

## 圧力への寄与

$\phi^4$  理論での  $\log Z$  の摂動計算ができたところで、そこから圧力にどのように寄与を与えるのかを見ます。また、有限温度での典型的な積分を高温極限 (超相対論的極限) で行う方法も最後に触れます。

表記の注意ですが、他のところでもそうしているように、 $p^n$  と何も言わずに書いている時は  $|p|^n$  のことです。ここでは、リーマンのゼータ関数、ガンマ関数、ディガンマ関数といった特殊関数が出てきますが、細かい定義には触れずに結果だけを使っています。

圧力  $P$  は分配関数によって

$$P = T \frac{\partial \log Z}{\partial V}$$

で求められます。

相互作用なしでの  $\log Z_0$  は

$$\log Z_0 = -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \frac{\beta \omega_{\mathbf{p}}}{2} + \log(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{p}}}) \right) \quad (\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$$

これに  $\lambda$  が一次のオーダーの寄与を加えます。で、それは

$$\log Z_1 = -3\lambda\beta V \left( \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \right)^2$$

そうすると、圧力は

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial V} = -\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \frac{\beta \omega_{\mathbf{p}}}{2} + \log(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{p}}}) \right) - 3\lambda \left( \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \right)^2$$

となります。後は第一項では三次元運動量積分、第二項では和と三次元運動量積分を実行してしまえばいいです。第一項から計算します。第一項での  $\beta \omega_{\mathbf{p}}/2$  は真空からの寄与なので無視して

$$\begin{aligned} P_0 &= -\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{p}}}) \\ &= -\frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^2 \log(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{p}}}) \end{aligned} \quad (1)$$

この時点で積分が厳密にできなくなります。というわけで、 $m = 0$  だとします (もしくは後で見ると  $T \gg m$  となるような高温極限を取る)。そうすると

$$\begin{aligned} P_0 &= -\frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^2 \log(1 - e^{-\beta|\mathbf{p}|}) \\ &= -\frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^2 \log(1 - e^{-\beta|\mathbf{p}|}) \\ &= -\frac{4\pi}{\beta(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{3} \mathbf{p}^3 \log(1 - e^{-\beta|\mathbf{p}|}) \right]_0^\infty - \frac{1}{3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{\mathbf{p}^3}{1 - e^{-\beta|\mathbf{p}|}} \beta e^{-\beta|\mathbf{p}|} \end{aligned}$$

この第一項は  $p^3$  の増加より  $\log(1 - e^{-\beta|p|})$  の方が早く 0 に収束するために、0 になります。よって

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{3} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|p| \frac{p^3}{1 - e^{-\beta|p|}} \beta e^{-\beta|p|} \\ &= \frac{1}{3} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|p| \frac{p^3}{e^{\beta|p|} - 1} \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \frac{1}{15} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^4 \\ &= \frac{\pi^2}{90} T^4 \end{aligned}$$

これが質量 0 での自由粒子 (スピン 0 の理想気体) の圧力です。

次に相互作用の影響である  $P_1$  を計算していきます。ここからが面倒な話になってきます。「和の計算」で触れたように、和と三次元積分の組み合わせ (ループ積分と呼んでいきます) は紫外発散を起こします。そのために発散の除去が必要になります。具体的に見ていきます。  $P_1$  は

$$P_1 = -3\lambda \left( \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \right)^2$$

このときに必要なループ積分は

$$L = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}$$

この和を「和の計算」での方法を使って書き換えると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_p^2} \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{-p_0^2 + \omega_p^2} \quad (p_0 = i\omega_n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2} + \frac{2}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \end{aligned}$$

この第一項は  $p_0 = -ip_4$  とすればよく見る形になります。第二項は留数定理によって

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} &= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \frac{-1}{(p_0 + \omega_p)(p_0 - \omega_p)} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \\ &= -2\pi i \frac{-1}{2\omega_p} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \end{aligned}$$

