$\log Z$ の摂動計算〜QED〜

QED での $\log Z$ に対する摂動計算を行います。後半は相当面倒な計算をするので、ファインマン則が分かればいいという人は前半だけ見ればいいです。ゼロ温度でのゲージ場の量子化についてはある程度知っているものとして話を進めます。

相互作用なしでのディラック場、電磁場 (ローレンツゲージ) の分配関数は

$$Z_D=\int\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ \left(\overline{\psi}(x)(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m+\gamma_0\mu)\psi(x)\right)\right]$$

$$Z_{EM}=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2-\overline{\eta}\Box\eta\right)\right]$$

本来 Z_{EM} での微分演算子とベクトルポテンシャルも $t\to -i\tau$, $A_0\to iA_4$ のようにユークリッド化されるんですが、$\partial_0=-\partial/i\partial\tau$, $A_0=iA_4$ としてしまい、ミンコフスキー空間での構造に持っていっています。そうすることで、ゼロ温度と同じ計量で計算できます。

ゼロ温度での相互作用している QED のラグランジアン (ゴーストは抜いています) は

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)\psi-m\overline{\psi}\psi-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

相互作用項は

$$\mathcal{L}_I=-e\overline{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi$$

となっているので、有限温度でもこれをそのまま使うことで分配関数は (ゴーストは無視します)

$$Z=\int\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ (\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_{EM}+\mathcal{L}_I)\right]$$

$$\mathcal{L}_D=\overline{\psi}(x)(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m+\gamma_0\mu)\psi(x)$$

$$\mathcal{L}_{EM}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

$$\mathcal{L}_I=-e\overline{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi$$

となります ($\mathcal{L}_{EM}$ と $\mathcal{L}_I$ では $\partial_0=-\partial/i\partial\tau$, $A_0=iA_4$)。これを摂動計算します。$\log Z$ の展開は「$\log Z$ の計算〜ϕ^4 理論〜」の最初に見たように

$$\log Z=\log[\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}]+\log\left[1+\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}\sum_{l=1}^\infty\frac{1}{l!}S_I^l}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}\right]$$

となっているので、これに当てはめます。まず一次のオーダでは (分子だけ出します。分母は相互作用部分を抜いたもの)

$$\begin{aligned}\log Z_1 &= \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x\ (\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_{EM})\right]\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ \mathcal{L}_I \\ &= \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x\ (\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_{EM})\right]\int_0^\beta d\tau\int d^3x(-e\overline{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi)\end{aligned}$$

となっています。この後は、デルタ関数による制限を加えてガウス積分を行うんですが、奇数個の $\overline{\psi},\psi,A$ が exp の外から積分に引っかかると消えてしまいます。なので、一次のオーダでは消えます。というわけで、最初に寄与を与えるオーダは二次からになります。「$\log Z$ の計算〜ϕ^4 理論〜」と同じように計算していきます。
二次では

$$\log Z_2 = \frac{1}{2}\int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x\ (\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_{EM})\right]$$
$$\times[e^2\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2\int d^3x_1d^3x_2\ (\overline{\psi}(\tau_1,\boldsymbol{x}_1)A_\mu(\tau_1,\boldsymbol{x}_1)\gamma^\mu\psi(\tau_1,\boldsymbol{x}_1))(\overline{\psi}(\tau_2,\boldsymbol{x}_2)A_\nu(\tau_2,\boldsymbol{x}_2)\gamma^\nu\psi(\tau_2,\boldsymbol{x}_2))]$$

ここで、外に出てきた相互作用項の二乗というのは (面倒なので、変数を x_1,x_2 と書きます)

$$\begin{aligned}&(-e\overline{\psi}(x_1)A_\mu(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1))(-e\overline{\psi}(x_2)A_\nu(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) \\ &= e^2(\overline{\psi}(x_1)A_\mu(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1))(\overline{\psi}(x_2)A_\nu(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) \\ &= e^2A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)(\overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1))(\overline{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)) \\ &= e^2A_\mu A_\nu(\overline{\psi}_a(x_1)\gamma^\mu_{ab}\psi_b(x_1))(\overline{\psi}_i(x_2)\gamma^\nu_{ij}\psi_j(x_2)) \\ &= -e^2A_\mu A_\nu\mathrm{tr}(\gamma^\mu\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)\overline{\psi}(x_1))\end{aligned}$$

