+ から $t_+ - i\sigma$ という経路が加わります。これを新しく C_3 として、$t_- - i\sigma$ から $t_- - i\beta$ にいく経路を C_4 とすることにします。図にすれば



このようになります。こっちのほうがより一般的であり、計算上便利な場合もあります。

密度行列の時間発展から求めましたが、摂動論の視点からも見ておきます。まず、ゼロ温度での話を持ち込みます。場の相互作用表示は場の量子論での「相互作用描像」で見たように

$$\phi_I(t) = e^{iH_0t}\phi_S e^{-iH_0t} \quad (\phi_I(0) = \phi_H(0) = \phi_S)$$

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S \quad (|\psi(0)\rangle_I = |\psi(0)\rangle_S = |\psi\rangle_H)$$

となっています。H はハイゼンベルグ表示、I は相互作用表示、S はシュレーディンガー表示を表します。全体のハミルトニアンは

$$H = H_0 + H'(t)$$

として、時間依存部分が分離できるとします。ただし、H_0 は時間依存性を持たないが相互作用項は含んでいるとします。つまり、「相互作用描像」での相互作用部分を時間依存部分にして相互作用表示を作っています。ハイゼンベルグ表示での場に対する時間発展演算子は上での $U(t, t')$ と同じで

$$\phi_H(\boldsymbol{x}, t) = U^\dagger(t, 0)\phi(\boldsymbol{x})U(t, 0)$$

と書けます。相互作用表示とは

$$\phi_H(\boldsymbol{x},t)=U^\dagger(t,0)\phi(\boldsymbol{x})U(t,0)=U^\dagger(t,0)e^{-iH_0t}\phi_I(t)e^{iH_0t}U(t,0)$$

なので、ここで

$$S(t,t')=e^{iH_0t}U(t,t')e^{-iH_0t'}\quad (S(t,0)=e^{iH_0t}U(t,0))$$

と定義すると、これは「相互作用描像」での $U(t,t')$ になるので

$$S(t,t')=T\exp[-i\int_{t'}^{t}dt''H'(t'')]$$

と与えられます。これによって、状態 $|\phi\rangle$ の時間発展を

$$|\phi(t)\rangle_I=S(t,0)|\phi\rangle$$

と書けます。このようにして相互作用表示を導入します。
状態 $|\phi\rangle$ の時間発展の時間発展から

$$|\phi\rangle=S(0,\infty)|\phi(\infty)\rangle_I\ ,\ |\phi\rangle=S(0,-\infty)|\phi(-\infty)\rangle_I\quad (S^{-1}(t,t')=S(t',t))$$

と書けます。ここで、$|\phi\rangle$ によって時間順序積を含む演算子の期待値

$$G(x,x')=\langle\phi|T(\phi_H(\boldsymbol{x},t)\phi_H(\boldsymbol{x}',t'))|\phi\rangle$$

を作ります。相互作用表示に直せば

$$\begin{aligned}G(x,x')&=\langle\phi|T(S(0,t)\phi_I(\boldsymbol{x},t)S(t,0)S(0,t')\phi_I(\boldsymbol{x}',t')S(t',0))|\phi\rangle\\&=\langle\phi|T(S(0,t)\phi_I(\boldsymbol{x},t)S(t,t')\phi_I(\boldsymbol{x}',t')S(t',0))|\phi\rangle\quad (S(t_3,t_2)S(t_2,t_1)=S(t_3,t_1))\\&={}_I\langle\phi(\infty)|S(\infty,0)T(S(0,t)\phi_I(\boldsymbol{x},t)S(t,t')\phi_I(\boldsymbol{x}',t')S(t',0))S(0,-\infty)|\phi(-\infty)\rangle_I\end{aligned}$$

S は時間発展演算子を含んでおり、両側は $S(\infty,0),S(0,-\infty)$ なので、$S(\infty,0),S(0,-\infty)$ も時間順序積の中に入れて $-\infty\sim\infty$ の時間順序の形になると見なせて

$$G(x,x')={}_I\langle\phi(\infty)|T(S(\infty,-\infty)\phi_I(\boldsymbol{x},t)\phi_I(\boldsymbol{x}',t'))|\phi(-\infty)\rangle_I$$

ここで ${}_I\langle\phi(\infty)|$ を

$${}_I\langle\phi(\infty)|={}_I\langle\phi(-\infty)|S(-\infty,\infty)\quad (|\phi(\infty)\rangle_I=S(\infty,-\infty)|\phi(-\infty)\rangle_I)$$

と書き換えて

$$G(x,x') = {}_I\langle\phi(-\infty)|S(-\infty,\infty)T(S(\infty,-\infty)\phi_I(\boldsymbol{x},t)\phi_I(\boldsymbol{x}',t'))|\phi(-\infty)\rangle_I$$

こうすると一番左側に $S(-\infty,\infty)$ という時間発展演算子が出てきます。右側の時間順序積は $-\infty$ から $+\infty$ の時間順序で、$S(-\infty,\infty)$ は $+\infty$ から $-\infty$ の時間順序です。これは右側から読んでいけば、$-\infty$ から $+\infty$ に進み、$+\infty$ から $-\infty$ に進んでいます。このことから、時間経路を $-\infty$ から $+\infty$ に進むものと $+\infty$ から $-\infty$ に進む 2 つを用意するといいことが分かり (C_1 と C_2 の経路)、この 2 つの経路上に t,t' がいるとします。つまり、時間発展演算子 S を、C_1,C_2 の経路を C とし、$-\infty\to+\infty\to-\infty$ の時間順序の時間順序積を T_C として

$$S_C(-\infty,-\infty) = T_C\exp[-\int_C dt\ H'(t)]$$

と定義することで

$$G(x,x') = {}_I\langle\phi(-\infty)|T_C(S_C(-\infty,-\infty)\phi_I(\boldsymbol{x},t)\phi_I(\boldsymbol{x}',t'))|\phi(-\infty)\rangle_I$$

