## 対称性の回復

有限温度における重要な性質である対称性の回復を見ます。これを見るには有効ポテンシャルを使うので、まずは有限温度での有効ポテンシャルを作ります。
作るといっても相当簡単に作れます。有限温度の有効ポテンシャルはユークリッド空間での有効ポテンシャルに対して、虚時間 $\tau$ が $0 \sim \beta$ の範囲だということと、運動量の 0 成分が松原振動数になっているということを加えればいいだけです。なので、場の量子論での「有効作用と有効ポテンシャル」で求められたものを、ユークリッド空間に持っていけばそれでほとんど完成です。この手続きは場の量子論での「1 ループでの有効ポテンシャル」で行っていますが、ここでも求めておきます。

最初にミンコフスキー空間から始めて途中でユークリッド空間に切り替えるようにして有効ポテンシャルを作ります。有効ポテンシャル $V[a]$ は有効作用 $\Gamma[\phi_c]$ から作られ、有効作用は connected な n 点相関関数の生成汎関数 $W[J]$ から作られます ($\phi_c$ は $\phi$ の真空期待値、$a$ は $\phi_c(x) = const = a$)。で、出発点となる $W[J]$ は生成汎関数 $Z[J]$ から

$$W[J] = -i \log Z[J]$$

実数スカラー場だとします。ちなみにユークリッド空間から始めるなら $-i$ をかける必要がないです。これからルジャンドル変換によって

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J\phi_c$$

$$\phi_c = \frac{\delta W}{\delta J}$$

有効ポテンシャルは、この有効作用から $\phi_c$ を定数 $a$ として、全時空体積を抜いて符号を反転させればいいので

$$\Gamma[a] = -\Omega V(a)$$

となります。$\Omega$ が 4 次元での全時空体積です。このように完全にゼロ温度と同じ道筋で求められます。
ゼロ温度でのミンコフスキー空間での有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{eff}(a) &= V_0(a) + V_1(a) \\ &= V_0(a) - \frac{i}{2}\Omega^{-1}\mathrm{tr}\log[(\Box + V'')] = V_0(a) - \frac{i}{2}\Omega^{-1}\mathrm{tr}\log[(\Box + m_{eff}^2)] \end{aligned} \tag{1}$$

$$V_0(a) = \frac{1}{2}m^2a^2 + \mathcal{L}_{int}(a)$$

元のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V[\phi]$$

$V''$ は $a$ の二階微分です。$\phi^4$ 理論だとすれば $\mathcal{L}_{int} = \lambda\phi^4/4!$ なので

$$V_{eff}(a) = V_0(a) - \frac{i}{2}\Omega^{-1}\mathrm{tr}\log[\Box + m_{eff}^2]$$

$$m_{eff}^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}a^2$$

これの第二項の運動量表示への変換は、$A$ の固有値が $\lambda_j$ のとき

$$\mathrm{tr}\log A = \sum_j \log\lambda_j$$

となることから、log の中の固有値が $-p^2 + m_{eff}^2$ であることを使って

$$-\frac{i}{2}\Omega^{-1}\sum_j[-p_j^2 + m_{eff}^2]$$

そして和は

$$\sum_j = \sum_j \frac{L^4}{(2\pi)^4}\frac{(2\pi)^4}{L^4}$$

において $L \to \infty$ とすることで

$$\int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

と置き換えられるので

$$\begin{aligned} V_{eff}(a) &= V_0(a) - \frac{i}{2}\Omega^{-1}\int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\log[-p^2 + m_{eff}^2] \\ &= V_0(a) - \frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\log[-p^2 + m_{eff}^2] \end{aligned}$$

最後に、$p_0$ をユークリッド化 $p_0 \Rightarrow ip_0$ すれば

$$V_{eff}(a) = V_0(a) + \frac{1}{2}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\log[p_E^2 + m_{eff}^2]$$

これがユークリッド空間での有効ポテンシャルになります。有限温度に持っていくには $p_0$ を松原振動数 $\omega_n$ にし、$p_0$ 積分を和に変えればいいので

$$V_{eff}(a,T) = V_0(a,T) + \frac{1}{2}T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log[\omega_n^2 + \boldsymbol{p}^2 + m_{eff}^2]$$

となります。というわけで、ミンコスフキー空間でのゼロ温度から有限温度の有効ポテンシャルに変更するには、ユークリッド化して 0 成分を和に変え、$p_0$ を松原振動数に変えればいいということです。この変換規則は「ファインマン則〜虚時間法〜」での最後に載せたものに対応します。

これで準備ができたので、対称性の回復について見ていきます。複素スカラー場を使ったときのラグランジアンは

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi^*(x))-m^2\phi^*(x)\phi(x)-\lambda(\phi^*(x)\phi(x))^2$$