ここでの a,b,i,j はスピノール成分です。そのために

$$\overline{\psi}_i\gamma^\mu_{ij}\psi_j = -\gamma^\mu_{ij}\psi_j\overline{\psi}_i = -\mathrm{tr}[\gamma^\mu\psi\overline{\psi}]$$

という関係を使って変形しています。マイナスが付いているのはグラスマン数の反交換の関係によります。
$\log Z_2$ の exp 内はフーリエ変換によって運動量表示にいくので (電磁場はファインマンゲージを使います)

$$\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L}_D\right] = \exp\big[-\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\overline{\psi}(n,\boldsymbol{p})(-(i\omega+\mu)\gamma_0+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)\psi(n,\boldsymbol{p})\big]$$

$$\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L}_{EM}\right] = \exp\big[-\frac{1}{2\beta}\sum_l\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(-\omega_l^2-\boldsymbol{k}^2)A_\mu(l,\boldsymbol{k})A^\mu(l,\boldsymbol{k})\big]$$

電磁場に関しては、変形すれば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EM} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu (A_\mu \partial^\mu A^\nu) + A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}\partial^\mu (A_\mu \partial^\nu A_\nu) + \frac{1}{2}A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu \\
&= -\frac{1}{2}(-A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu + A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu \\
&= \frac{1}{2}A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu
\end{aligned}
$$

最後から二行目にいくときに表面項を落としています。これに $t \to -i\tau$ という置き換えを行えば (A_0 はユークリッド空間に置き換えていません)

$$
\int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}A_3 \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x [A_0(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2)A^0 + \cdots]\right]
$$

$$
= \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}A_3 \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x [A_0(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \nabla^2)A^0 - \cdots]\right]
$$

となるので、運動量表示では上のようになっています。同様に相互作用部分を変換するので

$$
-e^2 \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \int d^3x_1 d^3x_2 A_\mu A_\nu \mathrm{tr}(\gamma^\mu \psi\overline{\psi}\gamma^\nu \psi\overline{\psi})
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{-e^2}{\beta^6} \sum_{n_1,\cdots,n_4} \sum_{l_1,l_2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \int d^3x_1 d^3x_2 \int \frac{d^3p_1 \cdots d^3p_4 d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^{18}} \\
\times \exp[i(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_4 + \boldsymbol{k}_1)\cdot \boldsymbol{x}_1] \exp[-i(\omega_{n_1} - \omega_{n_4} + \omega_{l_1})\tau_1] \\
\times \exp[i(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k}_2)\cdot \boldsymbol{x}_2] \exp[-i(\omega_{n_3} - \omega_{n_2} + \omega_{l_2})\tau_2] \\
\times A_\mu(l_1, \boldsymbol{k}_1) A_\nu(l_2, \boldsymbol{k}_2) \mathrm{tr}[\gamma^\mu \psi(n_1, \boldsymbol{p}_1)\overline{\psi}(n_2, \boldsymbol{p}_2)\gamma^\nu \psi(n_3, \boldsymbol{p}_3)\overline{\psi}(n_4, \boldsymbol{p}_4)]
\end{aligned}
$$

ここの exp がクロネッカーデルタとデルタ関数となって

$$
\beta\delta(n_1, -n_4, l_1)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_4 + \boldsymbol{k}_1)\beta\delta(n_3, -n_2, l_2)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k}_2)
$$

クロネッカーデルタも見づらくなりそうなので括弧にして書いています。
これによる要請は

$$
n_1 = n_4 - l_1 \ , \ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_4 - \boldsymbol{k}_1
$$

$$n_3 = n_2 - l_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{k}_2$$

このようにしろということになります。
次にガウス積分の実行に対する制限 (exp 内と外にいる場の変数をそろえる) を見ると、電磁場に対しては

$$l_1 = -l_2\ ,\ \boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2$$

ディラック場に対しては

$$n_1 = n_2\ ,\ n_3 = n_4\ ,\ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_4 \tag{1a}$$

もしくは

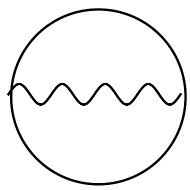
$$n_1 = n_4\ ,\ n_3 = n_2\ ,\ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_4\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 \tag{1b}$$