と書けます。

${}_I\langle\phi(\infty)|$ を ${}_I\langle\phi(-\infty)|$ に書き換えたのには理由があります。通常の場の理論では n 点相関関数を考えるとき $|\phi(\pm\infty)\rangle_I$ は真空としますが、有限温度では真空としません。そして、非平衡状態を考えたとき $|\phi(-\infty)\rangle_I$ と $|\phi(+\infty)\rangle_I$ がどういう関係になっているのか一般的には分かりません (始状態と終状態の間に明確な関係性がない)。このため、正体の分からない $|\phi(+\infty)\rangle_I$ を導入しないでいいように書き換えています。この考え方に従うことで、閉じた時間経路が導入されます。

これを熱的平均に持っていきます。密度行列を使った熱的平均は

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\rho(t)\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x}',t')) &= \sum_i\langle i|\rho(t)\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x}',t')|t\rangle \\
&= \sum_i\sum_n p_n\langle i|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x}',t')|t\rangle \\
&= \sum_i\sum_n p_n\langle\psi_n(t)|\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x}',t')|\psi_n(t)\rangle \\
&= \sum_n p_n\langle\psi_n(t)|\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x}',t')|\psi_n(t)\rangle
\end{aligned}$$

と与えられます。熱的平均は演算子の期待値を確率 p_n で平均したものなので、演算子の期待値部分を

$$\langle\psi_n(t)|\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x}',t')|\psi_n(t)\rangle \ \Leftrightarrow\ {}_I\langle\phi(-\infty)|\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x}',t'))|\phi(-\infty)\rangle_I$$

と対応させるには、$|\psi_n(t)\rangle$ を $|\phi(-\infty)\rangle_I$ にすればいいことから、密度行列 $\rho(t)$ は

$$\rho(-\infty) = \sum_\phi p_\phi|\phi(-\infty)\rangle_{II}\langle\phi(-\infty)|$$

となります。よって、$G(x,x')$ を熱的平均にしたものは、閉じた経路 C とその時間順序積 T_C によって

$$G_\beta(x,x') = \mathrm{tr}[\rho(-\infty)T_C(S_C(-\infty,-\infty)\phi_I(\boldsymbol{x},t)\phi_I(\boldsymbol{x}',t'))]$$

となります。$\rho(-\infty)$ の時間発展は上で与えた U によるものと同じです。$\rho(-\infty)$ は無限大の過去の密度行列なので、通常は平衡状態の密度行列 $\rho = e^{-\beta H}/Z$ が選ばれます。

これは無限大の過去なら密度行列が分かっているだろうという前提があるので、無限大の過去でなく $t=0$ で密度行列が分かっているなら無限大の過去でなく $t=0$ を出発点にしてもいいです。そうすると $t=0$ での密度行列を ρ とすれば

$$G_\beta(x,x') = \mathrm{tr}[\rho T_C(S_C(0,0)\phi_I(\boldsymbol{x},t)\phi_I(\boldsymbol{x}',t'))]$$

となり、時間経路は $t=0$ から出発して $+\infty$ までいって $t=0$ に帰ってきます。$t=0$ での密度行列が分かっているとしましたが、任意の時間 t_0 でも同じことです。

定式化の話は終わりにして具体的に計算していきます。ここからハミルトニアンが時間依存していないとします。そうすると、(5)、(7) と経路積分

$$\langle\phi_f|\exp[-iH(t_f-t_i)]|\phi_i\rangle = \int\mathcal{D}\phi\int\mathcal{D}\pi\exp\left[i\int_{t_i}^{t_f}dt\int d^3x\,(\pi\partial_0\phi-\mathcal{H}(\pi,\phi))\right]$$

を見比べれば、単純に時間経路が通常と異なる経路積分の式を構成しているのだと分かります。なので、共役な場 $\mathcal{D}\pi$ の積分を実行できるなら生成汎関数の表現として

$$\begin{aligned}Z[J] &= \int_{periodic}\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int_C d^4x(\mathcal{L}+J\phi)\right]\\&= \int_{periodic}\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int_{C_1}d^4x(\mathcal{L}+J\phi)+i\int_{C_2}d^4x(\mathcal{L}+J\phi)+i\int_{C_3}d^4x(\mathcal{L}+J\phi)+i\int_{C_4}d^4x(\mathcal{L}+J\phi)\right]\\&= Z_{12}[J]Z_{34}[J]\end{aligned}$$

積分の添え字 C は時間積分がその経路に従っていることを表します。Z_{12} は $C_{1,2}$、Z_{34} は $C_{3,4}$ の部分です。時間積分の経路は t_- から t_+ を C_1、t_+ から t_- を C_2、t_+ から $t_+-\sigma$ を C_3、$t_--i\sigma$ から $t_--i\beta$ を C_4 として区別し、それぞれの J,ϕ はそれらの経路上にいるとします。(7) でトレースがいることからも分かるように、場 ϕ は虚時間法のときと同じように周期性 $\phi(t)=\phi(t-i\beta)$ を持ちます。というわけで、ほぼミンコフスキー空間での生成汎関数と同じになります。各経路での時間積分は

$$\int_{t_-}^{t_+}dt+\int_{t_+}^{t_-}dt+\int_{t_+}^{t_+-i\sigma}dt+\int_{t_-}^{t_--i\beta}dt = \int_{t_-}^{t_+}dt-\int_{t_-}^{t_+}dt+\int_{t_+}^{t_+-i\sigma}dt+\int_{t_-}^{t_--i\beta}dt \qquad (8)$$

となっています (これ以降 t_- は $-\infty$、t_+ は $+\infty$ だとしていきます)。第一項から C_1,C_2,C_3,C_4 となっています。$\sigma=0$ とし $t_+=t_-=0$ とすれば、虚時間法になります。