経路を複素平面の右半円に渡るように取るので  $p_0 = \omega_p$  の極だけを拾い、経路の方向が時計周りなのでマイナスをつけています。というわけで第二項は

$$\frac{2}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \frac{1}{-p_0^2 + \omega_p^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} = \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1}$$

よって  $S$  は

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2} + \frac{1}{2\omega_p} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_4 \frac{-1}{-p_4^2 - \omega_p^2} + \frac{1}{2\omega_p} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \quad (p_4 = ip_0) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_4 \frac{1}{p_4^2 + \omega_p^2} + \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1}
 \end{aligned}$$

後は三次元積分をくっつけて

$$\begin{aligned}
 L &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_4^2 + \omega_p^2} + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \quad (d^4 p_E = dp_4 d^3 p) \\
 &= L_{T=0} + L_T
 \end{aligned}$$

第一項は完全にゼロ温度でのループ積分になっていることが分かります。この二つの積分において、発散するのは第一項のみです (第二項の温度依存部分は、ボソンの分布関数が現われることによって発散がなくなります)。なので、上手いことゼロ温度での方法がここでも使えそうな形になっています。しかし、発散を除去することでどうなるのかはまだよく分からないので、本当に上手くいくのかを簡単にというより、かなり大雑把に見ておきます。今計算しようとしているのは

$$P_1 = -3\lambda \left( \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \right)^2$$

であり、これの括弧の部分、つまり伝播関数のループ積分 (自己エネルギー) を  $\Delta$  とおきます。この  $\Delta$  を温度依存している部分  $\Delta_T$  としていない部分  $\Delta_0$  とに分けて

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_T$$

とします。運動量表示で言えば、 $\Delta, \Delta_0, \Delta_T$  はループ積分を持つことにあたり ( $\Delta_0$  はそのまま  $\phi^4$  理論の自己エネルギーの図に対応するもの)、位置表示では  $\Delta(x=0), \Delta_0(x=0), \Delta_T(x=0)$  ということです。そうすると、これの二乗になっているので

$$3\lambda\Delta^2 = 3\lambda(\Delta_0^2 + \Delta_T^2 + 2\Delta_0\Delta_T)$$

というようになっています。で、 $L_{T=0}$  の形というのはゼロ温度での実数スカラー場での自己エネルギーなので、ゼロ温度のところで出てくるように、ラグランジアンに

$$\frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2$$

という相殺項を加えて発散をなくそうとします。ここでの  $\delta m^2$  が発散を握っているものであり、これは  $L_{T=0}$  の発散部分を除去するものに対応します。なので、 $L_{T=0}$  の発散の形、つまり  $\lambda\Delta_0$  に相当するものなので

$$\delta m^2 = -\frac{1}{2}\lambda\Delta_0$$

となっているはずですが (1/2 は対称因子)。圧力は分配関数を元にしてしているので (特に今の場合は  $\log Z/V$  になっている)、分配関数に相殺項が加わるように作る必要があります。相殺項は  $\delta m^2\phi^2$  というように場が二ついることから、相殺項を相互作用項だとして相互作用なしの分配関数に作用させれば、 $\delta m^2$  には  $\Delta$  がくつつくので

$$\frac{1}{2}\delta m^2\Delta = -\frac{1}{4}\lambda\Delta_0\Delta$$

これが分配関数を  $\lambda$  のオーダーで展開したときに新しく加わります。よって、 $3\lambda\Delta^2$  に直接これが加わるようになっているので

$$3\lambda\Delta^2 - \frac{1}{4}\lambda\Delta_0\Delta$$

このように書けます。なのですが、今の場合相互作用項を  $\lambda\phi^4$  ととっており、4! で割っていないので、そろえるために相殺項には 24 をかけて

$$\begin{aligned} 3\lambda\Delta^2 - 6\lambda\Delta_0\Delta &= 3\lambda\Delta_0^2 + 3\lambda\Delta_T^2 + 6\lambda\Delta_0\Delta_T - 6\lambda\Delta_0\Delta \\ &= 3\lambda\Delta_0^2 + 3\lambda\Delta_T^2 + 6\lambda\Delta_0\Delta_T - 6\lambda\Delta_0^2 - 6\lambda\Delta_0\Delta_T \\ &= -3\lambda\Delta_0^2 + 3\lambda\Delta_T^2 \end{aligned}$$

