線形応答理論

平衡な系に外から影響を与えてその反応を扱う方法を見ていきます。ここで見ていく久保公式による線形応答理論は相当広範囲に用いられている基本的なものなので知っておくといいです。前半の話で必要な知識は量子力学で十分です。有限温度の場の理論が絡んでくるのは後半です。
最初に一般的な話を見ていきます。平衡な状態の系に外場の効果を加えるんですが、外場の寄与は小さいとして摂動的に加えます。外場を加えた全ハミルトニアンは

$$H_T = H + H_{ex}(t)$$

H は時間に依存しない平衡系でのハミルトニアン、$H_{ex}(t)$ は外場のハミルトニアンで時間依存させています。元のハミルトニアンに対するシュレーディンガー方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{1}$$

ある時刻 t_0 で外場を加えた時のシュレーディンガー方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = (H + H_{ex}(t))|\Psi(t)\rangle = H_T|\Psi(t)\rangle \tag{2}$$

$|\Psi(t)\rangle$ は全ハミルトニアンに対する状態ベクトルです。この式は $t > t_0$ でのもので、$t < t_0$ では外場はないので (1) に戻ります。状態ベクトルはシュレーディンガー描像です。そして、この外場の影響によって $t > t_0$ は非平衡な系となっています。
外場を加えていないシュレーディンガー方程式 (1) の解は、単純に

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(t=0)\rangle$$

で与えられます。これを踏まえて全ハミルトニアンに対するシュレーディンガー方程式 (2) の解を

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}U(t)|\psi(t=0)\rangle$$

のように演算子 $U(t)$ を使うことで書けるのだとします。これを (2) に入れれば

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iHt}U(t)|\psi(t=0)\rangle &= H_Te^{-iHt}U|\psi(t=0)\rangle \\
He^{-iHt}U(t)|\psi(t=0)\rangle + ie^{-iHt}\frac{\partial U(t)}{\partial t}|\psi(t=0)\rangle &= H_Te^{-iHt}U|\psi(t=0)\rangle \\
ie^{-iHt}\frac{\partial U(t)}{\partial t}|\psi(t=0)\rangle &= (H_T - H)e^{-iHt}U(t)|\psi(t=0)\rangle \\
i\frac{\partial U(t)}{\partial t}|\psi(t=0)\rangle &= e^{iHt}(H_T - H)e^{-iHt}U(t)|\psi(t=0)\rangle \\
i\frac{\partial U(t)}{\partial t} &= e^{iHt}H_{ex}(t)e^{-iHt}U(t) \\
&= H'_{ex}(t)U(t) \qquad (H'_{ex}(t) = e^{iHt}H_{ex}(t)e^{-iHt})
\end{aligned}$$

このような $U(t)$ に対する方程式が導けます。$H'_{ex}(t)$ は形を見て分かるように元のハミルトニアン H によるハイゼンベルグ描像です (ハミルトニアンの H がいて紛らわしいので、ハイゼンベルグ描像の演算子には $'$ をつけて区別します)。で、この方程式の形というのは場の量子論の「相互作用描像と時間発展演算子」で出てきた方程式と同じです。なので、初期条件として

$$U(t)=1 \quad (t<t_0)$$

というのを使えば

$$U(t)=1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H'_{ex}(t_1)+(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2H'_{ex}(t_1)H'_{ex}(t_2)+\cdots$$

このときに、外場に対して一次のオーダまでを扱うことにして

$$U(t)=1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H'_{ex}(t_1)$$

とします。これによって全ハミルトニアンに対する状態ベクトルは

$$|\Psi(t)\rangle=e^{-iHt}|\psi(t=0)\rangle-ie^{-iHt}\int_{t_0}^{t}dt_1H'_{ex}(t_1)|\psi(t=0)\rangle$$

今知りたいのは外場も含めた全ハミルトニアンによる系なので、必要なものは状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle$ による演算子 $O(t)$ の平均です (シュレーディンガー描像)。これは

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi(t)|O(t)|\Psi(t)\rangle\\
&=\langle\psi(t=0)|(1+i\int_{t_0}^{t}dt_1H'_{ex}(t_1))e^{iHt}O(t)e^{-iHt}(1-i\int_{t_0}^{t}dt_1H'_{ex}(t_1))|\psi(t=0)\rangle\\
&=\langle\psi(t=0)|O'(t)|\psi(t=0)\rangle\\
&\quad+\langle\psi(t=0)|(i\int_{t_0}^{t}dt_1H'_{ex}(t_1)O'(t)-i\int_{t_0}^{t}dt_1O'(t)H'_{ex}(t_1))|\psi(t=0)\rangle+\cdots \quad (O'(t)=e^{iHt}O(t)e^{-iHt})\\
&=\langle\psi(t=0)|O'(t)|\psi(t=0)\rangle+i\langle\psi(t=0)|\int_{t_0}^{t}dt_1[H'_{ex}(t_1),O'(t)]|\psi(t=0)\rangle+\cdots
\end{aligned}\tag{3}$$