場 $\phi$ を実部と虚部に分けて

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x)+i\phi_2(x))$$

とすれば

$$\begin{aligned}(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi^*(x)) &= \frac{1}{2}\big(\partial_\mu(\phi_1+i\phi_2)\big)\big(\partial^\mu(\phi_1-i\phi_2)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big[(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)+(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2)-i(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_2)+i(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_1)\big]\\ &= \frac{1}{2}\big[(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)+(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2)\big]\end{aligned}$$

質量項は

$$m^2\phi^*(x)\phi(x)=\frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)$$

なので

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2)-\frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$$

このようになります。ここで $m^2=-\mu^2(\mu^2>0)$ として、対称性を自発的に破る状況にします

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2)+\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$$

ここで、$\phi_1(x)$ に定数場 $\sigma$ を加えてズラすことで

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2)+\frac{1}{2}\mu^2((\phi_1+\sigma)^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}((\phi_1+\sigma)^2+\phi_2^2)^2 \tag{2}$$

ここで必要なのは運動項と $\phi_1,\phi_2$ の 2 次の項なので、それらだけを取り出していくと

$$\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\sigma^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\sigma^2+2\sigma\phi_1+\phi_2^2)^2$$

$$=\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\sigma^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}[(\phi_1^2+\phi_2^2)^2+(\sigma^2+2\sigma\phi_1)^2+2(\sigma^2+2\sigma\phi_1)(\phi_1^2+\phi_2^2)]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}[4\sigma^2\phi_1^2+2\sigma^2(\phi_1^2+\phi_2^2)]$$

$$=\frac{1}{2}\mu^2\phi_1^2-\frac{1}{4}(4\lambda\sigma^2+2\lambda\sigma^2)\phi_1^2+\frac{1}{2}\mu^2\phi_2^2-\frac{\lambda}{2}\sigma^2\phi_2^2$$

$$=\frac{1}{2}(\mu^2-3\lambda\sigma^2)\phi_1^2+\frac{1}{2}(\mu^2-\lambda\sigma^2)\phi_2^2$$

$$=-\frac{1}{2}(-\mu^2+3\lambda\sigma^2)\phi_1^2-\frac{1}{2}(-\mu^2+\lambda\sigma^2)\phi_2^2$$

$$=-\frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2-\frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2$$

矢印のところで二次の項だけを取り出しています。これによって二次までのラグランジアンは

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)-\frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2)-\frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2$$

このように書くことができます。これと (1) を比較してみると、有効ポテンシャル $V_1$ は

$$V_1(\sigma)=-\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(\log[-p^2+m_1^2]+\log[-p^2+m_2^2])$$

であることが分かります。これが、対称性が自発的に破られる時の複素スカラー場に対する $\hbar$ のオーダでの有効ポテンシャルになります。ちなみに $V_0(\sigma)$ は元のラグランジアン (2) から $\phi_1,\phi_2$ を含まない $\sigma$ の項を抜き出せばいいので

$$-V_0(\sigma)=\frac{1}{2}\mu^2\sigma^2-\frac{\lambda}{4}\sigma^4$$

　これを有限温度に持っていくには、$p_0$ を $i\omega_n$ とし、$p_0$ 積分をユークリッド空間にして和に変えればいいだけなので

$$V_1(\sigma,T)=\frac{1}{2}T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\log[\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m_1^2]+\log[\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m_2^2])$$

これで有限温度に持っていけたことになります。後はこれの計算をしていきます。第一項と第二項の違いは $m_1$ が $m_2$ になっているだけなので、片方をやればいいです ($M$ と書いていきます )。

　まず和は

$$I=\sum_n\log[\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+M^2]=\sum_n\log[(2\pi nT)^2+\omega^2]$$

このようになっています。このままだとどうにもならないので、和の公式が使える状態に持っていきます。$\omega$ で微分すると

$$\frac{dI}{d\omega}=\sum_n \frac{2\omega}{(2\pi nT)^2+\omega^2}$$

これは「虚時間法〜クライン・ゴルドン場〜」なんかで出てきた

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+(x/2\pi)^2}=\frac{2\pi^2}{x}(1+\frac{2}{e^x-1})$$

これと同じ格好をしているので

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\omega} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_n \frac{2\omega\beta^2}{n^2+(\beta\omega/2\pi)^2}\\ &= \frac{2\omega\beta^2}{(2\pi)^2}\frac{2\pi^2}{\beta\omega}(1+\frac{2}{e^{\beta\omega}-1})\\ &= \beta(1+\frac{2}{e^{\beta\omega}-1})\end{aligned}$$

