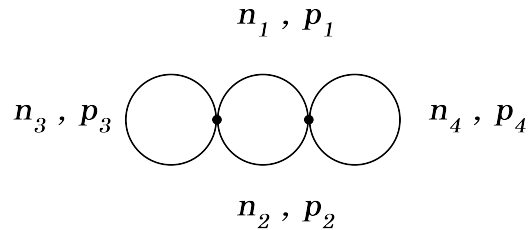


リングダイアグラム

有限温度で現われる赤外発散とそれをなくす方法を見ます。

ϕ^4 理論での分配関数で出てきた $\log Z_1$ は特に何も起きていなかったの次のオーダーにいけます。で、次の $\log Z_2$ のオーダーで早々に問題が起こります。それは、 $\log Z_2$ の図のうちの一つである



この図です。この図のループ積分部分は

$$\beta VT^4 \sum_{n_1, \dots, n_4} \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^{12}} D(n_1, \mathbf{p}_1) D(n_2, \mathbf{p}_2) D(n_3, \mathbf{p}_3) D(n_4, \mathbf{p}_4) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \beta \delta_{n_1, n_2}$$

と書けます。ここでの $D(n, \mathbf{p})$ は

$$\frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \quad (\omega_n = 2\pi nT)$$

このループ積分は相変わらず紫外発散を起こすんですが、それはゼロ温度のくり込みでどうにか出来ます。しかし、状況を設定するとそれとは別に赤外発散を起こします。どう設定するのかというと、図の真ん中の部分の松原振動数を 0 にし、質量も 0 にします。そうするとループ積分は

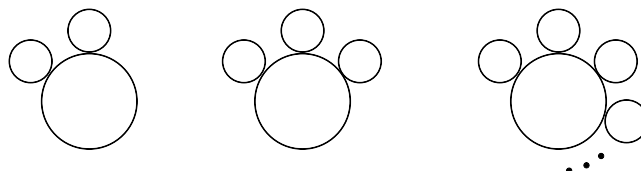
$$\begin{aligned} I &= \beta VT^4 \sum_{n_1, \dots, n_4} \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_4}{(2\pi)^{12}} D(0, \mathbf{p}_1) D(0, \mathbf{p}_2) D(n_3, \mathbf{p}_3) D(n_4, \mathbf{p}_4) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \beta \delta_{n_1, n_2} \\ &= \beta V \left(T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} D(0, \mathbf{p}) D(0, \mathbf{p}) \right) \left(T \sum_{n_3} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} D(n_3, \mathbf{p}_3) \right) \left(T \sum_{n_4} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} D(n_4, \mathbf{p}_4) \right) \end{aligned}$$

このとき、 $D(n_3, \mathbf{p}_3), D(n_4, \mathbf{p}_4)$ は 1 ループでの計算そのままになるので、それを Π_1 とおいてしまい

$$\begin{aligned} I &= \beta V \left(T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} D(0, \mathbf{p}) D(0, \mathbf{p}) \right) \Pi_1^2 \\ &= \beta VT \Pi_1^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^4} \\ &= 4\pi \beta VT \Pi_1^2 \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^4} \\ &= 4\pi \beta VT \Pi_1^2 \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \end{aligned}$$

この積分は明らかに下限である 0 で発散します。つまり、赤外発散を起こしています。このように、有限温度において、質量 0 の場合に $n = 0$ という静的な極限で赤外発散を起こします。同様のことがなんでゼロ温度で起きないかは、ゼロ温度での 1 ループの寄与は質量に比例して現われるために、質量 0 では寄与しないからです (場の量子論の「くり込み ~ ϕ^4 理論 ~」の結果を見ればそうになっています)。それに対して有限温度では質量 0 でも Π_1 は 0 になりません (下で実際に計算します)。

さらにオーダーを上げていけば同様の発散が現われており、それらは



このような図によって表現されます。で、このタイプの図のことをリングダイアグラム (ring diagram) と呼びます (リング図だと語呂が悪い気がするのでダイアグラムとしています)。これらの発散をどうにかしないと高次の計算ができないので、どうにかしてやります。