というわけで、ゼロ温度部分と有限温度部分に分かれて出てきて、混ざった項は出てきません。そして、今必要なものは温度に依存している項だけなので、温度依存性を持たない  $3\lambda\Delta_0^2$  という項は捨ててしまえます。よって、発散する部分は全てなくなり、有限の値を持つ温度依存項だけになります。このようにゼロ温度で求められたものと同じ相殺項を加えるだけで、有限な温度依存部分を抜き出すことができます。

$\log Z$  の段階で同じことを行くと  $\beta$  が全体に掛かった状態になりますが、圧力やエネルギーは  $\beta$  で割ることで出てくるので、結局は温度独立なところからの寄与 (よく真空からの寄与と言われます) だと考えてしまえます。

また、 $\phi^4$  理論では相殺項関連には温度依存性がないように出てきますが、QED のように松原振動数を含む運動量が絡んでくるときには、相当面倒な目にあいます。

必要な最終結果にゼロ温度部分である  $L_{T=0}$  は無関係であることが分かったので、気兼ねなくゼロ温度部分は無視します。なので、 $P_1$  は

$$P_1 = -3\lambda L_T^2 = -3\lambda \left( \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{e^{\beta\omega_p} - 1} \right)^2$$

ここで  $m = 0$  として

$$\begin{aligned}
P_1 &= -3\lambda \left( \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{e^{\beta|\mathbf{p}|} - 1} \right)^2 \\
&= -3\lambda \left( 4\pi \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{e^{\beta|\mathbf{p}|} - 1} \right)^2 \\
&= -3\lambda \left( 4\pi \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}|}{e^{\beta|\mathbf{p}|} - 1} \right)^2 \\
&= -3\lambda \left( \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{6} \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^2 \right)^2 \\
&= -3\lambda \left( \frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \\
&= -\frac{\lambda T^4}{48}
\end{aligned}$$

となって、 $\lambda$  の 1 次のオーダまでの圧力は

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{\lambda T^4}{48} = T^4 \left( \frac{\pi^2}{90} - \frac{\lambda}{48} \right)$$

有限温度の摂動論はこの 1 次のオーダまでなら平和なんですが、 $m = 0$  としたままでこれよりも上のオーダを扱おうとするといきなり問題が生じます。通常の摂動論なら次のオーダは  $\lambda^2$  で、その寄与だけを入れればいいんですが、有限温度の場合  $\lambda^{3/2}$  のオーダを加えるように修正しないとダメになっています。このように有限温度では摂動論の段階で非摂動的な効果を加えていく必要があるというところでもない構造を持っています。

最後に高温極限  $T \gg m$  の場合を示しておきます。ただ計算をし続けるだけなので、興味がない人は飛ばして良いです。

実行しなくてはならない積分は、 $P_0$  で見てみれば

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 \log(1 - \exp[-\beta\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]) \\
&= \left[ \frac{1}{3} |\mathbf{p}|^3 \log(1 - \exp[-\beta\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]) \right]_0^\infty - \frac{1}{3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^3 \frac{\beta |\mathbf{p}| (\mathbf{p}^2 + m^2)^{-1/2} \exp[-\beta\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]}{1 - \exp[-\beta\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}]} \\
&= -\frac{1}{3} \beta \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \exp[\beta\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}] - 1} \\
&= -\frac{1}{3} \beta \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \exp[\sqrt{\mathbf{p}^2/T^2 + m^2/T^2}] - 1} \tag{2}
\end{aligned}$$

というものです。つまり、積分のタイプとしては

$$I_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + y^2} \exp[\sqrt{x^2 + y^2}] - 1}$$