また、(1) で時間経路を $C_1\sim C_4$ に取ってしまえば $Z[J]$ は

$$Z[J] = \int d\phi d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3 \langle \phi; t_i - i\beta)| T_C \exp[i\int_{C_4} d^4xJ(x)\phi(x)]|\phi_3; t_i - i\sigma\rangle$$

$$\times \langle \phi_3; t_i - i\sigma| T_C \exp[i\int_{C_2} d^4xJ(x)\phi(x)]|\phi_2; t_f - i\sigma\rangle \langle \phi_2; t_f - i\sigma| T_C \exp[i\int_{C_3} d^4xJ(x)\phi(x)]|\phi_1; t_f\rangle$$

$$\times \langle \phi_1; t_f| T_C \exp[i\int_{C_1} d^4xJ(x)\phi(x)]|\phi; t_i\rangle$$

$d\phi(\boldsymbol{x})$、$|\phi(\boldsymbol{x}); t\rangle$ を単に $d\phi$、$|\phi; t\rangle$ と書いて、exp 内の $\phi(x)$ は演算子です。T_C はそれぞれの経路での時間順序積です。これを時間依存しないハミルトニアンとして経路積分の形に持っていけば

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]$$

となって同じ形になります。

これで大雑把な定式化が終わったので、さらに詳しくこの経路積分表示での性質をみていきます。ここから $Z_{34}[J]$ 部分は無視します。この部分は伝播関数の導出においては規格化定数のようにしか寄与しないので無視して平気です (理由は「実時間法～クライン・ゴルドン場～」で示します)。なので、これ以降、経路 C は C_1, C_2 のみを含んでいるとします。

源の汎関数微分によって場が取り出せるという生成汎関数としての性質を通常通り持たせます。経路 C 上のどこかにいる源を $J(x)$、場を $\phi(x)$ として

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int_C d^4x' \frac{\delta J(x')}{\delta J(y)}\phi(x')\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int_C d^4x' \delta^4_C(x'-y)\phi(x')\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi\ \phi(y) \exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]
\end{aligned}$$

と定義します。これは、例えば exp 内の C_1 と C_2 にいる $J(x)\phi(x)$ を、C_1 にいる源 $J(C_1)$ によって汎関数微分することで、C_1 にいる場 $\phi(C_1)$ を取り出すという手続きです。J による汎関数微分は $J(x'), J(x)$ が C_1, C_2 のどれかにいるときに

$$\frac{\delta J(x')}{\delta J(x)} = \delta^4_C(x'-x) \tag{9}$$

となっています。$\delta^4_C(x'-x)$ の定義は階段関数 $\theta_C(x_0 - y_0)$ によって

$$\delta^4_C(x-y) = \frac{d\theta_C(x_0-y_0)}{dx_0} \tag{10}$$

と与えられ、さらに

$$\int_C d^4y\delta^4_C(x-y)F(y) = F(x) \tag{11}$$

となるようにします。階段関数 $\theta_C(t-t')$ がなんなのかは C_1, C_2 の時間経路を考えれば分かります。t, t' が C_1 上にいる場合を (a)、t, t' が C_2 上にいる場合を (b)、t が C_1, t' が C_2 いる場合を (c)、t が C_2, t' が C_1 いる場合を (d) とします。(a) は時間が $-\infty$ から $+\infty$ のようになっているので、通常通りです。(b) は $+\infty$ から $-\infty$ に向かっているので t と t' の大小関係が (a) の反対になります。(c) では、経路の取り方から C_1 の方が早い時間なので常に 0 になります。(d) は (c) の逆なので、常に 1 になります。まとめると

$$\theta_c(t-t') = \begin{cases} \theta(t-t') & \cdots \quad (a) \\ \theta(t'-t) & \cdots \quad (b) \\ 0 & \cdots \quad (c) \\ 1 & \cdots \quad (d) \end{cases} \tag{12}$$

そうすると、デルタ関数 $\delta_C(t-t')$ は

$$\frac{d\theta_c(t-t')}{dt} = \delta_C(t-t') = \begin{cases} \delta(t-t') & \cdots \quad (a) \\ -\delta(t-t') & \cdots \quad (b) \\ 0 & \cdots \quad (c),(d) \end{cases} \tag{13}$$

となります。なので、$J(x)$ が C_1、$J(x')$ が C_2 にいるといったときには (9) は 0 になります。また、これによって、(11) が成立していることが

$$\int_{C_1} dt'\delta_C(t-t')F(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\delta_{C_1}(t-t')F(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\delta(t-t')F(t') = F(t) \quad (C_1)$$

$$\int_{C_2} dt'\delta_C(t-t')F(t') = \int_{+\infty}^{-\infty} dt'\delta_{C_2}(t-t')F(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\delta(t-t')F(t') = F(t) \quad (C_2)$$

と確認できます。

ここから具体的に相互作用なしのクライン・ゴルドン方程式を使っていきます。そうすると

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int_C d^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2) + i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\right] \tag{14}$$

これを通常の手続きを使って伝播関数を使った形にもっていけば

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-i\int_C d^4x\left(\frac{1}{2}\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) - J(x)\phi(x)\right)\right]$$

演算子部分を $\Delta_C^{-1}(x,y)$ とすれば (x, y のように書きますが、並進不変だとするので $x-y$ に依存しています)

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int_C d^4x\int_C d^4y\left(\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y)\right) + i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\right] \tag{15}$$