方法は単純で、このタイプの図を足し上げてしまいます。リングダイアグラムの現われ方というのは、図を見れば分かるように、係数を無視すれば

$$\Pi_1^N \sum_n \int d^3p \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2} \right)^N$$

このような構造をしています ($\omega_n = 0$ で赤外発散を起こす)。 N は λ のオーダー、よは頂点の数です (λ は Π_1 の中に入っています)。この形をみると

$$\sum_n \int d^3p \left(\Pi_1 \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2} \right)^N = \sum_n \int d^3p \left(\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}) \right)^N$$

と書けることが分かります。そうすると、これの N に対する和を取ればリングダイアグラム全てを足したことにできます。なので、リングダイアグラムの和というのは

$$\sum_{N=1}^{\infty} \sum_n \int d^3p \frac{(-1)^N}{2^N} \left(\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}) \right)^N \quad (1)$$

こんな形で書けるはずですが (マイナスがついているのは頂点の数 (頂点には $-\lambda$ を当てる) によってマイナスがつくからです)。 2^N というのは場合の数からでてきたものです。頂点の並び方として $(N-1)!/2$ 通りで、これを分配関数の展開によってでてくる $N!$ で割ります

$$\frac{(N-1)!}{2^N N!} = \frac{1}{2^N N}$$

他にも 1 つのループ部分 (頂点) における場合の数もあります。頂点に対する線の取り方として $3!$ 通り。両隣の頂点をつなぐ線のつなぎ方によって 2 通り。この $3! \times 2$ 通りというのは Π_1 の場合の数にそのまま対応します。なので、これは Π_1 の計算のときに考慮すればいいので、ここでは無視します。

(1) をちゃんと係数も含めて書けば

$$\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^N$$

このようになっています。しかし、 $N = 1$ の場合というのは今は関係のない図なので、必要なリングダイアグラムの足し上げは

$$\Omega = \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^N$$

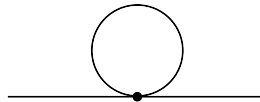
これでいいです。当たり前ですが、これの和の各項 ($N = 2, 3, \dots$) はそれぞれ赤外発散しています。この式は \log の展開

$$\log[1 + x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

と同じ格好をしているので、 N の和を取ると

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^N \\ &= \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-1)} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{N} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^N - \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-1)} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p})) \\ &= -\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log[1 + \Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p})] + \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}) \\ &= -\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\log[1 + \Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p})] - \Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p})) \end{aligned}$$

このように書けます。この式にはこの時点で分かりやすい問題があって、それは Π_1 はゼロ温度での紫外発散を持っているということです。これの除去は簡単で、ゼロ温度と同じ相殺項を加えればいいです。具体的に見るために、 Π_1 を計算します。 Π_1 は ϕ_4 理論での自己エネルギーの図



に対応するものなので、式にすれば

$$\Pi_1 = 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{(i\omega_n)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} = 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}$$

ここでの 12 がさっき出てきた場合の数です。これは今の場合相互作用項を λ にとっているために 12 なんていう数になっていますが、24 で割れば $\lambda/4!$ でのものになるので、 $1/2$ になり場の量子論でやっていた係数に一致します。

この計算は相当単純な形をしているので

$$\Pi_1 = 12\lambda \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} + 12\lambda \times 2 \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dp_0}{2\pi i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}$$

このように、「和の計算」で出てきた形をそのまま使えます。第一項は $p_4 = ip_0$ として

$$\Pi_1^0 = 12\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_4}{2\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_4^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}$$

第二項は留数定理を使って、右半円の経路を時計周りにとることで

$$\begin{aligned} \Pi_1^T &= 12\lambda \times 2 \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dp_0}{2\pi i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \\ &= 12\lambda \times 2 \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dp_0}{2\pi i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{(p_0 - E_{\mathbf{p}})(p_0 + E_{\mathbf{p}})} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \quad (E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2 + m^2) \\ &= 12\lambda \times 2 \frac{(-2\pi i)}{2\pi i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \\ &= 12\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{p}}} - 1} \end{aligned}$$

というわけで、

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi_1^0 + \Pi_1^T \\ &= 12\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_4}{2\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_4^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} + 12\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{p}}} - 1} \end{aligned}$$