クロネッカーデルタとデルタ関数の制限にそれぞれこれを加えると

$$\text{(1a)}\cdots\quad \left.\begin{matrix} n_1 = n_4 - l_1\ ,\ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_4 - \boldsymbol{k}_1 \\ n_3 = n_2 - l_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{k}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{matrix} n_1 = n_3 + l_2\ ,\ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{k}_2 \\ n_3 = n_1 - l_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k}_2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{(1b)}\cdots\quad \left.\begin{matrix} n_1 = n_4 - l_1\ ,\ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_4 - \boldsymbol{k}_1 \\ n_3 = n_2 - l_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{k}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{matrix} n_1 = n_1 - l_2\ ,\ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{k}_2 \\ n_2 = n_2 + l_2\ ,\ \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{k}_2 \end{matrix}\right.$$

このようにクロネッカーデルタとデルタ関数が現われます。
(2a) の方の条件は $l_2 = 0, \boldsymbol{k}_2 = 0$ となっていることから運動量の移動が何もない状態で、フェルミオンの単独のループを光子がつないでいる図になりますが、QED では寄与しないものです (湯川理論のような質量が 0 でないスカラー場の理論だと効いてくる)。(1a) ではクロネッカーデルタとデルタ関数が二つとも同じ形で現われるので、片方は βV になり、もう片方が運動量保存としてクロネッカーデルタとデルタ関数となります。この場合ではフェルミオンの運動量を光子が動かすというものなので、図にすれば



このとき運動量保存として $\delta_{n_1,n_3+l_2}\delta^3(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{k}_2)$ がいます。
というわけで、まとめると (運動量積分を和に変えます)

$$\log Z = \frac{1}{2}\frac{-e^2}{\beta^6 V^6}(\beta V)^2 \sum_{n_1,n_3,l_2}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{k}_2} \frac{\int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu \exp[I_D + I_{EM}]}{\int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu \exp[I_D + I_{EM}]}$$
$$\times A_\mu(l_2,\boldsymbol{k}_2)A_\nu(l_2,\boldsymbol{k}_2)\mathrm{tr}[\gamma^\mu\psi(n_1,\boldsymbol{p}_1)\overline{\psi}(n_1,\boldsymbol{p}_1)\gamma^\nu\psi(n_3,\boldsymbol{p}_3)\overline{\psi}(n_3,\boldsymbol{p}_3)]$$

$$I_D = -\frac{1}{\beta V}\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\overline{\psi}(n,\boldsymbol{p})((i\omega+\mu)\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m)\psi(n,\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{\beta V}\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\overline{\psi}(n,\boldsymbol{p})S_F^{-1}\psi(n,\boldsymbol{p})$$

$$I_{EM} = -\frac{1}{2\beta V}\sum_l\sum_{\boldsymbol{k}}(-\omega_l^2-\boldsymbol{k}^2)A_\mu(l,\boldsymbol{k})A^\mu(l,\boldsymbol{k})] = -\frac{1}{2\beta V}\sum_l\sum_{\boldsymbol{k}}D^{-1}A^2(l,\boldsymbol{k})$$

頭についている $(\beta V)^2$ はクロネッカーデルタとデルタ関数によるものです。本当はもう一つ積分と和によってクロネッカーデルタとデルタ関数を潰さないと $(\beta V)(\beta\delta_{n_1,n_3+l_2}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{k}_2))$ のように片方に運動量保存としてクロネッカーデルタとデルタ関数が生きているんですが、式が長くなって面倒なので

$$\beta\delta_{n_1,n_3+l_2}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{k}_2)\ \Rightarrow\ \beta V$$

としています (後で元に戻します)。また、ここではファインマンパラメータをとっています。
これをガウス積分するときに分母と打ち消しあわずに生き残るのは、ディラック場に対しては

$$\frac{\gamma_\mu\int d\overline{\psi}d\psi\exp[-\frac{1}{\beta V}\overline{\psi}(n_1,\boldsymbol{p}_1)S_F^{-1}\psi(n_1,\boldsymbol{p}_1)]\psi(n_1,\boldsymbol{p}_1)\overline{\psi}(n_1,\boldsymbol{p}_1)}{\int d\overline{\psi}d\psi\exp[-\frac{1}{\beta V}\overline{\psi}(n_1,\boldsymbol{p}_1)S_F^{-1}\psi(n_1,\boldsymbol{p}_1)]}$$

$$\times\frac{\gamma_\nu\int d\overline{\psi}d\psi\exp[-\frac{1}{\beta V}\overline{\psi}(n_3,\boldsymbol{p}_3)S_F^{-1}\psi(n_3,\boldsymbol{p}_3)]\psi(n_3,\boldsymbol{p}_3)\overline{\psi}(n_3,\boldsymbol{p}_3)}{\int d\overline{\psi}d\psi\exp[-\frac{1}{\beta V}\overline{\psi}(n_3,\boldsymbol{p}_3)S_F^{-1}\psi(n_3,\boldsymbol{p}_3)]}$$