場の積分をなくすために $\phi(x)$ を置き換えますが、そのとき C 上において

$$(\Box+m^2)\phi'(x)=J(x)$$

$$\phi'(x)=-\int_C d^4y\Delta_C(x,y)J(y)$$

$$(\Box+m^2)\Delta_C(x,y)=-\delta^4_C(x-y)$$

を満たすような $\phi'(x)$ を導入します (ここでは伝播関数の定義を $i\Delta(x,y)$ のようにして i を外に出します)。これらは全て経路 C に依存しています。経路 C 上として抽象的に行っていくなら全く同じ手順を踏めばいいだけなのが分かると思います。なので、この $\phi'(x)$ を使って $\phi(x)+\phi'(x)$ に変数変換することで

$$\begin{aligned}
Z_0[J]=&\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\Big(\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x)\phi(x)+\frac{1}{2}\phi'(x)\Delta_C^{-1}(x)\phi'(x)\\
&\qquad+\phi(x)\Delta_C^{-1}(x)\phi'(x)\Big)\Big]\exp\Big[i\int_C d^4x(J(x)\phi(x)+J(x)\phi'(x))\Big]\\
=&\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\Big(\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x)\phi(x))+\frac{1}{2}\int_C d^4y'\Delta_C(x,y')J(y')\Delta_C^{-1}(x)\int_C d^4y\Delta_C(x,y)J(y)\\
&\qquad-\phi(x)J(x)\Big)\Big]\exp[i\int_C d^4x\Big(J(x)\phi(x)-\int_C d^4yJ(x)\Delta_C(x,y)J(y)\Big)\Big]\\
=&\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\Big(\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x)\phi(x)+\frac{1}{2}\int_C d^4y'J(x)\Delta_C(x,y')J(y')\Big)\Big]\\
&\quad\times\exp\Big[-i\int_C d^4x\int_C d^4yJ(x)\Delta_C(x,y)J(y)\Big]\\
=&\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x)\phi(x)\Big]\exp\Big[-\frac{i}{2}\int_C d^4x\int_C d^4yJ(x)\Delta_C(x,y)J(y)\Big]\\
=&N\exp\Big[-\frac{i}{2}\int_C d^4x\int_C d^4y\ J(x)\Delta_C(x,y)J(y)\Big]
\end{aligned}\tag{16}$$

このように、時間経路 C が入ってくるだけで通常の形と見た目は変わりません。

(15) を J で汎関数微分すると、ここでのデルタ関数の定義から

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2}{\delta J(x')\delta J(y')}Z_0[J]|_{J=0}\\
&=\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2}{\delta J(x')\delta J(y')}\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\int_C d^4y\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y)+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\Big|_{J=0}\\
&=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x')}\int\mathcal{D}\phi\int_C d^4x\phi(x)\delta^4_C(x-y')\exp\Big[i\int_C d^4x\int_C d^4y\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y)+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\Big|_{J=0}\\
&=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x')}\int\mathcal{D}\phi\ \phi(y')\exp\Big[i\int_C d^4x\int_C d^4y\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y)+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\Big|_{J=0}\\
&=\int\mathcal{D}\phi\ \phi(x')\phi(y')\exp\Big[i\int_C d^4x\int_C d^4y\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y)+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\Big|_{J=0}\\
&=\int\mathcal{D}\phi\ \phi(x')\phi(y')\exp\Big[i\int_C d^4x\int_C d^4y\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y)\Big]
\end{aligned}$$

これから、経路 C での時間順序 T_C によって

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)}Z_0[J]|_{J=0}=\langle T_C\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta=\theta_c(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta+\theta_c(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta$$

と書けます。

同様に (16) を J で汎関数微分すると (N は規格化部分なので無視して)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i^2}\ \frac{\delta^2}{\delta J(x')\delta J(y')}Z_0[J]\\
&=\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2}{\delta J(x')\delta J(y')}\exp\Big[-\frac{i}{2}\int_C d^4x\int_C d^4y\ J(x)\Delta_C(x,y)J(y)\Big]|_{J=0}\\
&=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x')}\Big(-\frac{1}{2}\int_C d^4x\int_C d^4y\ J(x)\Delta_C(x,y)\delta^4_C(y-y')-\frac{1}{2}\int_C d^4x\int_C d^4y\ \delta^4_C(x-y')J(x)\Delta_C(x,y)J(y)\Big)\\
&\qquad\qquad\times\exp\Big[-\frac{i}{2}\int_C d^4x\int_C d^4y\ J(x)\Delta_C(x,y)J(y)\Big]|_{J=0}\\
&=\frac{i}{2}\Big(\int_C d^4x\int_C d^4y\ \Delta_C(x,y)\delta^4_C(x-x')\delta^4_C(y-y'))+\int_C d^4x\int_C d^4y\ \Delta_C(x,y)\delta^4_C(x-y')\delta^4_C(y-x')\Big)\\
&=\frac{i}{2}(\Delta_C(x',y')+\Delta_C(y',x'))
\end{aligned}$$

$\Delta_C(x,y)$ が x と y の差だけに依存して $\Delta_C(x,y)=\Delta_C(y,x)$ なら

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)}Z_0[J]|_{J=0}=i\Delta_C(x,y)$$

というわけで、

$$G_C=i\Delta_C(x,y)=\langle T_C\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta$$

というように、経路 C 上の時間順序に変わっただけの電波関数が出てきます。

このまま経路 C 上としていくと具体的な計算がよく分からないので、経路を具体的にします。まずは (15)、(16) に戻ります。時間経路 C は C_1,C_2 だけなので、ϕ,J を経路上で区別して、C_1 上にいる場と源を $\phi_1(x),J_1(x)$、C_2 上にいるのを $\phi_2(x),J_2(x)$ とします。これらは

$$\phi_1(x)=\phi(x)\ ,\ J_1(x)=J(x) \tag{17a}$$

$$\phi_2(x)=\phi(x_0-i\sigma,\boldsymbol{x})\ ,\ J_2(x)=J(x_0-i\sigma,\boldsymbol{x}) \tag{17b}$$

