

有限温度・密度での NJL モデル

有限温度・密度での南部・Jona-Lasinio モデルを扱います。計算自体はゼロ温度の場合と特に変わっていませんが、ここでは場の量子論の「南部・Jona-Lasinio モデル」では後の方で取っていた近似を最初から取ってしまうので、計算は非常に楽になっています。

シュウィンガー・ダイソン方程式を使うことで強結合 QED でのカイラル対称性の破れが回復することが見れたので、有限温度・密度での南部・Jona-Lasinio モデルではどうなっているのか見てみます。そのために、 $SU(2)$ のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau^a\psi)^2]$$

を使うことにします ($a = 1, 2, 3$)。この $SU(2)$ の自由度はフレーバ数 N_f によるもので、 $SU(2)$ なので $N_f = 2$ です。後、カラーの自由度も持たせて、カラー数は $N_c = 3$ とします。なので、明確には書きませんが、フェルミオン場はフレーバによる 2 種類とカラーによる 3 種類があります。

経路積分に乘せると

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau^a\psi)^2]] \right]$$

有限温度への変更を行うことで、分配関数 Z は

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\bar{\psi}(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau^a\psi)^2]] \right]$$

化学ポテンシャル μ をくっつけて大分配関数にすると

$$Z_G = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\bar{\psi}(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m + \gamma_0\mu)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau^a\psi)^2]] \right] \quad (1)$$

大分配関数まで持っていきましたが、ゼロ温度での結果を流用できるところまではゼロ温度の形で行っていきます。

場の量子論での「南部・Jona-Lasinio モデル」でのボソン化の手続きを行った形 (ここでは $SU(2)$ の形ですが、やることは変わっていません)

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi^a \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m - 2g(\sigma + i\gamma^5\tau^a\pi^a))\psi - \frac{g^2}{G}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)] \right]$$

から始めます ($\pi = \pi^a$)。 γ^5 項は後ですぐ消してしまうので、ここで落としてしまい

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi^a \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m - 2g\sigma)\psi - \frac{g^2}{G}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)] \right]$$

さらに近似として、ボソン場 σ, π^a を真空期待値 $\langle \sigma \rangle, \langle \pi^a \rangle$ とする mean field 近似を使うことにします。そうすると $2g\sigma$ は定数でしかないので m とくっつけて

$$M = m + 2g\sigma$$

とすれば

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{g^2\sigma^2}{G} - \frac{g^2\pi^2}{G}] \right]$$

記号を変えていませんが、 $\sigma = \langle \sigma \rangle$, $\pi^a = \langle \pi^a \rangle$ です。 σ, π^a 積分もただの定数なので無視してしまつて

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{g^2\sigma^2}{G} - \frac{g^2\pi^2}{G}] \right] \quad (2)$$

そして、真空期待値として $\langle \sigma \rangle \neq 0$, $\langle \pi^i \rangle = 0$ と選んでやることで

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{g^2\sigma^2}{G}] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - \frac{(M-m)^2}{4G}] \right] \end{aligned}$$

さらに化学ポテンシャル μ を入れて

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M + \gamma_0\mu)\psi - \frac{(M-m)^2}{4G}] \right] \quad (3)$$

というわけで有限温度・密度に持って行けば

$$Z_G = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\bar{\psi}(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - M + \gamma_0\mu)\psi - \frac{(M-m)^2}{4G}] \right]$$

$\bar{\psi}$ と ψ に囲まれている部分にしか $\bar{\psi}, \psi$ 積分は引っかけられないので、ここは相互作用なしのディラック場とまったく同じです。なので、「虚時間法～ディラック場～」の結果を使えば、積分に引っかかる部分は

$$\log Z_D = 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{tr}[\beta E_{\mathbf{p}} + \log(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)}) + \log(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)})]$$

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$$

V は3次元体積です。トレースはQCDを考慮すればフレーバ数とカラー数に対してなので、それを N_f, N_c として

$$\log Z_D = 2VN_fN_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\beta E_{\mathbf{p}} + \log(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)}) + \log(1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)})]$$