このような形をしているものです。で、この積分の性質として

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{n+1}}{dy} &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{-yx^n}{(x^2+y^2)^{3/2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{x^n}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{-y(x^2+y^2)^{-1/2} \exp[\sqrt{x^2+y^2}]}{(\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1)^2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{-yx^n}{(x^2+y^2)^{3/2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{-yx^n}{(x^2+y^2)} \frac{\exp[\sqrt{x^2+y^2}]}{(\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1)^2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left[ \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{x^{n-1}}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} \right]_0^\infty \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \left[ \frac{(n-1)x^{n-2}}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} - \frac{x(x^2+y^2)^{-1/2} x^{n-1} \exp[\sqrt{x^2+y^2}]}{(\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1)^2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{-yx^n}{(x^2+y^2)} \frac{\exp[\sqrt{x^2+y^2}]}{(\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1)^2} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \left[ \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{(n-1)x^{n-2}}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} + \frac{-y}{(x^2+y^2)} \frac{x^n \exp[\sqrt{x^2+y^2}]}{(\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1)^2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{-yx^n}{(x^2+y^2)} \frac{\exp[\sqrt{x^2+y^2}]}{(\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1)^2} \\
&= -\frac{(n-1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{x^{n-2}}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} \\
&= \frac{(n-1)}{n\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{-y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{x^{n-2}}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} \\
&= \frac{(n-1)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots} \int_0^\infty dx \frac{-y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{x^{n-2}}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1} \\
&= \frac{1}{n \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots} \int_0^\infty dx \frac{-y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{x^{n-2}}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1}
\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{-y}{n} I_{n-1} = \frac{1}{n\Gamma(n-1)} \int_0^\infty dx \frac{-yx^{n-2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{x^2+y^2}] - 1}$$

と一致するので

$$\frac{dI_{n+1}}{dy} = \frac{-y}{n} I_{n-1} \quad (3)$$

このような微分方程式を作っています。そして、微分方程式を解くために必要な初期条件は

$$\begin{aligned}
I_{n+1}(y=0) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-2}}{e^x - 1} \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)\cdots} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-2}}{e^x - 1} \\
&= \frac{1}{(n-1)\Gamma(n-1)\cdots} \int_0^\infty dx \frac{x^{(n-1)-1}}{e^x - 1} \\
&= \frac{\xi(n-1)}{n-1} \quad (n > 2)
\end{aligned} \tag{4}$$

となっています。ξ はリーマンのゼータ (zeta) 関数です。というわけで、 $I_1, I_2$  が分かれば連鎖的に全て求められます。

$I_1$  を計算してみます。 $I_1$  では

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{x^2 + y^2}] - 1}$$

ここで、「虚時間法～クライン・ゴールドン場～」で出てきた

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (x/2\pi)^2} = \frac{2\pi^2}{x} \left(1 + \frac{2}{e^x - 1}\right)$$

これを変形させた

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^2}{x} \frac{2}{e^x - 1} &= -\frac{2\pi^2}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (x/2\pi)^2} \\
\frac{1}{e^x - 1} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2\pi^2} \frac{(2\pi)^2}{4\pi^2 n^2 + x^2} \\
&= -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{4\pi^2 n^2 + x^2} \\
&= -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{x}{4\pi^2 n^2 + x^2} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4\pi^2 n^2 + x^2} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4\pi^2 n^2 + x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4\pi^2 n^2 + x^2} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4\pi^2 n^2 + x^2}
\end{aligned}$$

を使うことで

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{x^2 + y^2}] - 1} \\
&= \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi^2 n^2 + x^2 + y^2} \right] \\
&= M_1 - \frac{1}{2} M_2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_3
\end{aligned}$$

この積分は上手く有限の値に収束してくれないので、収束因子として  $x^{-\epsilon} (0 < \epsilon < 1)$  というのをくっつけます。