演算子 $O(t)$ の外場のない元のハミルトニアンでの平均と外場があるときの平均の差 $\delta\langle\Psi(t)|O(t)|\Psi(t)\rangle$ は

$$\delta\langle\Psi(t)|O(t)|\Psi(t)\rangle=\langle\Psi(t)|O(t)|\Psi(t)\rangle-\langle\psi(t)|O(t)|\psi(t)\rangle$$

(3) とシュレーディンガー描像とハイゼンベルグ描像の関係

$$|\psi_S(t)\rangle=e^{-iH(t-t_0)}|\psi_H(t_0)\rangle$$

を使うことで

$$\begin{aligned}
\delta\langle\Psi(t)|O(t)|\Psi(t)\rangle &= \langle\Psi(t)|O(t)|\Psi(t) - \langle\psi(t=0)|e^{iHt}O(t)e^{-iHt}|\psi(t=0)\rangle \\
&= \langle\Psi(t)|O(t)|\Psi(t)\rangle - \langle\psi(t=0)|O'(t)|\psi(t=0)\rangle \\
&= i\langle\psi(t=0)|\int_{t_0}^{t} dt_1[H'_{ex}(t_1), O'(t)]|\psi(t=0)\rangle \qquad (4)
\end{aligned}$$

このように、外場が弱いとして一次のオーダまでその寄与を見ようというのが線形応答理論 (linear response theory) です (もしくは久保理論と呼ばれます)。ちなみに、シュレーディンガー描像 $|\psi_S(t)\rangle$ とハイゼンベルグ描像 $|\psi_H(t=0)\rangle$ での状態ベクトルは

$$|\psi_S(t=0)\rangle = |\psi_H(t=0)\rangle$$

なので、(4) の式は外場のない元のハミルトニアン H によるハイゼンベルグ描像による表現となっています。
これは量子力学の段階なので、統計力学にもっていきます。元のハミルトニアン H による系での熱的平均を $\langle O\rangle$ のように書くことにすれば、(3) の (グランド) カノニカルアンサンブルでの熱的平均は

$$\delta\langle O(t)\rangle = \frac{\sum_i e^{-\beta H_i}\delta\langle i|O(t)|i\rangle}{\sum_j e^{-\beta H_j}}$$

$|i\rangle$ は H の固有状態で、系の粒子数が保存しているなら H はグランドカノニカルでのものが使えます。
密度行列 ρ を使うと

$$\begin{aligned}
\delta\langle O(t)\rangle &= \mathrm{tr}(\rho\delta\langle i|O(t)|i\rangle) \\
&= i\int_{t_0}^{t} dt_1\mathrm{tr}\big(\rho[H'_{ex}(t_1), O'(t)]\big) \qquad (5)
\end{aligned}$$

ここまで見てきた線形応答理論での重要な性質は、外場を加えられた非平衡な系を記述するのに平衡系での量だけが用いられているという点です。そして、これは裏を返せば非平衡系における相互作用のような影響は摂動の二次のオーダから効いてくるということです。このように線形応答理論は非平衡系を扱うための簡単な方法となっています。
簡単な例として、$t=t_0$ での外場の影響を

$$H_{ex}(t) = \int d^3x J(t,\boldsymbol{x})\phi(t,\boldsymbol{x})$$

このような形で考えます。$\phi(\boldsymbol{x},t)$ は実数スカラー場での場の演算子で、外場の源 J と結合させています。J はただのスカラー量 (c 数) です。そして、場の演算子の熱平均を見たいので、$O(t)$ を $\phi(\boldsymbol{x},t)$ に変えます。そうすると J はスカラー量であることから

$$\begin{aligned}
\delta\langle\phi(t,\boldsymbol{x})\rangle &= i\int_{t_0}^{t} dt_1\mathrm{tr}\big(\rho\int d^3x_1[J(t_1,\boldsymbol{x}_1)\phi'(t_1,\boldsymbol{x}_1), \phi'(t,\boldsymbol{x})]\big) \\
&= -i\int_{t_0}^{t} dt_1\int d^3x_1 J(t_1,\boldsymbol{x}_1)\mathrm{tr}\big(\rho[\phi'(t,\boldsymbol{x}), \phi'(t_1,\boldsymbol{x}_1)]\big) \qquad (6)
\end{aligned}$$