残っている項は単に

$$-\beta V \frac{(M-m)^2}{4G}$$

となるだけなので、 $\log Z_G$ は

$$\log Z_G = \log Z_D - \beta V \frac{(M-m)^2}{4G}$$

熱力学ポテンシャル Ω はこれに $-T/V$ をくっつけたものなので

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{T}{V} \log Z_G \\ &= -2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [E_p + T \log[1 + e^{-\beta(E_p - \mu)}] + T \log[1 + e^{-\beta(E_p + \mu)}]] + \frac{(M - m)^2}{4G}\end{aligned}\quad (4)$$

この熱力学ポテンシャルの性質をいろいろとみていきます
まず、 M に対する式を求めてやります。熱力学ポテンシャルの定義

$$\Omega = -\frac{T}{V} \log Z_G$$

に対して大分配関数の形として (1) を使えば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial m} &= -\frac{T}{V} \frac{1}{Z_G} \frac{\partial Z_G}{\partial m} \\ &= -\frac{T}{V} \frac{1}{Z_G} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \bar{\psi} \psi \exp[] \\ &= \langle \bar{\psi} \psi \rangle \\ &= -\frac{g}{G} \sigma\end{aligned}\quad (5)$$

のようになっていることが分かります。最後に σ に対する運動方程式

$$\sigma = -\frac{G}{g} \bar{\psi} \psi$$

を使っています。 $\langle \rangle$ は熱的平均です。これに対して (4) は m に依存している M も変数としているために、(4) の m 微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial m} &= \frac{\partial \Omega}{\partial m} + \frac{\delta \Omega}{\delta M} \frac{\partial M}{\partial m} \\ &= -\frac{M - m}{2G} + \frac{\delta \Omega}{\delta M} \frac{\partial M}{\partial m} \\ &= -\frac{g\sigma}{G} + \frac{\delta \Omega}{\delta M} \frac{\partial M}{\partial m} \\ &= \langle \bar{\psi} \psi \rangle + \frac{\delta \Omega}{\delta M} \frac{\partial M}{\partial m}\end{aligned}$$

となります。これと、熱力学ポテンシャルは (5) が成立していなければいけないことから

$$\frac{\delta \Omega}{\delta M} = 0$$

という条件がかかっていることが分かります。この条件から、 M の式は

$$0 = \frac{\delta\Omega}{\delta M} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(M E_{\mathbf{p}}^{-1} + \frac{-M E_{\mathbf{p}}^{-1} e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)}}{1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)}} + \frac{-M E_{\mathbf{p}}^{-1} e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)}}{1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)}} \right) + \frac{M-m}{2G} \\ &= -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)}} \right) + \frac{M-m}{2G} \\ &= -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - n_F^-(E_{\mathbf{p}}) - n_F^+(E_{\mathbf{p}})] + \frac{M-m}{2G} \end{aligned}$$

$$M = m + 4GN_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} [1 - n_F^-(E_{\mathbf{p}}) - n_F^+(E_{\mathbf{p}})] \quad (7)$$

となります。これを解くことで M が求まります。 M はラグランジアンを見れば分かるように、 σ による補正がかかったフェルミオンの質量です。

$T = 0$ の極限をとると $n_F^-(E)$ は、 $E > \mu$ のとき 0、 $E = \mu$ では 1/2、 $E < \mu$ では 1 となるので、 $E = \mu$ を除いて

$$n_F^-(E) = \theta(\mu - E) \quad (T \rightarrow 0)$$

となります (θ は階段関数)。 $n_F^+(E)$ では 0 になるしかないので

$$n_F^+(E) = 0 \quad (T \rightarrow 0)$$

同じように考えることで、対数部分は $T = 0$ 周りで

$$\log[1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)}] \simeq \beta(\mu - E_{\mathbf{p}})\theta(\mu - E_{\mathbf{p}})$$

$$\log[1 + e^{-\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)}] \simeq 0$$

となるので、 $T \rightarrow 0$ での熱力学ポテンシャルは

$$\Omega = -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [E_{\mathbf{p}} + (\mu - E_{\mathbf{p}})\theta(\mu - E_{\mathbf{p}})] + \frac{(M-m)^2}{4G} \quad (8)$$

と求まります。階段関数 $\theta(\mu - E_{\mathbf{p}})$ があるので、フェルミエネルギーが出てきています (相互作用なしのディラック粒子と同じ形をしていたので出てくるのは予想通りです)。対応するフェルミ運動量 p_F は