$M_1$  は  $x^{-\epsilon}$  がなくても収束してくれて

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \arctan \frac{x}{y} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2y} \quad \left( \lim_{\theta \rightarrow \infty} \arctan \theta = \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$M_2$  では  $x^{-\epsilon}$  をくっつけて ( $M_2$  は場の量子論での「次元正則化」での結果を流用しても出てきますが、マジメにやっておきます)

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx^2 \frac{x^{-\epsilon-1}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dx^2 \frac{(x^2)^{-(\epsilon+1)/2}}{y \sqrt{x^2/y^2 + 1}} \\ &= \frac{y^2}{2} \int_0^\infty dA \frac{(y^2 A)^{-(\epsilon+1)/2}}{y \sqrt{A+1}} \quad \left( A = \frac{x^2}{y^2}, y^2 dA = dx^2 \right) \\ &= \frac{yy^{-\epsilon-1}}{2} \int_0^\infty dA \frac{A^{-(\epsilon+1)/2}}{\sqrt{A+1}} \end{aligned}$$

ここで、ベータ関数

$$B(p, q) = \int_0^\infty dx \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を使うことで

$$\int_0^\infty dA \frac{A^{-(\epsilon+1)/2}}{\sqrt{A+1}} = B\left(\frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

とできるので

$$\begin{aligned} \frac{yy^{-\epsilon-1}}{2} \int_0^\infty dA \frac{A^{-(\epsilon+1)/2}}{\sqrt{A+1}} &= \frac{y^{-\epsilon}}{2} \frac{\Gamma(\frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{\exp[-\epsilon \log y]}{2} \frac{\Gamma(\frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \quad (y^{-\epsilon} = \exp[-\epsilon \log y]) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \epsilon \log y) \frac{\Gamma(\frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

$\Gamma(-\epsilon/2 + 1/2)$  も展開するなら

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{d\Gamma(z)}{dz} \Big|_{\epsilon=0} \quad \left( z = \frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \psi_0\left(\frac{1}{2}\right) \epsilon \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (-\gamma - 2 \log 2) \epsilon \end{aligned}$$

ガンマ関数の微分は

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \Gamma(z)\psi_0(z)$$

$\psi_0(z)$  はポリガンマ関数 ( $\psi_{n=0}(z)$  ではディガンマ関数  $\Psi(z)$  とも呼びます) で、 $\psi_0(1/2) = -\gamma - 2\log 2$  です。  
 $\epsilon$  を 0 にしても問題のない項は消してしまつて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \epsilon \log y)(1 + \frac{\epsilon}{2}(\gamma + 2\log 2))\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) &= \frac{1}{2}(1 - \epsilon \log y)(1 + \frac{\epsilon}{2}(\gamma + 2\log 2))(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\epsilon}{2}(\gamma + 2\log 2) - \epsilon \log y)(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{2}{\epsilon} + \gamma + 2\log 2 - 2\log y - \gamma) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{2}{\epsilon} - 2\log \frac{y}{2}) \end{aligned}$$

$\gamma$  はオイラー定数です (ここら辺の関係は場の量子論の「次元正則化」参照)。よつて  $M_2$  は

$$M_2 = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \log \frac{y}{2}$$

最後の  $M_3$  は全ての和を統合して計算できればいいんですが、そんなこと出来ないのつ一つ取り出して計算しなくてははいけません。しかし、高温極限を取ることで和の計算を実行出来ます。今の場合、 $y$  が小さいとして展開すればいいです ( $y = m/T$  なので、 $y \ll 1$  は高温極限に対応する)。積分は収束しているんですが、後で和を取つたときのために収束因子をつけておきます。最低次では

$$\begin{aligned} M_3^{(1)} &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{4\pi^2 n^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{2(2\pi n)^2} \int_0^\infty dx^2 \frac{(x^2)^{(-\epsilon-1)/2}}{x^2/4\pi^2 n^2 + 1} \\ &= \frac{(2\pi n)^2 (2\pi n)^{-\epsilon-1}}{2(2\pi n)^2} \int_0^\infty dA \frac{A^{(-\epsilon-1)/2}}{A+1} \quad (A = \frac{x^2}{(2\pi n)^2}, (2\pi n)^2 dA = dx^2) \\ &= \frac{(2\pi n)^{-\epsilon-1}}{2} \int_0^\infty dA \frac{A^{-\epsilon/2-1/2}}{A+1} \\ &= \frac{(2\pi n)^{-\epsilon-1}}{2} B(-\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{(2\pi)^{-\epsilon} n^{-\epsilon}}{4\pi n} \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{\pi}{4\pi n^{1+\epsilon}} (1 - \epsilon \log 2\pi) \quad (\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}) \end{aligned}$$