で、ここで気づくのはトレース部分が 2 点相関関数の定義そのままの形をしているということです。実時間での 2 点相関関数は時間順序積 T によって

$$D(t,\boldsymbol{x};t_1,\boldsymbol{x}_1)=\mathrm{tr}[\rho T(\phi'(t,\boldsymbol{x})\phi'(t_1,\boldsymbol{x}_1)]$$

であり、遅延グリーン関数を

$$\begin{aligned}D_R(t,\boldsymbol{x};t_1,\boldsymbol{x}_1) &= i\theta(t-t_1)(D^{>}(x,x_1)-D^{<}(x,x_1))\\ &= i\theta(t-t_1)\mathrm{tr}\big(\rho[\phi'(t,\boldsymbol{x}),\phi'(t_1,\boldsymbol{x}_1)]\big)\end{aligned}$$

このように定義するなら、(6) は遅延グリーン関数 D_R によって

$$\begin{aligned}\delta\langle\phi(t,\boldsymbol{x})\rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int d^3x_1 D_R(t,\boldsymbol{x};t_1,\boldsymbol{x}_1)J(t_1,\boldsymbol{x}_1)\\ &= -\int d^4x_1 D_R(t,\boldsymbol{x};t_1,\boldsymbol{x}_1)J(t_1,\boldsymbol{x}_1)\end{aligned} \tag{7}$$

t_1 は t よりも小さいということを遅延グリーン関数の階段関数によって制限することができるので上限を $+\infty$ にとり、下限は t_0 を $-\infty$ まで取っています。
運動量表示に持っていきます。外場を加えていますが、元のハミルトニアン H によって発展しているので、空間的な一様性は保たれていると考えてしまえます。なので、遅延グリーン関数は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1, t-t_1$ に依存するために通常のフーリエ変換が行えます。というわけで

$$D_R(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-x_1)}D_R(p_0,\boldsymbol{p})$$

$$J(t_1,\boldsymbol{x}_1)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iqx_1}J(q_0,\boldsymbol{q})$$

これらを (7) に入れれば

$$\begin{aligned}\delta\langle\phi(t,\boldsymbol{x})\rangle &= -\int d^4x_1\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iqx_1}e^{-ip(x-x_1)}J(q_0,\boldsymbol{q})D_R(p_0,\boldsymbol{p})\\ &= -\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(p-q)e^{-ipx}J(q_0,\boldsymbol{q})D_R(p_0,\boldsymbol{p})\\ &= -\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}J(p_0,\boldsymbol{p})D_R(p_0,\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

右辺は運動量に対する変換の形をしているので、$\delta\langle\phi(t,\boldsymbol{x})\rangle$ の運動量表示は

$$\delta\langle\phi(p_0,\boldsymbol{p})\rangle=-J(p_0,\boldsymbol{p})D_R(p_0,\boldsymbol{p})$$

という簡単な形に落ち着きます。よって、外場の影響による熱的平均の変化は運動量空間において、外場の源と遅延グリーン関数を掛けたものになるというすっきりした結果が導かれたことになります。この遅延グリーン関数の違いが、相対論的と非相対論的での違いになります。

ここまでが、線形応答理論での基本的な話です。ここから、電磁場を使って具体的に見ていきます。
通常の QED に対して外場として、古典的で静的な電場を加えます。電磁場に対するハミルトニアンは

$$H_0 = \int d^3x \frac{1}{2}[\boldsymbol{E}^2(t, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}^2(t, \boldsymbol{x})]$$

$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は 3 次元の電場と磁場で、演算子です。で、これに外場によるハミルトニアンとして

$$H_{ex} = \int d^3x [\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{c2}(\boldsymbol{x})]$$

というのを加えます。$\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{x})$ が古典的な電場で、これだけが時間依存していないようにします。外場をこのように加えるのは、元の電磁場のハミルトニアンと足せば

$$H = \int d^3x [\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^c + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{c2}] = \int d^3x [\frac{1}{2}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^c)^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2]$$