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{p_F^2 + M^2} = \mu$$

から

$$p_F = \theta(\mu - M)\sqrt{\mu^2 - M^2}$$

となっています。

$\mu = 0$ として、完全にゼロ温度の場合に持っていけば

$$\Omega_0 = -2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p + \frac{(M-m)^2}{4G}$$

第一項は明らかに発散しています。 Ω_0 は真空のエネルギー部分なので、第一項はディラックの海と解釈でき、第二項は場 (フェルミオン凝縮) からの寄与と言えます。つまり、この2つの寄与の兼ねあいで対称性の破れが起きるのだと考えられます。

これと (4) とを比較すると、温度と密度効果は

$$\delta\Omega = -2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (T \log[1 + e^{-\beta(E_p - \mu)}] + T \log[1 + e^{-\beta(E_p + \mu)}])$$

によって与えられていることが分かります。 $T = 0$ の極限を見れば、密度のみの効果は (8) から

$$\delta\Omega_{T=0} = 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (E_p - \mu)\theta(\mu - E_p)$$

となっていることが分かります。この部分は、階段関数があるために積分が発散していないので、運動量積分の切断 Λ の影響を受けません。ただし、フェルミ運動量が運動量積分の上限 Λ 付近にいるとしてみまると、 $\delta\Omega_{T=0}$ は Λ の影響を受けてしまいます。

ついでに密度がどうなっているのか見るために、粒子数密度も求めます。粒子数密度 $\langle\psi^\dagger\psi\rangle$ で、これは大分配関数を見れば分かるように、熱力学ポテンシャルから

$$n = \langle\psi^\dagger\psi\rangle = -\frac{\partial}{\partial\mu}\Omega$$

このように求められます。なので

$$\begin{aligned} n &= 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(T \frac{\beta e^{-\beta(E_p - \mu)}}{1 + e^{-\beta(E_p - \mu)}} + T \frac{-\beta e^{-\beta(E_p + \mu)}}{1 + e^{-\beta(E_p + \mu)}} \right) \\ &= 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (n_F^-(E_p) - n_F^+(E_p)) \end{aligned}$$

ちなみに、 $\mu = 0$ で $n = 0$ となることから、 $\mu \neq 0$ を有限密度と呼んでいる理由が直接分かります。

M, Ω, n を数値計算で求めるために、設定をしておきます。まず、何を計算しているのかを決めます。南部・Jona-Lasinio モデルはゼロ温度での「南部・Jona-Lasinio モデル」で言ったように、低エネルギー QCD の有効理論です。なので、フェルミオンはクォークで、 m はカレント質量、 M は構成子質量になります。カラー数 N_c は3で、フレーバ数は $N_f = 2$ だとして u, d クォークを扱っているとします。そうすると、粒子数密度 n はクォーク数密度なので、 $\rho = n/3$ はバリオン数密度になります (クォークが3つでバリオンになる)。バリオンは陽子や中性子なので、バリオンの密度は原子核の密度に対応させることができます。

ゼロ温度では強結合のとき、 $m = 0$ のカイラル対称性は破れているので、ここでは温度と密度 (化学ポテンシャル) によってカイラル対称性が回復するのを見ます。カイラル対称性のオーダーパラメータは M なので、 M が0かそうでないかでカイラル対称性の破れを見ることができそうですが、より正確には熱力学ポテンシャルの最低値がどこにいるかを調べる必要があります。後で実際に見ますが、温度側では M だけを調べれば臨界点 (臨界温度) を知るには十分なんです、密度側では熱力学ポテンシャルが必要になります。