ここでの第一項 Π_1^0 は明らかにゼロ温度での場合と一致しています。なので、実際にゼロ温度での紫外発散を持っています。で、 Π_1 から Π_1^0 を消すためには、相殺項を加えてやればいいです。そのためには、リングダイアグラムの Π_1 の代わりに質量の相殺項 δm^2 にしたものを、 Π_1 のリングダイアグラムに加えればいいです。そうすることで、 $\Pi_1 + \delta m^2$ という形を作ることが出来ます。単純に Π_1 を δm^2 に置き換えるだけなので、例えば、 $N = 3$ のとき

$$\begin{aligned} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^3 + (\delta m^2 D(\omega_n, \mathbf{p}))^3 &= ((\Pi_1^0 + \Pi_1^T) D(\omega_n, \mathbf{p}))^3 + (\delta m^2 D(\omega_n, \mathbf{p}))^3 \\ &= (\Pi_1^0 + \Pi_1^T)^3 D^3(\omega_n, \mathbf{p}) + (\delta m^2)^3 D^3(\omega_n, \mathbf{p}) \\ &= (\Pi_1^0 + \Pi_1^T + \delta m^2)^3 D^3(\omega_n, \mathbf{p}) \\ &= (\Pi_1^T)^3 D^3(\omega_n, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

となります。 δm^2 は $\delta m^2 = -\Pi_1^0$ として作るので、 $\Pi_1 + \delta m^2$ は Π_1^T だけを返すこととなります。

このことによって、最終的なリングダイアグラムの足し上げた形は

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\log[1 + \Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p})] - \Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p})) \\ \Rightarrow \Omega_R &= -\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\log[1 + \Pi_1^T D(\omega_n, \mathbf{p})] - \Pi_1^T D(\omega_n, \mathbf{p}))\end{aligned}$$

となります (図を足し上げることは再加算 (resummation) とよく表現されます)。ここで嬉しいことが起きていて、足し上げる前には赤外発散を起こしていたのに足しあげた後では赤外発散をしなくなっています。実際に赤外発散が出てこないことを見ていきます。

$m = 0$ のとき Π_1^T は

$$\begin{aligned}\Pi_1^T &= 12\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} \frac{1}{e^{\beta E_p} - 1} \\ \Rightarrow 12\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{\beta \mathbf{p}} - 1} &= 12\lambda T \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{e^{\beta \mathbf{p}} - 1} \\ &= 12\lambda \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 \\ &= \lambda T^2\end{aligned}$$

これを代入して、 $n = 0$ とすれば

$$\begin{aligned}\Omega_R(n=0) &= -\frac{1}{2}\beta VT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\log[1 + \Pi_1^T D(0, \mathbf{p})] - \Pi_1^T D(0, \mathbf{p})) \\ &= -\frac{1}{2}\beta VT \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\log[1 + \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2}] - \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2}) \\ &= -\frac{1}{2}\beta VT \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| (\mathbf{p}^2 \log[1 + \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2}] - \lambda T^2) \\ &= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \left[\int_0^\infty d|\mathbf{p}| \mathbf{p}^2 \log[1 + \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2}] - \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \lambda T^2 \right] \\ &= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \left[\left[\frac{1}{3} \mathbf{p}^3 \log[1 + \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2}] \right]_0^\infty - \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{1}{3} \frac{\mathbf{p}^3}{1 + \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2}} \frac{-2\lambda T^2}{\mathbf{p}^3} - \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \lambda T^2 \right] \\ &= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \left[\left[\frac{1}{3} \mathbf{p}^3 \log[1 + \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2}] \right]_0^\infty - \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{-2\lambda T^2}{3} \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 + \lambda T^2} - \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \lambda T^2 \right]\end{aligned}$$

ここでの第一項は $|\mathbf{p}|$ が無限大のとき \log を展開すれば

$$\mathbf{p}^3 \left(\frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2} - \frac{1}{2} \frac{(\lambda T^2)^2}{\mathbf{p}^4} \dots \right) = |\mathbf{p}| \lambda T^2 - \frac{(\lambda T^2)^2}{|\mathbf{p}|} \dots$$