のように対応しています。そうすると $Z_0[J]$ は

$$\begin{aligned}
Z_0[J]=&\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\\
=&\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_{C_1}d^4x\mathcal{L}(\phi_1)+i\int_{C_2}d^4x\mathcal{L}(\phi_2)+i\int_{C_1}d^4xJ_1(x)\phi_1(x)+i\int_{C_2}d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big]
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
Z_0[J]= &\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\int_C d^4y\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y)+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\\
= &\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_{C_1}d^4x\int_{C_1}d^4y\frac{1}{2}\phi_1(x)\Delta^{-1}_{(11)}(x,y)\phi_1(y)+i\int_{C_2}d^4x\int_{C_2}d^4y\frac{1}{2}\phi_2(x)\Delta^{-1}_{(22)}(x,y)\phi_2(y)\\
&\qquad+i\int_{C_1}d^4x\int_{C_2}d^4y\frac{1}{2}\phi_1(x)\Delta^{-1}_{(12)}(x,y)\phi_2(y)+i\int_{C_2}d^4x\int_{C_1}d^4y\frac{1}{2}\phi_2(x)\Delta^{-1}_{(21)}(x,y)\phi_1(y)\\
&\qquad+i\int_{C_1}d^4xJ_1(x)\phi_1(x)+i\int_{C_2}d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big]
\end{aligned}$$

と分解できます。$\Delta^{-1}_{(ab)}(x,y)$ の括弧つき添え字は (x,y) の位置に対応しています。例えば $\Delta^{-1}_{(21)}(x,y)$ は x が C_2 上、y が C_1 上にいることに対応します。そして、上でも言ったように、C_1 での時間は $-\infty\sim+\infty$ で、C_2 では $+\infty\sim-\infty$ となっており、経路の配置上 C_1 と C_2 での時間は $C_1<C_2$ です。源は C_1 にいるか C_2 にいるかの選択しかできないので、単純に分離されます。C_2 の時間積分を $-\infty\sim\infty$ にして書くなら

$$\begin{aligned}
Z_0[J]= &\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}(\phi_1)-i\int d^4x\mathcal{L}(\phi_2)+i\int d^4xJ_1(x)\phi_1(x)-i\int d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big]\\
= &\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\int d^4y\Big(\frac{1}{2}\phi_1(x)\Delta^{-1}_{(11)}(x,y)\phi_1(y)+\frac{1}{2}\phi_2(x)\Delta^{-1}_{(22)}(x,y)\phi_2(y)\\
&\qquad-\frac{1}{2}\phi_1(x)\Delta^{-1}_{(12)}(x,y)\phi_2(y)-\frac{1}{2}\phi_2(x)\Delta^{-1}_{(21)}(x,y)\phi_1(y)\Big)\\
&\qquad+i\int d^4xJ_1(x)\phi_1(x)-i\int d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big]
\end{aligned}$$

とできます。x,y 積分の時間成分は $-\infty$ から $+\infty$ です。

ϕ_1,ϕ_2 は J_1,J_2 の汎関数微分で取り出せるのか見てみると、(9) より ϕ_1 では素直に

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J_1(x')}&=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(x')}\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi]+i\int_{C_1}d^4xJ_1(x)\phi_1(x)+i\int_{C_2}d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big]\\
&=\int\mathcal{D}\phi\int_{C_1}d^4x\delta^4_{C_1}(x'-x)\phi_1(x)\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi]+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\\
&=\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\delta^4(x'-x)\phi_1(x)\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi]+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]\\
&=\int\mathcal{D}\phi\ \phi_1(x')\exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi]+i\int_C d^4xJ(x)\phi(x)\Big]
\end{aligned}$$

デルタ関数は C_1 上で作用するので通常のデルタ関数になります。ϕ_2 では C_2 上での計算になるので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J_2(x')} &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(x')}\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_{C_1} d^4x J_1(x)\phi_1(x) + i\int_{C_2} d^4x J_2(x)\phi_2(x)\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int_{C_2} d^4x \delta^4_{C_2}(x-x')\phi_2(x)\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4x J(x)\phi(x)\Big] \\
&= -\int \mathcal{D}\phi \int_{\infty}^{-\infty} d^4x \delta^4(x-x')\phi_2(x)\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4x J(x)\phi(x)\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \delta^4(x-x')\phi_2(x)\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4x J(x)\phi(x)\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi\ \phi_2(x')\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi] + i\int_C d^4x J(x)\phi(x)\Big]
\end{aligned}
$$

$\delta^4_{C_2}(x-x')$ の部分は今の定義から

$$
\int_{C_2} dt = \int_{\infty}^{-\infty} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} dt
$$

の置き換えと、汎関数微分が

$$
\frac{\delta J_2(x')}{\delta J_2(x)} = \delta^4_{C_2}(x'-x) = -\delta^4(x'-x) \tag{18}
$$

であることを使っています。この定義は計算しやすいように変更することができますが、それは後に回して、とりあえずこのまま続けていきます。

$\Delta^{-1}_{(ab)}$ を 2×2 行列だと思えば a か b が 2 のときにマイナス符号がつくように内積を定義することで (計量を $(1,-1)$ に取る)

$$
Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp[i\int d^4x \int d^4y \frac{1}{2}\phi_a(x)\Delta^{-1}_{(ab)}(x,y)\phi_b(y) + i\int d^4x J_a(x)\phi_a(x)] \tag{19}
$$

と書けます ($a,b=1,2$ で同じ添え字は $(+1,-1)$ の計量に従って和を取るとします)。この場合 J による汎関数微分も行列的に

$$
\frac{\delta J_a(t')}{\delta J_b(t)} = \tau_3^{(ab)}\delta(t'-t)
$$

と書けます。τ_3 はパウリ行列で、対角成分が $(+1,-1)$ の 2×2 行列になっていることから使っています。τ_3 を計量のように扱うことで

$$
\int_C d^4x J(x)\phi(x) = \int d^4x J_a(x)\phi_a(x) = \int d^4x \hat{J}^\dagger\tau_3\hat{\phi}
$$

$$
\int_C d^4x \int_C d^4y \phi(x)\Delta^{-1}_C(x,y)\phi(y) = \int d^4x d^4y \hat{\phi}^\dagger\tau_3\hat{\Delta}\tau_3\hat{\phi}
$$

$$
\hat{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}\ ,\ \hat{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}\ ,\ \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_{(11)} & \Delta_{(12)} \\ \Delta_{(21)} & \Delta_{(22)} \end{pmatrix}
$$