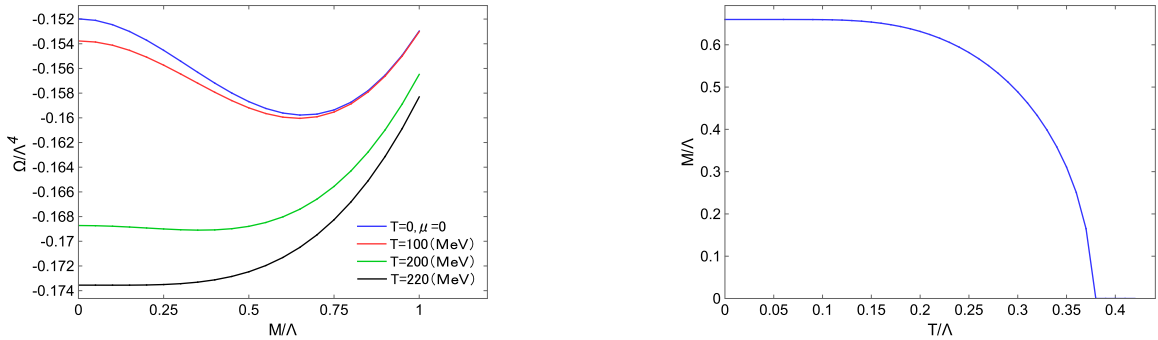
南部・Jona-Lasinio モデルでは任意のパラメータとして三次元運動量積分の上限 Λ 、質量次元で $[M^{-2}]$ を持つ結合定数 G 、ラグランジアンにいる質量 m があるので、数値計算を実行するにはこれらを固定してやる必要があります。カイラル対称性の破れについてみたいので、 $m = 0$ とします。 Λ と G は $\Lambda = 588(\text{MeV})$, $GA^2 = 2.44$ とします。この2つの値のとり方は人によって違いますが、大体この辺りの値が使われます (パイオンの崩壊定数に合うように選んでいます)。南部・Jona-Lasinio モデルでの結果はこれらのパラメータのとり方で大きくズレます。

ここから数値計算の結果を載せていきますが、精度はそんなに高くとっていないので、値はあまり信じないでください。より正確な値は「NJL-model analysis of dense quark matter」(hep-ph/0402234) でも見てください。

(7) から M の解を求めるための数値計算の仕方は、最初に M に適当な初期値を与えて、値が収束するまで繰り返

すという方法を取っています。 M 、温度 T 、化学ポテンシャル μ 、熱力学ポテンシャルを Λ で割ることで無次元化しています。プログラム自体は、例えば、数学の「数値計算」のところにあるシュウィンガー・ダイソン方程式のプログラムの質量関数の運動量依存性を外して、式を今の場合に合わせればできます。質量関数の運動量依存性がないぶん非常に単純なプログラムになります。熱力学ポテンシャルや粒子数密度はただの積分のプログラムです。また、熱力学ポテンシャルの最小値となる M が知りたい M の値なので、(7) を使わずに熱力学ポテンシャルだけから M の値の変化を見ることがもできます。こっちのほうが、収束性を無視できるので、便利です、速いです。

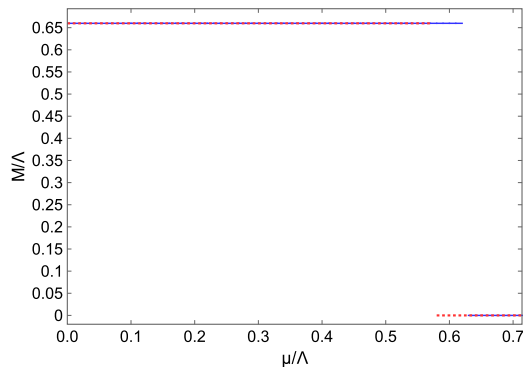
まず、 $T \neq 0, \mu = 0$ での M と熱力学ポテンシャルの形を示すと



熱力学ポテンシャルは $M \geq 0$ しか示していませんが 0 を境に対称になっています。 $T = \mu = 0$ での熱力学ポテンシャルの形はワインボトル型で、 $M = 388$ (MeV) で最低値を持っています。これは $T = \mu = 0$ での M の値そのものです。よって、カイラル対称性が自発的に破れていることが確かめられたことになります。 $T = 0$ から温度を上げていくと熱力学ポテンシャルの形は変化していき、約 220 (MeV) で最低値が $M = 0$ に変わります。 M も $T = 220$ (MeV) あたりで、 $M = 0$ となります。よって、 $T = 220$ (MeV) でカイラル対称性が回復していることが分かります。相転移 (カイラル対称性の破れている相から破れていない相への相転移) は M の温度依存性から 2 次相転移になっています。