のように、元の電場に外場がくっついたような形になるからです。(5) に今の状況を適用すれば $(i, j = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}
\delta\langle E_i(t)\rangle &= i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x \mathrm{tr}\big(\rho[\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^c + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{c2}, E_i]\big)\theta(t - t_1) \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 \mathrm{tr}\big(\rho[E_j(t_1, \boldsymbol{x}_1) \cdot E_j^c(\boldsymbol{x}_1) + \frac{1}{2}(E_j^c)^2(\boldsymbol{x}_1), E_i(t, \boldsymbol{x})]\big)\theta(t - t_1) \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 \mathrm{tr}\big(\rho([E_j(t_1, \boldsymbol{x}_1) \cdot E_j^c(\boldsymbol{x}_1), E_i(t, \boldsymbol{x})] + [\frac{1}{2}(E_j^c)^2(\boldsymbol{x}_1), E_i(t, \boldsymbol{x})])\big)\theta(t - t_1) \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 E_j^c(\boldsymbol{x}_1) \mathrm{tr}\big(\rho[E_j(t_1, \boldsymbol{x}_1), E_i(t, \boldsymbol{x})]\big)\theta(t - t_1) \\
&= -i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 E_j^c(\boldsymbol{x}_1) \mathrm{tr}\big(\rho[E_i(t, \boldsymbol{x}), E_j(t_1, \boldsymbol{x}_1)]\big)\theta(t - t_1)
\end{aligned}$$

階段関数は t_1 の範囲を無限大まで持っていっているのでつけています。最後にいくときに第二項が消えているのは E_j^c が古典的な量なので交換関係によって消えるからです。次に電磁場の遅延グリーン関数を使った形に変えます。そのためにはベクトルポテンシャル A_μ による

$$D^R_{\mu\nu}(t - t_1, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) = i\theta(t - t_1)\mathrm{tr}(\rho[A_\mu(t, \boldsymbol{x}), A_\nu(t_1, \boldsymbol{x}_1)])$$

これが必要です。なので、$[E_j(t_1, \boldsymbol{x}_1), E_i(t, \boldsymbol{x})]$ を A_μ を使った形に変えます。電場 E_i とベクトルポテンシャル A_μ との関係は

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

から求められます。電場 E_i は F_{0i} なので

$$E_i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$$

これを使って交換関係を計算すれば (熱的平均の部分を $\langle\ \rangle$ で書き、$\boldsymbol{x}_1, t_1$ の微分には $'$ をつけます)

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\big(\rho[E_i(t,\boldsymbol{x}), E_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)]\big)\theta(t-t_1) &= \langle[E_i(t,\boldsymbol{x}), E_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)]\rangle\theta(t-t_1) \\
&= \langle[\partial_0 A_i - \partial_i A_0, \partial'_0 A_j - \partial'_j A_0]\rangle\theta(t-t_1) \\
&= \langle[\partial_0 A_i - \partial_i A_0, \partial'_0 A_j] - [\partial_0 A_i - \partial_i A_0, \partial'_j A_0]\rangle\theta(t-t_1) \\
&= \langle[\partial_0 A_i, \partial'_0 A_j] - [\partial_i A_0, \partial'_0 A_j] - [\partial_0 A_i, \partial'_j A_0] + [\partial_i A_0, \partial'_j A_0]\rangle\theta(t-t_1)
\end{aligned}$$

そして、電磁場における正準交換関係の空間成分は

$$[A_i(\boldsymbol{x},t), \frac{\partial A_j}{\partial t}(\boldsymbol{x}',t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

このようになっており、第一項部分の時間微分が階段関数に掛かることで $\delta(t-t_1)$ が現われるので、この交換関係が使え

$$\begin{aligned}
&\langle[E_i(t,\boldsymbol{x}), E_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)]\rangle\theta(t-t_1) \\
&=\partial_0\partial'_0\big(\langle[A_i, A_j]\rangle\theta(t-t_1)\big) - \langle[A_i, \partial'_0 A_j]\rangle\partial_0\theta(t-t_1) - \partial_i\partial'_0\big([A_0, A_j]\rangle\theta(t-t_1)\big) \\
&\quad - \partial'_j\partial_0\big(\langle[A_i, A_0]\rangle\theta(t-t_1)\big) + \partial_i\partial'_j\big(\langle[A_0, A_0]\rangle\theta(t-t_1)\big) \\
&=\partial_0\partial'_0\big(\langle[A_i, A_j]\rangle\theta(t-t_1)\big) - i\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t_1) - \partial_i\partial'_0\big([A_0, A_j]\rangle\theta(t-t_1)\big) \\
&\quad - \partial'_j\partial_0\big(\langle[A_i, A_0]\rangle\theta(t-t_1)\big) + \partial_i\partial'_j\big(\langle[A_0, A_0]\rangle\theta(t-t_1)\big)
\end{aligned}$$

これに $D^R_{\mu\nu}$ を入れれば

$$\begin{aligned}
&i\langle[E_i(t,\boldsymbol{x}), E_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)]\rangle\theta(t-t_1) \\
&=\partial_0\partial'_0 D^R_{ij}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - \partial_i\partial'_0 D^R_{0j}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - \partial'_j\partial_0 D^R_{i0}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) \\
&\quad + \partial_i\partial'_j D^R_{00}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) + \delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\delta(t-t_1)
\end{aligned}$$