と書くことも出来ます (ここでは J,ϕ は実数なので † は転置の意味で十分です)。
同様のことは ϕ の積分をはずしたときにも出来て

$$\begin{aligned}
Z_0[J] = N\exp\Big[&-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_1(x)\Delta_{(11)}(x,y)J_1(y)-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_2(x)\Delta_{(22)}(x,y)J_2(y)\\
&+\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_1(x)\Delta_{(12)}(x,y)J_2(y)+\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_2(x)\Delta_{(21)}(x,y)J_1(y)\Big]\\
= N\exp\Big[&-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_a(x)\Delta_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big]
\end{aligned}\tag{20}$$

となります。このときも a,b が 2 のときは内積にマイナスがつきます。
次に $\Delta_{(ab)}(x,y)$ がどうなっているのかを見ます。これらは汎関数微分によって

$$i\Delta_{(ab)}(x,y)=\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_a(x)\delta J_b(y)}|_{J=0}=\int\mathcal{D}\phi\ \phi_a(x)\phi_b(y)\exp[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi,J]]|_{J=0}$$

となっています。実際にいくつかやっておくと

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_1(x)\delta J_1(y)}\Big|_{J=0} =&\ -\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}\int d^4x_1d^4y_1\delta^4(y-x_1)\Delta_{(11)}(x_1,y_1)J_1(y_1)Z_0|_{J=0}\\
&-\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}\int d^4x_1d^4y_1J_1(x_1)\Delta_{(11)}(x_1,y_1)\delta^4(y-y_1)Z_0|_{J=0}\\
=&\ -\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}\int d^4y_1\Delta_{(11)}(y_1,y)J_1(y_1)Z_0|_{J=0}\\
=&\ i\Delta_{(11)}(x,y)
\end{aligned}$$

$J=0$ で消えると分かる項は無視し、途中で伝播関数の性質 $\Delta_{(11)}(x-y)=\Delta_{(11)}(y-x)$ を使っています。$J_1(x)$ と $J_2(y)$ (J_1 が C_1 上、J_2 が C_2 上) による場合は、$J=0$ で消えない項だけを取り出していくと

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_1(x)\delta J_2(y)}\Big|_{J=0} =&\ \frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}\int d^4x_1d^4y_1J_1(x_1)\Delta_{(12)}(x_1,y_1)(-\delta^4(y-y_1))Z_0|_{J=0}\\
&+\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}\int d^4x_1d^4y_1(-\delta^4(y-x_1))\Delta_{(21)}(x_1,y_1)J_1(y_1)Z_0|_{J=0}\\
=&\ -\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}\int d^4x_1J_1(x_1)\Delta_{(12)}(x_1,y)Z_0|_{J=0}-\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}\int d^4y_1\Delta_{(21)}(y,y_1)J_1(y_1)Z_0|_{J=0}\\
=&\ \frac{i}{2}\int d^4x_1\delta^4(x-x_1)\Delta_{(12)}(x_1,y)Z_0|_{J=0}+\frac{i}{2}\int d^4y_1\Delta_{(21)}(y,y_1)\delta^4(x-y_1)Z_0|_{J=0}\\
=&\ \frac{i}{2}\Delta_{(12)}(x,y)+\frac{i}{2}\Delta_{(21)}(y,x)\\
=&\ i\Delta_{(12)}(x,y)
\end{aligned}$$

$\Delta_{(12)}(x,y)$ と $\Delta_{(21)}(x,y)$ は x_0 と y_0 の差に依存し、x_0 と y_0 が時間経路 C_1,C_2 のどっちにいるかで区別されているだけなので、$\Delta_{(12)}(x,y)=\Delta_{(21)}(y,x)$ となります。というわけで

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_1(x)J_1(y)}|_{J=0} = i\Delta_{(11)}(x,y)$$

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_2(x)J_2(y)}|_{J=0} = i\Delta_{(22)}(x,y)$$

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_1(x)J_2(y)}|_{J=0} = i\Delta_{(12)}(x,y)$$

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_2(x)J_1(y)}|_{J=0} = i\Delta_{(21)}(x,y)$$

$\Delta_{(12)}$ と $\Delta_{(21)}$ では経路が C_1 から C_2 にいくときに $-i\sigma$ 動いているので

$$i\Delta_{(12)}(x,y) = i\Delta_C(x_0-(y_0-i\sigma),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ ,\ i\Delta_{(21)} = i\Delta_C(y_0-i\sigma-x_0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

となっています。

演算子形式との対応を示しておきます。演算子形式よる伝播関数 $i\Delta_C(x,y)$ は経路積分との対応から、C 上の場 ϕ によって

$$i\Delta_C(x,y) = \theta_C(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta_C(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta$$

$$(i\Delta_C(x,y) = \int\mathcal{D}\phi\ \phi(x)\phi(y)\exp[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi]])$$

と書けます。C_1 上に x_0, y_0 がいるなら

$$i\Delta_{(11)}(x,y) = \theta(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta$$

C_2 上では

$$i\Delta_{(22)}(x,y) = \theta(y_0-x_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta(x_0-y_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta$$

となって時間順序が逆向きになります。この時間順序が逆であることを表すためには、逆向きの時間順序の記号 $\tilde{T}$ が使われます。時間の大きさが常に $x_0 > y_0$ だとすれば

$$i\Delta_{(21)}(x,y) = iG^{>}(x,y) = \langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta \quad (x_0>y_0)$$