電磁場に対しては

$$\frac{\int dA_\mu\exp[-\frac{1}{2\beta V}D^{-1}A^2(l,\boldsymbol{k})]]A_\mu(l,\boldsymbol{k})A_\nu(l,\boldsymbol{k})}{\int dA_\mu\exp[-\frac{1}{2\beta V}D^{-1}A^2(l,\boldsymbol{k})]]} = \frac{g_{\mu\nu}}{4}\frac{\int dA_\mu\exp[-\frac{1}{2\beta V}D^{-1}A^2(l,\boldsymbol{k})]]A^2(l,\boldsymbol{k})}{\int dA_\mu\exp[-\frac{1}{2\beta V}D^{-1}A^2(l,\boldsymbol{k})]]}$$

$g_{\mu\nu}/4$ は $A_\mu A^\nu$ が $\mu=\nu$ のときにガウス積分に引っかかることから付けています (場の量子論の「次元正則化」参照)。
それぞれ実行すれば

$$\frac{\int d\overline{\psi}d\psi\exp[-\frac{1}{\beta V}\overline{\psi}(n_1,\boldsymbol{p}_1)S_F^{-1}\psi(n_1,\boldsymbol{p}_1)]\psi(n_1,\boldsymbol{p}_1)\overline{\psi}(n_1,\boldsymbol{p}_1)}{\int d\overline{\psi}d\psi\exp[-\frac{1}{\beta V}\overline{\psi}(n_1,\boldsymbol{p}_1)S_F^{-1}\psi(n_1,\boldsymbol{p}_1)]} = \frac{\beta VS_F\det S_F^{-1}}{\det S_F^{-1}} = \beta VS_F$$

$$\frac{g_{\mu\nu}}{4}\frac{\int dA_\mu\exp[-\frac{1}{2\beta V}D^{-1}A^2(l,\boldsymbol{k})]]A^2(l,\boldsymbol{k})}{\int dA_\mu\exp[-\frac{1}{2\beta V}D^{-1}A^2(l,\boldsymbol{k})]]} = g_{\mu\nu}\beta VD$$

ディラック場でのガウス積分はグラスマン数の場合に従い (場の量子論の「経路積分～ディラック場～」参照)、電磁場の方で 4 倍されるのは $\mu=0\sim3$ の 4 つ分があるからです。よって

$$
\begin{aligned}
\log Z_2 &= \frac{1}{2}\frac{-e^2}{\beta^6V^6}(\beta V)^2\sum_{n_1,n_3,l}\sum_{\boldsymbol{p}_1,p_3,k}(\beta V)^3\mathrm{tr}(g_{\mu\nu}D\gamma^\mu S_F\gamma^\nu S_F) \\
&= \frac{-1}{2}e^2\frac{1}{\beta V}\sum_{n_1,n_3,l}\sum_{\boldsymbol{p}_1,p_3,k}\mathrm{tr}(g_{\mu\nu}D\gamma^\mu S_F\gamma^\nu S_F) \\
&= \frac{-1}{2}e^2\beta^2V^2(\frac{1}{\beta^3V^3}\sum_{n_1,n_3,l}\sum_{\boldsymbol{p}_1,p_3,k}\mathrm{tr}(g_{\mu\nu}D\gamma^\mu S_F\gamma^\nu S_F)) \\
&= \frac{-1}{2}e^2\beta^2V^2(\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_1,n_3,l}\int\frac{d^3p_1d^3p_3d^3k}{(2\pi)^9}\mathrm{tr}(g_{\mu\nu}D\gamma^\mu S_F\gamma^\nu S_F)) \\
&= \frac{-1}{2}e^2\beta^2V^2\Big(\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_1,n_3,l}\int\frac{d^3p_1d^3p_3d^3k}{(2\pi)^9}\mathrm{tr}[\frac{-g_{\mu\nu}}{\omega_l^2+\boldsymbol{k}^2}\gamma^\mu\frac{-1}{p_1^\mu\gamma_\mu-m}\gamma^\nu\frac{-1}{p_3^\nu\gamma_\nu-m}]\Big)
\end{aligned}
$$