となるので、$\delta\langle E_i(t)\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\delta\langle E_i(t)\rangle =& -\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 E_j^c(\boldsymbol{x}_1)\big[\partial_0\partial'_0 D^R_{ij}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - \partial_i\partial'_0 D^R_{0j}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) \\
& - \partial'_j\partial_0 D^R_{i0}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) + \partial_i\partial'_j D^R_{00}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) + \delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t_1)\big] \\
=& -\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 E_j^c(\boldsymbol{x}_1)\big[\partial_0\partial'_0 D^R_{ij}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - \partial_i\partial'_0 D^R_{0j}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) \\
& - \partial'_j\partial_0 D^R_{i0}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) + \partial_i\partial'_j D^R_{00}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\big] - \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 E_j^c(\boldsymbol{x}_1)\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t_1) \\
=& -\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3x_1 E_j^c(\boldsymbol{x}_1)\big[\partial_0\partial'_0 D^R_{ij}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - \partial_i\partial'_0 D^R_{0j}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) \\
& - \partial'_j\partial_0 D^R_{i0}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) + \partial_i\partial'_j D^R_{00}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\big] - E_i^c(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

これで外場がかかったときの変化がわかったので全体の電場がどうなっているのかが分かります。外場のない元の電場は古典的な電場なので、E_i^c を使ってしまえばいいです。というわけで、全体での電場は

$$
\begin{aligned}
E_i^{net}(t,\boldsymbol{x}) =& E_i^c(\boldsymbol{x}) + \delta\langle E_i(t,\boldsymbol{x})\rangle \\
=& -\int d^4x_1 E_j^c(\boldsymbol{x}_1)[\partial_0\partial'_0 D^R_{ij}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - \partial_i\partial'_0 D^R_{0j}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) \\
& - \partial'_j\partial_0 D^R_{i0}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) + \partial_i\partial'_j D^R_{00}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)]
\end{aligned}
$$

よく外場込みの電場を net electric field と呼んだりするので net(正味とか訳されます) と付けています。
運動量空間へのフーリエ変換は

$$
D^R_{\mu\nu}(t-t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x_1)} D^R_{\mu\nu}(p_0,\boldsymbol{p})
$$

$$
E_i^c(\boldsymbol{x}_1) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1} E_i^c(\boldsymbol{q})
$$

なので

$$E_i^{net}(t,\boldsymbol{x}) = -\int d^4x_1 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1} E_j^c(\boldsymbol{q})$$

$$\times \big[\partial_0\partial_0' D_{ij}^R(p_0,\boldsymbol{p}) - \partial_i\partial_0' D_{0j}^R(p_0,\boldsymbol{p}) - \partial_j'\partial_0 D_{i0}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + \partial_i\partial_j' D_{00}^R(p_0,\boldsymbol{p})\big] e^{-ip(x-x_1)}$$

$$= -\int d^4x_1 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1} E_j^c(\boldsymbol{q})$$

$$\times \big[\partial_0\partial_0' D_{ij}^R(p_0,\boldsymbol{p}) - \partial_i\partial_0' D_{0j}^R(p_0,\boldsymbol{p}) - \partial_j'\partial_0 D_{i0}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + \partial_i\partial_j' D_{00}^R(p_0,\boldsymbol{p})\big] e^{-ip(x-x_1)}$$

$$= -\int d^4x_1 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1} e^{-ip(x-x_1)} E_j^c(\boldsymbol{q})$$

$$\times \big[-ip_0ip_0 D_{ij}^R(p_0,\boldsymbol{p}) - (ip_i)(ip_0) D_{0j}^R(p_0,\boldsymbol{p}) - (-ip_j)(-ip_0) D_{i0}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + (-ip_i)(ip_j) D_{00}^R(p_0,\boldsymbol{p})\big]$$

$$= -\int d^4x_1 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}_1 - ip_0(t-t_1) + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}] E_j^c(\boldsymbol{q})$$

$$\times \big[p_0^2 D_{ij}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + p_ip_0 D_{0j}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + p_jp_0 D_{i0}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + p_ip_j D_{00}^R(p_0,\boldsymbol{p})\big]$$

$$= -\int dt_1 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}) e^{-ip_0(t-t_1)} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} E_j^c(\boldsymbol{q})$$

$$\times \big[p_0^2 D_{ij}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + p_ip_0 D_{0j}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + p_jp_0 D_{i0}^R(p_0,\boldsymbol{p}) + p_ip_j D_{00}^R(p_0,\boldsymbol{p})\big]$$

$$= -\int dt_1 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t-t_1)} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} E_j^c(\boldsymbol{q})$$

$$\times \big[p_0^2 D_{ij}^R(p_0,\boldsymbol{q}) + q_ip_0 D_{0j}^R(p_0,\boldsymbol{q}) + q_jp_0 D_{i0}^R(p_0,\boldsymbol{q}) + q_iq_j D_{00}^R(p_0,\boldsymbol{q})\big]$$