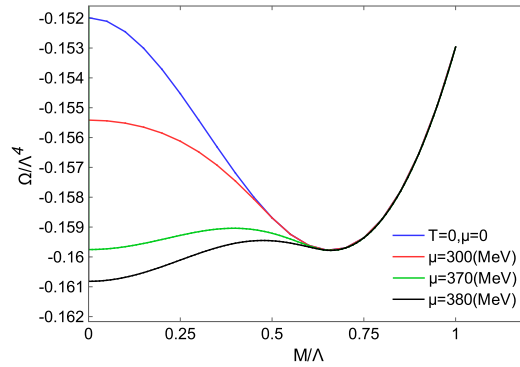
このように温度側では $M = 0$ となる地点と、熱力学ポテンシャルの最低値が $M = 0$ の地点になる温度は一致しているので、どちらかを計算すればカイラル対称性が回復する臨界温度を知ることができます。

面倒なのが密度側で、 $T = 0, \mu \neq 0$ での M の変化を見てみると



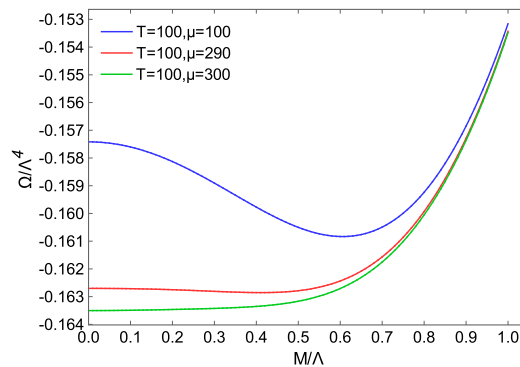
見づらいですが、赤の点線と青の実線の 2 つを引いています。点線では約 340 (MeV) で $M = 0$ に、実線では約 370 (MeV) で $M = 0$ になっています。この 2 つは両方ともちゃんとした M の解です。違いは解くときの M の初期値の値です。プログラムの組み方で初期値の依存性は変わってきますが、ここでは 0.4Λ (実線) と 0.1Λ (点線) の場合を載せています。このように、解が複数出てくるのは、密度側の相転移の仕方が 1 次相転移だからです (M が一気に 0 に飛んでいるため)。1 次相転移ではこのような複数の解が出てきます。このため、 M からは 1 次相転移を起こしているということしか言えなく、臨界点がどこなのかは分かりません。なので、熱力学ポテンシャルの形を見る必要があります。というより、最初から熱力学ポテンシャルだけから M を決定していればこんな面倒なことは起きません。

$T = 0, \mu \neq 0$ の熱力学ポテンシャルを見てみると



これは大体 $\mu = 370(\text{MeV})$ のときに $M = 388(\text{MeV})$ が最低値になっています。よって、 M の解としては 0.4Λ を初期値 (実線) としたものが正しいことになります。このように、ここで使っているような初期値を与えて収束する解を得るという方法では、与えられた初期値から収束しやすい解に収束しようとするので、複数の解があるときは注意が必要です。

これ以上細かく見ていきませんが、 $T \neq 0, \mu \neq 0$ でも基本的には同じで、例えば熱力学ポテンシャルは



このようになっています。

粒子数密度の単位は長さにしたほうが便利なので、MeV を fm に変換してやります。変換は場の量子論の「いろいろな関係」の自然単位系のところで示した

$$1(\text{m}) = 5.07 \times 10^{15}(\text{GeV}^{-1})$$

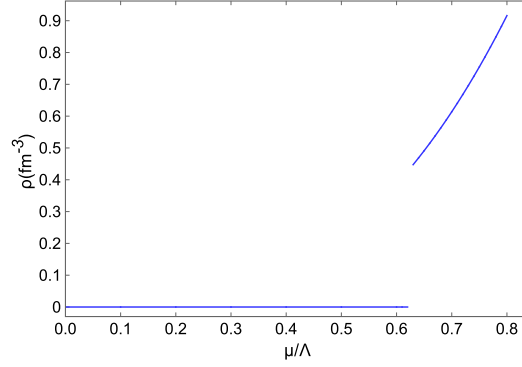
を使えばいいです。 $1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$ なので