となります。で、これを $\omega$ で積分すれば $I$ に戻るので

$$I=\beta(\omega+\frac{2}{\beta}\log[1-e^{-\beta\omega}])$$

不定積分なので定数項も出てきますが、寄与しないので必要ないです。というわけで、和を計算したものは

$$L(\sigma,T)=\frac{1}{2}T\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}I=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{\beta}\log[1-e^{-\beta\omega}])$$

$T\rightarrow 0$ で第二項は消えてくれるので、第一項が温度に依存しないゼロ温度項で、第二項が温度依存項です。有効ポテンシャルでもゼロ温度部分と有限温度部分がきれいに分離してくれます。

ここで、相変わらず三次元積分がまともに出来ないという状況になります。ゼロ温度項だけなら発散をどうにかすればいいという問題になるんですが、温度依存項である第二項がどうにもなりません。というわけで、高温の近似を取って計算していきます。ここからはゼロ温度項は必要ないので無視して、温度項 $L^T$ だけを扱います。

一番手っ取り早い方法が高温極限なので、これを使います。まともに高温極限を取る必要もないので、質量が 0 の極限を取ってしまいます。質量は $M^2$ なので、これらが 0 になるというようにして、テーラー展開を行うと、温度依存項は

$$\begin{aligned}\log(1-e^{-\beta\omega}) &= \log(1-e^{-\beta\omega})\big|_{M^2=0}+\frac{\partial}{\partial m^2}\log(1-e^{-\beta\omega})\big|_{M^2=0}M^2+\cdots\\ &= \log(1-e^{-\beta\omega})\big|_{M^2=0}+\frac{1}{2}\frac{\beta(\boldsymbol{p}^2+M^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta\omega}}{1-e^{-\beta\omega}}\big|_{M^2=0}M^2+\cdots\\ &= \log(1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|})+\frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\frac{\beta e^{-\beta|\boldsymbol{p}|}}{1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|}}M^2+\cdots\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
L^T &\simeq \frac{1}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}[\log(1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|})+\frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\frac{\beta e^{-\beta|\boldsymbol{p}|}}{1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|}}M^2] \\
&= \frac{1}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}[\log(1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|})+\frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\frac{\beta}{e^{\beta\boldsymbol{p}^2}+1}M^2]
\end{aligned}
$$

第一項の積分は「圧力への寄与」でやっていて

$$
\frac{1}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}[\log(1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|})=-\frac{\pi^2}{90\beta^4}
$$

第二項は統計力学でよく出てくる積分なので

$$
\frac{1}{2}\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{|\boldsymbol{p}|}{e^{\beta|\boldsymbol{p}|}-1}d|\boldsymbol{p}|=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{6}(\frac{\pi}{\beta})^2=\frac{1}{24\beta^2}
$$

となって

$$
L^T=-\frac{\pi^2}{90\beta^4}+\frac{M^2}{24\beta^2}
$$

よって、温度依存している有効ポテンシャル $V_1^T$ は $L^T(M^2=m_1^2)+L^T(M^2=m_2^2)$ なので

$$
V_1^T=-\frac{\pi^2T^4}{90}+\frac{m_1^2}{24}T^2-\frac{\pi^2T^4}{90}+\frac{m_2^2}{24}T^2=-\frac{\pi^2T^4}{45}+\frac{m_1^2+m_2^2}{24}T^2
$$

ここで、くり込まれた質量 $m_r$ に対する有効ポテンシャルのくり込み条件

$$
\frac{d^2V_{eff}(a)}{da^2}|_{a=0}=m_r^2
$$

を使います。ここでは質量にも温度が入ってくるはずなので

$$
\frac{d^2V_{eff}(\sigma,T)}{d\sigma^2}|_{\sigma=0}=m_r^2(T)
$$

となっているはずです。$m_1^2, m_2^2$ を $\sigma$ で微分すると

$$
\frac{d^2m_1^2}{d\sigma^2}\Big|_{\sigma=0}=6\lambda\ ,\ \frac{d^2m_2^2}{d\sigma^2}\Big|_{\sigma=0}=2\lambda
$$

なので

$$
\frac{d^2V_1^T}{d\sigma^2}\Big|_{\sigma=0}=\frac{6+2}{24}\lambda T^2=\frac{1}{3}\lambda T^2
$$

有効ポテンシャル全体では

$$
m^2(T)=\frac{d^2V_{eff}}{d\sigma^2}|_{\sigma=0}=\frac{d^2V_0}{d\sigma^2}|_{\sigma=0}+\frac{d^2V_1^T}{d\sigma^2}|_{\sigma=0}=\frac{d^2V_0}{d\sigma^2}|_{\sigma=0}+\frac{1}{3}\lambda T^2
$$