ここでは  $\Gamma(1/2 + \epsilon/2)$  は展開しても  $\epsilon = 0$  で問題なく消えるので、そのまま  $\epsilon = 0$  にしています。これの  $n$  に対する和を取るんですが、これはリーマンのゼータ関数

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\text{Re } s > 1)$$

を使うことで

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_3^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - \epsilon \log 2\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = \frac{1}{4}(1 - \epsilon \log 2\pi)\xi(1 + \epsilon)$$

そして、ゼータ関数の特異点極限

$$\xi(1 + \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \gamma + \dots$$

によって

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} M_3^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - \epsilon \log 2\pi)\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma + \dots\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon} - \log 2\pi + \gamma\right)$$

これと同じことを高温極限での次のオーダー  $M_3^{(2)}$  以降でも実行していけば、近似の精度が上がっていきます。ここまでのオーダーでは

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= \frac{\pi}{2y} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \log \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon} - \log 2\pi + \gamma\right) \\ &= \frac{\pi}{2y} + \frac{1}{2} \log \frac{y}{4\pi} + \frac{1}{2}\gamma \end{aligned}$$

となります。これ以降は

$$I_1 = \frac{\pi}{2y} + \frac{1}{2} \log \frac{y}{4\pi} + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}\xi(3)\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 + \frac{3}{16}\xi(5)\left(\frac{y}{2\pi}\right)^4 + \dots$$

みたいになっています。  $I_2$  も同様にして計算できます。

実際に圧力  $P_0$  の場合を計算してみます。必要なものは  $I_5$  なので、それを  $I_1^{(1)}$  を使って求めます。  $I_3$  の微分方程式は  $I_1^{(1)}$  を使って、(3) より

$$\frac{dI_3}{dy} = \frac{-y}{2}\left(\frac{\pi}{2y} + \frac{1}{2} \log \frac{y}{4\pi} + \frac{1}{2}\gamma\right) = \frac{-1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2} \log y - \frac{y}{2} \log 4\pi + \frac{y}{2}\gamma\right)$$

これを積分して

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{-1}{2}\left[\frac{\pi}{2}y + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} \log y - \frac{y^2}{4}\right) - \frac{y^2}{4} \log 4\pi + \frac{y^2}{4}\gamma\right] \\ &= \frac{-1}{2}\left[-\frac{y^2}{8} + \frac{\pi}{2}y + \frac{y^2}{4} \log y - \frac{y^2}{4}(-\gamma + \log 4\pi)\right] \\ &= \frac{-1}{2}\left[-\frac{y^2}{8}(1 - 2\gamma + 2 \log 4\pi) + \frac{\pi}{2}y + \frac{y^2}{4} \log y\right] \end{aligned}$$

初期条件は (4) なので

$$I_3(y=0) = \frac{\xi(2)}{2}$$

というわけで

$$I_3 = \frac{-1}{2} \left[ -\frac{y^2}{8} (1 - 2\gamma + 2 \log 4\pi) + \frac{\pi}{2} y + \frac{y^2}{4} \log y \right] + \frac{\xi(2)}{2}$$