$$1(\text{fm}) = 5.07 \times 10^{-3}(\text{MeV}^{-1})$$

$$1(\text{fm}^{-3}) = (5.07)^{-3} \times 10^9(\text{MeV}^3)$$

と変換できます。

バリオン数密度 $\rho = n/3$ の結果は



原子核の密度はほぼ一定で、 $0.17(\text{fm}^{-3})$ です (密度の飽和性)。これを見ても、カイラル対称性が回復する $\mu = 370(\text{MeV})$ で唐突に粒子数密度が現れています。これはハドロンの閉じ込めのために、カイラル対称性が破れている相では粒子数密度が 0 で、カイラル対称性が回復している相では閉じ込めがなくなり粒子数密度が現れたと解釈することができます。ただし、本当に一気に粒子数密度が $\rho = 0$ から $\rho \neq 0$ に飛ぶのが正しいクォークの性質なのかどうかは分かりません。また、 $T \neq 0$ では飛びがほとんどなくなります。

やれば分かることなので、他の性質を結果を載せずに言葉だけで言ってしまう。詳細に求めるのは面倒な性質として、南部・Jona-Lasinio モデルの相構造には 3 重臨界点 (tricritical point) が存在しています。3 重臨界点は相転移が 1 次相転移から 2 次相転移になる点です。これは大体 $T = 112(\text{MeV})$, $\mu = 285(\text{MeV})$ 辺りにあります。

また、ここでは $m = 0$ としましたが、 $m \neq 0$ としても同じように計算できます。 $m \neq 0$ での $m = 0$ との明確な違いは温度側に出てきます。 $m \neq 0$ では温度をいくら上げても厳密に $M = 0$ とはなりません。そのため、もはや相転移と言うことができなく、連続的な変化 (クロスオーバー) に変わります (熱力学ポテンシャルはワインボトル型から U 字型になる)。つまり、2 次相転移がクロスオーバーになります。このとき M はオーダーパラメータとしては使えなくなるので ($M = 0$ にならないから)、フェルミオン凝縮 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ の変化が最大になる地点で相が変化している (クロスオーバーがおきている) とします。今の場合は $\partial M/\partial T$ が最大となる地点だと十分できるので、それを求めると、 $m = 5.6(\text{MeV})$ では大体 $220(\text{MeV})$ ぐらいでクロスオーバーを起こします。なので、臨界温度自体は $m = 0$ と $m \neq 0$ でほぼ変わりません。また、密度側では相変わらず 1 次相転移を起こすので、扱いは変わりません (こちらでも $M = 0$ にはならない)。

・補足

当たり前ですが、ゼロ温度での場合での M の式を有限温度・密度化することでも同じ式を得ることができます。それを一応やっておきます。(3) のディラック演算子部分は「南部・Jona-Lasinio モデル」での $g\sigma$ を M に置き換えてやればよく、残っている項は有限温度・密度と変わらないので、すぐにゼロ温度での有効ポテンシャルが

$$\Omega_0 = i2N_f N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log[-p^2 + M^2] + \frac{(M - m)^2}{4G}$$

となるのが分かります。この極値は

$$0 = 4iN_f N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{-p^2 + M^2} + \frac{M - m}{2G}$$

$$M = m - 8iGN_f N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{-p^2 + M^2}$$

となります。これをユークリッド空間 \rightarrow 有限温度・密度と変更すると

$$M = m + 8GN_f N_c \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{M}{p_E^2 + M^2}$$

$$\Rightarrow M = m + 8GN_f N_c T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{(\omega_n - i\mu)^2 + p^2 + M^2}$$

この和を実行すると

$$\begin{aligned}
T \sum_n \frac{-1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E_{\mathbf{p}}^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2} \frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)} + 1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2} \frac{1}{e^{\beta(\mu-p_0)} + 1} \\
&= \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} - \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\mathbf{p}}-\mu)} + 1} - \frac{-1}{-2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\mathbf{p}}+\mu)} + 1} \\
&= \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (1 - n_{\mathbf{F}}^-(E_{\mathbf{p}}) - n_{\mathbf{F}}^+(E_{\mathbf{p}}))
\end{aligned}$$

よって

$$M = m + 4GN_f N_c T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_{\mathbf{p}}} (1 - n_{\mathbf{F}}^-(E_{\mathbf{p}}) - n_{\mathbf{F}}^+(E_{\mathbf{p}}))$$

となって一致します。