無視してきた $V_1$ でのゼロ温度項はくり込みによってきちんと処理されているとすれば、$V_0$ の 2 階微分はくり込まれた質量を返すはずなので

$$m_r^2(T) = m_r^2 + \frac{1}{3}\lambda T^2$$

となります。今の場合ラグランジアンの質量項の符号を反転させるために $-\mu^2$ を使っているので

$$m_r^2(T) = -\mu^2 + \frac{1}{3}\lambda T^2$$

この式の $T=0$ の場合では、質量が $-\mu^2$ だということを言っており、これはそのまま対称性が自発的に破れているということを表わします。

しかし、$T \neq 0$ ではこの状況が変わります。温度項である第二項は明らかに正の値を持つので、$T$ の値を増やしていけばどこかで $m^2(T)$ を正の値にすることができます。そして、質量が負でなく正の値を持つなら対称性を破ることができません。つまり、破られていた対称性が温度効果によって回復するという現象が起きます。これが有限温度での重要な性質で、ゼロ温度で破れている対称性が温度効果によって回復する、つまり相転移 (phase transition) を起こせます (破られている相から破られていない相への相転移)。今の場合 $T^2 = 3\mu^2/\lambda$ がその境界になっており、この温度のことを臨界温度 (critical temperature) と呼びます。同様に密度によっても対称性を回復させることができます。

この性質は温度・密度の極限状態である宇宙初期、高密度星なんかで重要な働きをします。例えば、高温でのクォーク・グルーオンプラズマなんかもこれの一種で、ハドロンの閉じ込め相 (カイラル対称性が破られている相) から閉じ込められていない相 (カイラル対称性が回復している相) への相転移によって起きるものだと考えられています。

補足をかなり大雑把にしておきます。ここでの話はゼロ温度と対応させるために有効ポテンシャルを使ってきましたが、有限温度ではもっと分かりやすい量を使うことが出来ます。有限温度で有効ポテンシャルを求めるには分配関数 $Z$ の対数を取った $\log Z$ が必要になりますが、これは熱力学ポテンシャル $V_{therm}$ にすることができて

$$V_{therm} = -\frac{T}{\Omega}\log Z$$

これの $\Omega$ は 3 次元空間体積です。この式は圧力 $P$ を使えば $V_{therm} = -P$ です。で、熱力学的平衡状態というのは熱力学ポテンシャルが極値を持った場所です。今の場合に合わせれば $V_{therm}(\sigma)$ で、

$$V_{therm}(\sigma) = V_0(\sigma) + V_1(\sigma, T)$$

と書けます。$V_1(\sigma, T)$ は上でのものと一緒です。古典的な段階での極値を求めてみます。使っているラグランジアンは (2) なので、$V_0$ は

$$V_0 = -\frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 + \frac{\lambda}{4}\sigma^4$$

これの $\sigma$ 微分による極値は

$$\begin{aligned} -\mu^2\sigma + \lambda\sigma^3 &= 0 \\ \sigma^2 &= \frac{\mu^2}{\lambda} \end{aligned}$$

これと $\sigma = 0$ となります。これは $\sigma^2 = 0$ が安定した場所ではなく、不安定な状態となっており、$\sigma^2 = \mu^2/\lambda$ が安定した場所になっています。で、これによって対称性は自発的に破れます。予想できるように、これに対して有限温度の $\hbar$ のオーダからの寄与を加えれば

$$\begin{aligned}
V_{therm}(\sigma) &= -\frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 + \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\pi^2 T^4}{45} + \frac{m_1^2 + m_2^2}{24}T^2 \\
&= -\frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 + \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\pi^2 T^4}{45} + \frac{-2\mu^2 + 4\lambda\sigma^2}{24}T^2 \\
&= (-\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{\lambda}{6}T^2)\sigma^2 + \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\pi^2 T^4}{45} - \frac{\mu^2}{12}T^2
\end{aligned}$$

これの極値を求めれば、$\sigma = 0$ と

$$\begin{aligned}
2(-\frac{1}{2}\mu^2 + \frac{\lambda}{6}T^2)\sigma + \lambda\sigma^3 &= 0 \\
(-\mu^2 + \frac{\lambda}{3}T^2) + \lambda\sigma^2 &= 0 \\
\sigma^2 &= \frac{1}{\lambda}(\mu^2 - \frac{\lambda}{3}T^2)
\end{aligned}$$

となっています。このとき

$$T^2 > \frac{3\mu^2}{\lambda}$$

であるなら、符号が反転するので $\sigma = 0$ が最小値になります。というわけで、同じ結果が求まります。

$\Omega$ を使う利点は、余計なことを考えずに圧力に対応させることができ、熱力学的な関係が見やすくなることです。例えば、このまま臨界温度の上と下での圧力を求めてやれば、相転移が二次相転移 (second order phase transition) であることが分かります。