$I_5$  も同様に

$$\begin{aligned} I_5 &= \int dy \frac{-y}{4} \left[ \frac{-1}{2} \left[ -\frac{y^2}{8} (1 - 2\gamma + 2 \log 4\pi) + \frac{\pi}{2} y + \frac{y^2}{4} \log y \right] + \frac{\xi(2)}{2} \right] \\ &= \int dy \left[ \frac{1}{8} \left[ -\frac{y^3}{8} (1 - 2\gamma + 2 \log 4\pi) + \frac{\pi}{2} y^2 + \frac{y^3}{4} \log y \right] - y \frac{\xi(2)}{8} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[ -\frac{y^4}{32} (1 - 2\gamma + 2 \log 4\pi) + \frac{\pi}{6} y^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{y^4}{4} \log y - \frac{y^4}{16} \right) \right] - y^2 \frac{\xi(2)}{16} \\ &= \frac{1}{8} \left[ -\frac{y^4}{64} (3 - 4\gamma + 4 \log 4\pi) + \frac{\pi}{6} y^3 + \frac{y^4}{16} \log y \right] - y^2 \frac{\xi(2)}{16} \end{aligned}$$

で、初期条件は

$$I_5(y=0) = \frac{\xi(4)}{4}$$

なので

$$I_5 = \frac{1}{8} \left[ -\frac{y^4}{64} (3 - 4\gamma + 4 \log 4\pi) + \frac{\pi}{6} y^3 + \frac{y^4}{16} \log y \right] - y^2 \frac{\xi(2)}{16} + \frac{\xi(4)}{4}$$

ここで使っている  $y$  は

$$y = \frac{m}{T}$$

そして、圧力は (1),(2) から

$$\begin{aligned} P_0 &= -\frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^2 \log(1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{p}}}) \\ &= \frac{4\pi}{\beta(2\pi)^3} \frac{1}{3} \beta \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{\mathbf{p}^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{\mathbf{p}^2/T^2 + m^2/T^2}] - 1} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} T \int_0^\infty dx \frac{T^4 x^4}{T \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{x^2 + y^2}] - 1} \quad (x = \frac{|\mathbf{p}|}{T}, T dx = d|\mathbf{p}|) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Gamma(5)}{3} T^4 \int_0^\infty dx \frac{1}{\Gamma(5)} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\exp[\sqrt{x^2 + y^2}] - 1} \\ &= \frac{4T^4}{\pi^2} I_5 \end{aligned}$$

となっているので

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{T^4}{\pi^2} \left[ -\frac{y^4}{128} (3 - 4\gamma + 4 \log 4\pi) + \frac{\pi}{12} y^3 + \frac{y^4}{32} \log y \right] - y^2 \frac{\xi(2)}{4} \frac{T^4}{\pi^2} + \frac{\xi(4)}{\pi^2} \frac{T^4}{\pi^2} \\
&= \frac{\pi^2}{90} T^4 - \frac{m^2 T^2}{24} + \frac{m^3 T}{12\pi} + \frac{m^4}{32\pi^2} \left[ \gamma - \frac{3}{4} - \log 4\pi + \log \frac{m}{T} \right] \quad \left( \xi(2) = \frac{\pi^2}{6}, \xi(4) = \frac{\pi^4}{90} \right)
\end{aligned}$$

$m = 0$  で最初の結果と一致しています。また、「ボーズ・アインシュタイン凝縮」の最後に出てきた極限での結果はここでの方法で求められます。

ここではボソンの場合での計算でしたが、フェルミオンでは

$$\frac{1}{e^x - 1} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + y_n^2} \Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + z_n^2}$$

$$(y_n = 2n\pi, z_n = (2n + 1)\pi)$$

というように展開式が変わるだけなので、同様に計算できます。また、変形させると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^x + 1} &= \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + z_n^2} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2\pi)^2 (n + 1/2)^2} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{x}{x^2 + (2\pi)^2 (n + 1/2)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2\pi)^2 (n + 1/2)^2} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2\pi)^2 (n - 1/2)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2\pi)^2 (n + 1/2)^2} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + (2\pi)^2 (n + 1/2)^2}
\end{aligned}$$

このように書けます。最後の行にいくときに、第二項と第三項の和の計算が同じになっていることを使っています。