逆なら

$$i\Delta_{(12)}(x,y) = iG^{<}(x,y) = \langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta \quad (y_0>x_0)$$

というように対応します。

相互作用項が入ってきた場合ではどうなるのかも見ていきます。相互作用項は

$$\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\phi]$$

のように入ってくるので、単純に C_1 と C_2 に分解できて

$$\begin{aligned}
Z[J] =& \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int_C d^4x\int_C d^4y\frac{1}{2}\phi(x)\Delta_C^{-1}(x,y)\phi(y) + i\int_{C_1} d^4x\mathcal{L}_{int}[\phi] + i\int_{C_2} d^4x\mathcal{L}_{int}[\phi] \\
&+ i\int_{C_1} d^4xJ(x)\phi(x) + i\int_{C_2} d^4xJ(x)\phi(x)\Big] \\
=& \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\phi_1] - i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\phi_2]\Big] \\
&\times \exp\Big[i\int d^4x\int d^4y\frac{1}{2}\phi_{(a)}(x)\Delta_{(ab)}^{-1}(x,y)\phi_{(b)}(y) + i\int d^4xJ_a(x)\phi_a(x)\Big] \\
=& \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(x)}] - i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(x)}]\Big] \\
&\times \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\int d^4y\frac{1}{2}\phi_{(a)}(x)\Delta_{(ab)}^{-1}(x,y)\phi_{(b)}(y) + i\int d^4xJ_a(x)\phi_a(x)\Big]
\end{aligned}$$

となります。ϕ_1 と ϕ_2 は (18) によって

$$\phi_1(x) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(x)}\ ,\ \phi_2(x) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(x)}$$

という対応関係になっています。このように頂点が 2 つ現れ、それぞれの符号が逆になっていることが分かります。これが実数場での経路積分表示での基本形です。摂動展開すると

$$\begin{aligned}
Z[J] =& \Big[1 + \Big(i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1}] - i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2}]\Big) + \cdots)\Big] \\
&\times \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\int d^4y\frac{1}{2}\phi_{(a)}(x)\Delta_{(ab)}^{-1}(x,y)\phi_{(b)}(y) + i\int d^4xJ_a(x)\phi_a(x)\Big] \\
=& \Big[1 + \Big(i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1}] - i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2}]) + \cdots\Big)\Big] \\
&\times \exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_a(x)\Delta_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big]
\end{aligned}$$

ここまでは、内積計算において $(+1,-1)$ の計量を使い、J_2 の汎関数微分に関してはマイナス符号がつくように定義してきました。この形式ではマイナスが煩わしいです。なので、それを変更する方法を 3 パターンを示します。基本形での性質は壊れないように符号を操作して計算上現れるマイナスを取り除くだけです。

まず、1 つ目は内積の計量を $(+1,+1)$ に変える単純な方法を示します。これは伝播関数の符号をいじるだけですみます。(20) で、$\Delta_{(12)}(x,y)$ と $\Delta_{(21)}(x,y)$ の符号が $\Delta_{(11)}(x,y)$ と $\Delta_{(22)}(x,y)$ の逆になっているので、$\Delta_{(12)}(x,y)$ と $\Delta_{(21)}(x,y)$ の符号を逆にして

$$\begin{aligned}
Z_0[J] = N\exp\Big[&-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_1(x)D_{(11)}(x,y)J_1(y)-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_2(x)D_{(22)}(x,y)J_2(y)\\
&-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_1(x)D_{(12)}(x,y)J_2(y)-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_2(x)D_{(21)}(x,y)J_1(y)\Big]\\
= N\exp\Big[&-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_a(x)D_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big]
\end{aligned}$$

新しい伝播関数 $iD_{(ab)}(x,y)$ は

$$iD_{(11)}(x,y) = i\Delta_{(11)}(x,y) \tag{21a}$$

$$iD_{(22)}(x,y) = i\Delta_{(22)}(x,y) \tag{21b}$$

$$iD_{(12)}(x,y) = -i\Delta_{(12)}(x,y) = -iD^{<}(x,y) \tag{21c}$$

$$iD_{(21)}(x,y) = -i\Delta_{(21)}(x,y) = -iD^{>}(x,y) \tag{21d}$$

と定義します。これによって内積は $(+1,+1)$ になります。これは伝播関数の定義を変えて内積を $(+1,+1)$ にしただけなので、デルタ関数の定義は変更されず、(20) のままです。

2 つ目は J_2 の汎関数微分でも通常のデルタ関数が出てくるように変更してみます。例えば、J_2 の汎関数微分でも通常のデルタ関数がでるとすれば、$iD_{(12)}(x,y)$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{i\delta J_1(x')}\frac{\delta}{i\delta J_2(y')}Z_0[J] =& -\frac{\delta}{i\delta J_1(x')}\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi_2(x)\delta^4(x-y')\\
&\times\exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}+i\int d^4xJ_1(x)\phi_1(x)-i\int d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big]\\
=& -\int\mathcal{D}\phi\ \phi_1(x')\phi_2(y')\exp[i\int_C d^4x\mathcal{L}+i\int d^4xJ_1(x)\phi_1(x)-i\int d^4xJ_2(x)\phi_2(x)]\\
=& -\langle\phi_1(x')\phi_2(y')\rangle_\beta\\
=& -iD^{<}(x',y')\\
=& iD_{(12)}(x',y')
\end{aligned}$$

と求まります。しかし、これでは $iD_{(12)}$ にはなりますが $i\Delta_{(12)}$ とは符号が反転します。なので、場との対応を

$$\phi_1(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(x)}\ ,\ \phi_2(x)\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(x)} \tag{22}$$

として J_2 の汎関数微分自体にマイナスをつけてみます。これによって、(22) を n 点関数の導出にも使うという立場をとり、J_2 の汎関数微分によって通常のデルタ関数になるとして