ここでの、D, S_F は

$$
g_{\mu\nu}D = D_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{\omega_l^2+\boldsymbol{k}^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}\quad (k^2 = (i\omega_l)^2-\boldsymbol{k}^2)
$$

$$
S_F = \frac{1}{-(i\omega+\mu)\gamma_0+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m} = \frac{-1}{p^\mu\gamma_\mu-m}\quad (p_0 = (i\omega+\mu))
$$

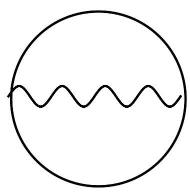
であって、これは電磁場とディラック場の伝播関数そのものです。ここではファインマンパラメータを使っていますが、固定しなければ

$$
D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\bigg(g_{\mu\nu}+(\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\bigg)
$$

となります。
残っている運動量保存をちゃんと書くことで

$$
\begin{aligned}
\log Z_2 = \frac{-1}{2}e^2\beta V& \\
&\times\Big(\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_1,n_2,l}\int\frac{d^3p_1d^3p_3d^3k}{(2\pi)^9}\beta\delta_{n_1,n_3+l}(2\pi)^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{k})\mathrm{tr}[\frac{-g_{\mu\nu}}{\omega_l^2+\boldsymbol{k}^2}\gamma^\mu\frac{-1}{p_1^\mu\gamma_\mu-m}\gamma^\nu\frac{-1}{p_3^\nu\gamma_\nu-m}]\Big)
\end{aligned}
$$

わざわざクロネッカーデルタとデルタ関数を残しておくのは、ファインマン則を綺麗に作るためです。この式の図は上でのものと同じで



これによってファインマン則が作れます。
QED での $\log Z$ に対するファインマン則も ϕ^4 理論と同じですが、伝播関数と頂点が変更されて

- 伝播関数
  - 光子

$$\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu}+(\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\quad (k_0=i\omega_n\ ,\ \omega_n=2\pi nT)$$

  - フェルミオン

$$\frac{-1}{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}=\frac{-1}{p_0\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}\quad (p_0=i\omega_n+\mu\ ,\ \omega_n=2\pi T(n+\frac{1}{2}))$$

- 頂点

$$-e\gamma_\mu\quad (\text{運動量保存：}(2\pi)^3\beta\delta_{n_1,\cdots}\delta^3(\boldsymbol{p}_1+\cdots))$$

もう一つ QED での追加の規則として、フェルミオンのループがあるときはトレースをつけてマイナスにするというもので、これはゼロ温度の場合と同じです。
ちなみに「$\log Z$ の計算〜ϕ^4 理論〜」の最後にふれたように、ゼロ温度の場合と同じように源を加えて生成汎関数 $Z[\eta,\overline{\eta},J]$ を使っても出てきます。今の場合では、exp の外に出てきた相互作用項は $\eta,\overline{\eta},J$ の汎関数微分となります。で、相互作用のないラグランジアンは伝播関数を含み、ディラック場では $\eta,\overline{\eta}$ で汎関数微分、電磁場は J で二回汎関数微分することで下に落ちてきます。つまり、今の場合 $(\overline{\psi}A\psi)^2$ なので、ディラック場の伝播関数が 2 個、と電磁場の伝播関数が 1 個出てきます。これは今まで計算してきた形と全く同じです。というわけで、汎関数微分をするだけで出てきます。
$\log Z_2$ の和を計算していきます。文字を整理して

$$\begin{aligned}\log Z_2=&\frac{-1}{2}e^2\beta V\\&\times\Big(\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_p,n_q,n_k}\int\frac{d^3pd^3qd^3k}{(2\pi)^9}\beta\delta_{n_p,n_q+n_k}(2\pi)^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\mathrm{tr}[\frac{-g_{\mu\nu}}{\omega_{n_k}^2+\boldsymbol{k}^2}\gamma^\mu\frac{-1}{p^\mu\gamma_\mu-m}\gamma^\nu\frac{-1}{q^\nu\gamma_\nu-m}]\Big)\end{aligned}$$

このトレース計算はゼロ温度でお馴染みで

$$\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}\gamma^\mu\frac{-1}{p^\alpha\gamma_\alpha-m}\gamma^\nu\frac{-1}{q^\beta\gamma_\beta-m}=\frac{\gamma^\mu(p^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\mu(q^\beta\gamma_\beta+m)}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)}$$