というわけで、生き残っている t_1, p_0 積分と $e^{-ip_0(t-t_1)}$ から、$p_0 = 0$ という状況になるので (p_0 と q がいて紛らわしいので p_0 を ω にします)

$$E_i^{net}(t,\boldsymbol{x}) = -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} E_j^c(\boldsymbol{q})\big[\omega^2 D_{ij}^R(\omega,\boldsymbol{q}) + q_i\omega D_{0j}^R(\omega,\boldsymbol{q}) + q_j\omega D_{i0}^R(\omega,\boldsymbol{q}) + q_iq_j D_{00}^R(\omega,\boldsymbol{q})\big]\big|_{\omega=0}$$

となります。$\omega = 0$ となっているのは静的な場であるということを受けた結果です。で、$D_{\mu\nu}^R$ の中の ω がどのようになっているのか分からないので、$\omega = 0$ とはまだしていません。

ちょっと話を飛ばして光子の遅延グリーン関数 $D_{\mu\nu}^R$ の一般的な形を与えてしまいます。有限温度での温度グリーン関数 $D_{\mu\nu}$ の一般形はゼロ温度での伝播関数の一般形とは異なった形を持ちます。それは、

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{G-k^2}P_{\mu\nu}^T + \frac{1}{F-k^2}P_{\mu\nu}^L + \frac{\alpha}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

という形です。G, F は $k_0 = i\omega_n, |\boldsymbol{k}|$ によるスカラー関数、$P_{\mu\nu}^T, P_{\mu\nu}^L$ は横偏極、縦偏極の射影演算子で

$$P_{00}^T = P_{0i}^T = P_{i0}^T = 0$$

$$P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}$$

$$P^L_{\mu\nu}=\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}-g_{\mu\nu}-P^T_{\mu\nu}$$

このように一段複雑になるのは熱浴がいるために、熱浴の静止系を特別に作らなければいけないからです (「虚時間法」の最後にふれたように、熱浴の 4 元速度を $v_\mu=(1,0,0,0)$)。ゼロ温度でなら余計なことを気にせずにローレンツ共変性があり、そのために $F=G$ となっていて

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu} &= \frac{1}{G-k^2}(P^T_{\mu\nu}+P^L_{\mu\nu})+\frac{\alpha}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\
&= \frac{1}{k^2-G}(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2})+\frac{\alpha}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\
&\to_{G=0} \frac{1}{k^2}(g_{\mu\nu}+(\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2})
\end{aligned}$$

これは有限温度での相互作用のない時の光子の伝播関数ですので、巻き戻せばゼロ温度での伝播関数になりますし、G は真空偏極に当たるのでゼロ温度での摂動計算で求められた格好になっています。$D^R_{\mu\nu}$ はこの $D_{\mu\nu}$ の k_0 を

$$D^R_{\mu\nu}=D_{\mu\nu}(k_0=i\omega_n\ \to\ \omega+i\epsilon)|_{\epsilon\to 0}$$

このように解析接続することで求められます (「有限温度のグリーン関数」参照)。しかも、今使っている形式はミンコフスキー空間でのものなので、単に k_0 が ω になるのだと思ってしまえばいいです (符号や記号は何も変更されない)。
注意を一つ言っておきます。ここで必要になっているのは実時間 (エネルギー) によって定義される遅延グリーン関数です。それに対して虚時間法から求められる伝播関数 (温度グリーン関数) は虚時間 (エネルギー成分が松原振動数) によって定義されています。つまり、虚時間法からの結果を線形応答理論に適用させるためには実時間への解析接続が必須になっています。こんな事情が、虚時間法での扱いは平衡系が主で、非平衡系での扱いに向いていない理由です。
遅延グリーン関数にこの形を入れることで

$$\begin{aligned}
&\omega^2D^R_{ij}(\omega,\boldsymbol{q})+q_i\omega D^R_{0j}(\omega,\boldsymbol{q})+q_j\omega D^R_{i0}(\omega,\boldsymbol{q})+q_iq_jD^R_{00}(\omega,\boldsymbol{q})\\
&=\omega^2\big(\frac{1}{G-q^2}P^T_{ij}+\frac{1}{F-q^2}P^L_{ij}+\frac{\alpha}{q^2}\frac{q_iq_j}{q^2}\big)+q_i\omega\big(\frac{1}{G-q^2}P^T_{0j}+\frac{1}{F-q^2}P^L_{0j}+\frac{\alpha}{q^2}\frac{\omega q_j}{q^2}\big)\\
&\quad+q_j\omega\big(\frac{1}{G-q^2}P^T_{i0}+\frac{1}{F-q^2}P^L_{i0}+\frac{\alpha}{q^2}\frac{q_i\omega}{q^2}\big)+q_iq_j\big(\frac{1}{G-q^2}P^T_{00}+\frac{1}{F-q^2}P^L_{00}+\frac{\alpha}{q^2}\frac{\omega^2}{q^2}\big)
\end{aligned}$$