となるので、この第一項のみが $|p|$ 無限大では生き残ります。これは言い換えれば

$$\lambda T^2 \int_0^\infty d|p|$$

の積分にあたるので

$$\begin{aligned}
\Omega_R(n=0) &= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \left[\frac{\lambda T^2}{3} \int_0^\infty d|p| - \int_0^\infty d|p| \frac{-2\lambda T^2}{3} \frac{p^2}{p^2 + \lambda T^2} - \int_0^\infty d|p| \lambda T^2 \right] \\
&= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \int_0^\infty d|p| \left(\frac{\lambda T^2}{3} + \frac{2\lambda T^2}{3} \frac{p^2}{p^2 + \lambda T^2} - \lambda T^2 \right) \\
&= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \int_0^\infty d|p| \left(\frac{\lambda T^2}{3} \frac{p^2 + \lambda T^2}{p^2 + \lambda T^2} + \frac{2\lambda T^2}{3} \frac{p^2}{p^2 + \lambda T^2} - \frac{3\lambda T^2}{3} \frac{p^2 + \lambda T^2}{p^2 + \lambda T^2} \right) \\
&= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \int_0^\infty d|p| \left(\frac{\lambda T^2}{3} \frac{3p^2 + \lambda T^2}{p^2 + \lambda T^2} - \frac{3\lambda T^2}{3} \frac{p^2 + \lambda T^2}{p^2 + \lambda T^2} \right) \\
&= -\frac{\beta VT}{4\pi^2} \int_0^\infty d|p| \left(-\frac{2\lambda T^2}{3} \frac{\lambda T^2}{p^2 + \lambda T^2} \right) \\
&= \frac{2}{3} \frac{\beta VT}{4\pi^2} (\lambda T^2)^2 \int_0^\infty d|p| \frac{1}{p^2 + \lambda T^2} \\
&= \frac{2}{3} \frac{\beta VT}{4\pi^2} (\lambda T^2)^2 \frac{1}{(\lambda T^2)^{1/2}} \arctan \frac{|p|}{(\lambda T^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{2}{3} \frac{\beta VT}{4\pi^2} (\lambda T^2)^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{(\lambda T^2)^{1/2}} \\
&= \frac{\beta V}{12\pi} \lambda^{3/2} T^4
\end{aligned}$$

となり、赤外発散が起きていません。さらにこれから分かるように、結合定数が $\lambda^{3/2}$ のように中途半端なオーダーを持ちます。また、 $n \neq 0$ とした時には λ のオーダーが $3/2$ より大きいものが出てきます (λ^2 から)。

話をなんでこんなものを計算したのかに戻します。出発点は、 $\log Z$ の 2 次のオーダーを計算しようとしたときに、質量 0 では $n = 0$ となる静的な場合に赤外発散が出てきてしまうというものです。そしてこの発散はリングダイアグラムで常に出てきます。このリングダイアグラムの赤外発散をどうにかする方法として、オーダーごとに計算するのではなく、リングダイアグラムは高次のオーダーも含めて全て一緒に足してしまおうという方針をとりました。これによって、リングダイアグラムで生じる赤外発散は上手いこと消えてくれました。つまり、静的な場合で赤外発散する図を赤外発散しないものとして計算できたので、上のリングダイアグラムの $n = 0$ の結果を λ の 1 次のオーダーの寄与として加えることになります。これがまともに摂動論が使えない理由で、1 次の次に効いてくるオーダーが 2 次ではなくなるために通常の摂動展開は破綻します。このオーダーまでの質量 0 のボソンによる圧力は

$$P = \frac{\pi^2}{90} T^4 - \frac{\lambda T^4}{48} + \frac{\beta V}{12\pi} \lambda^{3/2} T^4 = \frac{\pi^2}{90} T^4 \left(1 - \frac{15}{8\pi^2} \lambda + \frac{15}{2\pi^3} \lambda^{3/2} \right)$$

ちなみに、ここでは 1 次のオーダーでの自己エネルギー Π_1 を使って計算しましたが、厳密なリングダイアグラムは高次のオーダーまで含めた完全な自己エネルギー Π を使って構成されます。

ϕ^4 理論でやってきましたが、QED や QCD でも赤外発散は起きるのでリングダイアグラムの足し上げは必要になります。