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{i\delta J_1(x)}(-\frac{\delta}{i\delta J_2(y)})Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi\ \phi_1(x)\phi_2(y)\exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L} + i\int d^4xJ_1(x)\phi_1(x) - i\int d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi\ \phi_1(x)\phi_2(y)\exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L} + i\int d^4xJ_1(x)\phi_1(x) - i\int d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big] \\
&= \langle\phi_1(x)\phi_2(y)\rangle_\beta \\
&= i\Delta_{(12)}(x,y)
\end{aligned}
$$

というわけで、(22) にすれば、J_2 の汎関数微分からは通常のデルタ関数が出ると出来ます。この形式での特徴は相互作用項が

$$
\begin{aligned}
Z[J] = &\ \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1}] - i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2}]\Big] \\
&\times\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\ J_a(x)\Delta_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big]
\end{aligned}
$$

となって C_2 側での相互作用項にマイナスつきの汎関数微分が出てくる点です (これの内積は $(+1,-1)$ のまま)。このため、ϕ^3 理論のように相互作用項が奇数になっているとき、C_1 と C_2 での相互作用項の符合が一致します。

3 つ目として、J_2 部分のマイナスを完全に取り除くように変更した場合を示します。源 J 自体は便宜的に付けている項なので、源の符号を変えても害はないということを利用します。なので、J_2 の符号が逆になるように (17b) を

$$
J_2(x) = -J(x_0 - i\sigma, \boldsymbol{x})
$$

と定義し直します。これによって (15) を展開すると

$$
\begin{aligned}
Z_0[J] = &\int \mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\int d^4y(\frac{1}{2}\phi_1(x)\Delta^{-1}_{(11)}(x,y)\phi_1(y) + \frac{1}{2}\phi_2(x)\Delta^{-1}_{(22)}(x,y)\phi_2(y) \\
&- \frac{1}{2}\phi_1(x)\Delta^{-1}_{(12)}(x,y)\phi_2(y) - \frac{1}{2}\phi_2(x)\Delta^{-1}_{(21)}(x,y)\phi_1(y)) + i\int d^4xJ_1(x)\phi_1(x) + i\int d^4xJ_2(x)\phi_2(x)\Big]
\end{aligned} \tag{23}
$$

となり、J_2 の符号が反転しているために J_a の汎関数微分も

$$
\frac{\delta J_a(x')}{\delta J_b(x)} = \delta_{ab}\delta^4(x'-x)
$$

と変更され J_2 の汎関数微分でマイナスがつきません。なので、この汎関数微分の定義によって

$$
\phi_1(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1(x)}\ ,\ \phi_2(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2(x)}
$$

という対応関係になります。(20) は、J_2 の符号が反転して

$$
\begin{aligned}
Z_0[J] = N \exp\Big[&- \frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y \; J_1(x)\Delta_{(11)}(x,y)J_1(y) - \frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y \; J_2(x)\Delta_{(22)}(x,y)J_2(y) \\
&- \frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y \; J_1(x)\Delta_{(12)}(x,y)J_2(y) - \frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y \; J_2(x)\Delta_{(21)}(x,y)J_1(y)\Big] \\
= N \exp\Big[&- \frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y \; J_a(x)\Delta_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big]
\end{aligned}
$$

となって、この場合では内積計量が $(+1,+1)$ となります。相互作用項があるときは

$$
Z[J] = \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_1}] - i\int d^4x\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_2}]\Big] \exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y \; J_a(x)\Delta_{(ab)}(x,y)J_b(y)\Big]
$$

見た目は変わりませんが、J_2 の汎関数微分と内積に余計なマイナスがつきません (しかし (23) での演算子部分での内積は $(+1,-1)$ のまま)。なので、こっちの形式の方が摂動計算には便利です。

最後に経路積分の形式からも伝播関数に対する境界条件 (久保-Martin-Schwinger の関係) が導けることを示しておきます。場の境界条件は

$$
\phi(x_0, \boldsymbol{x}) = \phi(x_0 - i\beta, \boldsymbol{x})
$$

となっています。x_0 が時間経路の始点 t_i にいるとして、$x_0 = t_i$、$y_0 = t_i + t$ $(t > 0)$ と設定すると、常に $x_0 < y_0$ なので $iG_C(x,y) = iG^<(x,y)$ となります。また、x_0 が時間経路の終点 $x_0 = t_i - i\beta$ として $y_0 = t_i + t$ とすれば、常に $x_0 > y_0$ となって $iG_C(x,y) = iG^>(x,y)$ となります。この状況は経路積分において

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi \; \phi(t_i, \boldsymbol{x})\phi(t_i + t, \boldsymbol{y}) \exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi]\Big] \\
&\int \mathcal{D}\phi \; \phi(t_i - i\beta, \boldsymbol{x})\phi(t_i - i\beta + t, \boldsymbol{y}) \exp\Big[i\int_C d^4x\mathcal{L}[\phi]\Big]
\end{aligned}
$$

となっていることになります。場に対しての境界条件を使えば

$$
\phi(t_i - i\beta, \boldsymbol{x})\phi(t_i - i\beta + t, \boldsymbol{y}) = \phi(t_i, \boldsymbol{x})\phi(t_i + t, \boldsymbol{y})
$$

となることから、これらは同じ結果を返します。つまり、伝播関数において

$$
\begin{aligned}
&iG^<(x_0 - y_0, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = iG^<(-t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \quad (x_0 = t_i,\ y_0 = t_i + t) \\
&iG^>(x_0 - y_0, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = iG^>(-t - i\beta, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \quad (x_0 = t_i - i\beta,\ y_0 = t_i + t)
\end{aligned}
$$

となることから

$$
iG^<(-t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = iG^>(-t - i\beta, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})
$$

という境界条件が導けます。