ゲージパラメータ α の部分は明らかに $\omega=0$ で落ちるので消してしまいます。この段階で $\omega=0$ で生き残る部分は大体予想できるんですが、射影演算子部分も展開して

$$
\begin{aligned}
&\omega^2 D^R_{ij}(\omega,\boldsymbol{q}) + q_i\omega D^R_{0j}(\omega,\boldsymbol{q}) + q_j\omega D^R_{i0}(\omega,\boldsymbol{q}) + q_i q_j D^R_{00}(\omega,\boldsymbol{q}) \\
=&\omega^2\big(\frac{1}{G-q^2}P^T_{ij} + \frac{1}{F-q^2}P^L_{ij}\big) + q_i\omega\frac{1}{F-q^2}P^L_{0j} + q_j\omega\frac{1}{F-q^2}P^L_{i0} + q_i q_j\frac{1}{F-q^2}P^L_{00} \\
=&\omega^2\big(\frac{1}{G-q^2}(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\boldsymbol{q}^2}) + \frac{1}{F-q^2}(\frac{q_i q_j}{q^2} - g_{ij} - P^T_{ij})\big) + q_i\omega\frac{1}{F-q^2}\frac{\omega q_j}{q^2} \\
&+ q_j\omega\frac{1}{F-q^2}\frac{q_i\omega}{q^2} + q_i q_j\frac{1}{F-q^2}\big(\frac{\omega^2}{q^2} - 1\big)
\end{aligned}
$$

なので、結局生き残るのは最後の部分だけで

$$
\begin{aligned}
E^{net}_i(t,\boldsymbol{x}) &= -\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}E^c_j(\boldsymbol{q})\big[\omega^2 D^R_{ij}(\omega,\boldsymbol{q}) + q_i\omega D^R_{0j}(\omega,\boldsymbol{q}) + q_j\omega D^R_{i0}(\omega,\boldsymbol{q}) + q_i q_j D^R_{00}(\omega,\boldsymbol{q})\big]\big|_{\omega=0} \\
&= \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}E^c_j(\boldsymbol{q})\frac{q_i q_j}{F-\omega^2+\boldsymbol{q}^2}\big|_{\omega=0} \\
&= \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}E^c_j(\boldsymbol{q})\frac{q_i q_j}{F(\omega=0,\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}^2}
\end{aligned}
$$

$E^{net}_i(t,\boldsymbol{x})$ を運動量表示にすれば

$$
E^{net}_i(\boldsymbol{q}) = \frac{q_i q_j E^c_j(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2 + F(\omega=0,\boldsymbol{q})} \tag{8}
$$

$F(\omega=0,\boldsymbol{q})$ というのは明らかに電荷との相互作用によって現われるものなので、相互作用がないと思えば $F=0$ となり

$$
E^{net}_i(\boldsymbol{q}) = \frac{q_i q_j E^c_j(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2}
$$

さらに、電場に対して回転不変性があるのだと要求すれば $q_j E^c_j(\boldsymbol{q})$ が

$$
E^{net}_i(\boldsymbol{q}) = \frac{q_i|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{q})|}{\boldsymbol{q}^2} = |\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{q})|\frac{q_i}{|\boldsymbol{q}|} = E^c_i(\boldsymbol{q})
$$

となるので ($q_i/|\boldsymbol{q}|$ は単位ベクトル)、明らかに、$E^{net}_i(\boldsymbol{q})$ が回転不変だと要求されたときの形に帰着します。で、これと (8) をくっつけると

$$
\begin{aligned}
E^{net}_i(\boldsymbol{q}) = \frac{q_i q_j E^c_j(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2 + F(\omega=0,\boldsymbol{q})} &= \frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\frac{q_i q_j E^c_j(\boldsymbol{q})}{1+F(\omega=0,\boldsymbol{q})/\boldsymbol{q}^2} \\
&= \frac{q_i q_j E^c_j(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2}\frac{1}{h} \qquad (h = 1 + \frac{F(\omega=0,\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2}) \\
&= \frac{E^c_i(\boldsymbol{q})}{h}
\end{aligned}
$$

となって、古典的な場に $F(\omega=0,\boldsymbol{q})$ による補正がかかった形になります。
ここで $F(0,\boldsymbol{q})$ の意味が分かりやすいように、ポテンシャルの形を求めます。そのために、電磁気の知識を使います。E_i^c はただの古典的な電場なので、マクスウェル方程式の一つ (ガウスの法則) である

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=Q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)$$

を使います (Q は位置 $\boldsymbol{x}_1$ にいる点電荷)。これと電場のフーリエ変換

$$\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{x})=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{q})$$

を合わせる事で $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$ は

$$i\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{q})=Q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)$$

このことによって、古典的な電場は電荷によって

$$\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{q})=-i\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q}^2}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1}Q$$

というように表現できることが分かります。この結果を (8) に入れると

$$E_i^{net}(\boldsymbol{q})=\frac{q_i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E}^c(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2+F(0,\boldsymbol{q})}=-i\frac{q_iQ}{\boldsymbol{q}^2+F(0,\boldsymbol{q})}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1}\tag{9}$$

さらに、静電ポテンシャルと電場の関係

$$\boldsymbol{E}^{net}=-\nabla V$$

これをフーリエ変換すれば

$$\boldsymbol{E}^{net}(\boldsymbol{q})=-i\boldsymbol{q}V(\boldsymbol{q})$$

となるので、(9) はポテンシャルの式として

$$V(\boldsymbol{q})=\frac{Q}{\boldsymbol{q}^2+F(0,\boldsymbol{q})}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1}$$

となります。位置表示に戻すために、フーリエ変換すれば

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x})&=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{Q}{\boldsymbol{q}^2+F(0,\boldsymbol{q})}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}_1}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\\&=Q\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\boldsymbol{q}^2+F(0,\boldsymbol{q})}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x})}\end{aligned}$$

電荷の位置を原点に取れば、静電ポテンシャルは

$$V(\boldsymbol{x}) = Q\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\boldsymbol{q}^2 + F(0,\boldsymbol{q})}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}$$

これは物性やプラズマ物理をやっている人ならすぐ分かるように、$F(0,\boldsymbol{q})$ が電荷の遮蔽を表わしています。つまり、$F(0,\boldsymbol{q})$ がデバイ質量 (Debye mass) に対応するように現われています。しかし、ここでの $F(0,\boldsymbol{q})$ プラズマ物理と違う構成になっています。予想できていると思いますが、$F(0,\boldsymbol{q})$ の中にはゼロ温度の場合での光子の真空偏極が含まれています。つまり、何もしなければ発散している量で、発散の除去のために電荷はゼロ温度の場の量子論の性質としてくり込まれます。で、そこに有限温度での真空偏極の図を計算した時に現われる温度依存部分がさらに加わります。これが熱浴からの寄与で、集団的な振る舞いとして新しく現われる現象です。
つまり、真空からの寄与 (ゼロ温度の真空偏極) とプラズマ的な遮蔽効果の両方を、有限温度での線形応答理論は導きます。この二つの寄与は ($F(0,\boldsymbol{q})$ の中にいるゼロ温度部分 $F_{T=0}(0,\boldsymbol{q})$ と有限温度部分 $F_T(0,\boldsymbol{q})$ の寄与)、近距離 $\boldsymbol{q} \ll T$ においては $F_{T=0}(0,\boldsymbol{q})$、遠距離 $\boldsymbol{q} \gg T$ では $F_T(0,\boldsymbol{q})$ の寄与が効いてきます。
もっと分かりやすくするために、$F_{T=0}(0,\boldsymbol{q})$ は無視し、通常のデバイ質量の定義に対応させるために $F_T(0,\boldsymbol{q}\to 0)$ の極限にもっていきます。そうすると $\boldsymbol{q}$ 積分を実行できて (場の量子論での「湯川理論」の最後の方と全く同じなので計算は省きます)

$$V(\boldsymbol{x}) = Q\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\boldsymbol{q}^2 + F_T(0,\boldsymbol{q}\to 0)}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{Q}{4\pi r}e^{-F_T(0,\boldsymbol{q}\to 0)r} \qquad (r = |\boldsymbol{x}|)$$

つまり、デバイ質量 $F_T(0,\boldsymbol{q}\to 0)$ の逆数 $r_D = F_T^{-1}(0,\boldsymbol{q}\to 0)$ はデバイ長 (Debye length) に対応しており、電荷 Q が作るポテンシャルは遮蔽されていることが明確に分かります。
このように、状況と現象がプラズマと似ているために有限温度の場の理論における QED は QED プラズマと呼ばれたりします。