から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[\gamma^\mu(p^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\mu(q^\beta\gamma_\beta+m)] &= \mathrm{tr}[\gamma^\mu(p^\alpha\gamma_\alpha\gamma_\mu q^\beta\gamma_\beta+p^\alpha\gamma_\alpha\gamma_\mu m+q^\beta\gamma_\mu\gamma_\beta m+\gamma_\mu m^2)] \\
&= \mathrm{tr}[\gamma^\mu p^\alpha\gamma_\alpha\gamma_\mu q^\beta\gamma_\beta+\gamma^\mu\gamma_\mu m^2] \\
&= \mathrm{tr}[p^\alpha q^\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta+4m^2] \\
&= \mathrm{tr}[p^\alpha q^\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha(2g_{\mu\beta}-\gamma_\beta\gamma_\mu)+4m^2] \\
&= \mathrm{tr}[2g_{\mu\beta}p^\alpha q^\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha-p^\alpha q^\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu+4m^2] \\
&= \mathrm{tr}[2p^\alpha q_\mu\gamma^\mu\gamma_\alpha-p^\alpha q^\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu+4m^2] \\
&= 8p\cdot q-16p\cdot q+16m^2 \\
&= 8(-p\cdot q+2m^2)
\end{aligned}
$$

となるので

$$\log Z_2=-\frac{8}{2}e^2\beta V\Big(\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_p,n_q,n_k}\int\frac{d^3pd^3qd^3k}{(2\pi)^9}\beta\delta_{n_p,n_q+n_k}(2\pi)^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})(-p\cdot q+2m^2)[\frac{1}{k^2}\frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{q^2-m^2}]\Big)$$

そうすると、実行しなければいけない和は

$$I=\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_p,n_q,n_k}\frac{-p\cdot q+2m^2}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)}\beta\delta_{n_p,n_q+n_k}$$

ここでクロネッカーデルタを使ってから、解析接続して和を積分に変えても正しい答えを返してくれません。この問題はクロネッカーデルタによって、例えば n_p を $n_p=n_q+n_k$ と変えてしまうと解析接続を 1 つに決めることが出来なくなり、無限個の解析接続が可能になっていることによっておきます (裏を返せば、解析接続して和を積分に変えるという方法を使わなければ、クロネッカーデルタを使ってもかまわないということになります)。
この問題を回避するために、クロネッカーデルタを

$$\beta\delta_{n_p,n_q+n_k}=\int_0^\beta dx\exp[x(p_0-q_0-k_0)]$$

このように書き換えます。右辺の積分を普通に実行すると

$$\int_0^\beta dx\exp[x(p_0-q_0-k_0)]=\frac{\exp[\beta(p_0-q_0-k_0)]-1}{p_0-q_0-k_0}$$

このようになるので

$$\beta\delta_{n_p,n_q+n_k}=\frac{\exp[\beta(p_0-q_0-k_0)]-1}{p_0-q_0-k_0}$$

これを使うことで

$$I=\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_p,n_q,n_k}\frac{-p\cdot q+2m^2}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)}\frac{\exp[\beta(p_0-q_0-k_0)]-1}{p_0-q_0-k_0}$$

ここにさらに

$$-\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]$$

を作用させます。これは

$$-\exp[\beta(\frac{2i\pi n_k}{\beta}+\frac{2i\pi(n_q+\frac{1}{2})}{\beta}+\mu-\mu)]=-\exp[2i\pi n_k+2i\pi(n_q+\frac{1}{2})]=1$$

であるために、影響を与えません。そうすると

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{\beta^3}\sum_{n_p,n_q,n_k}\frac{-p\cdot q+2m^2}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)}\frac{-\exp[\beta(p_0-q_0-k_0+k_0+q_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\\ &= \frac{1}{\beta^3}\sum_{n_p,n_q,n_k}\frac{-p\cdot q+2m^2}{k^2(p^2-m^2)(q^2-m^2)}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\end{aligned}$$

この変形によってこの後で実行する和から積分への変更時に、経路からの寄与が消える形になってくれるので、余計なことを気にせずに行えます。和は上手いこと分母が分かれているので

$$I=\frac{1}{\beta^3}\sum_{n_k}\frac{1}{k^2}\sum_{n_q}\frac{1}{(q^2-m^2)}\sum_{n_p}\frac{-p\cdot q+2m^2}{(p^2-m^2)}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}$$

となって、順番に計算していけばいいです。n_p では

$$\begin{aligned}I_p =&\frac{1}{\beta}\sum_{n_p}\frac{-p\cdot q+2m^2}{(p^2-m^2)}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\\ =&\frac{1}{\beta}\sum_{n_p}\frac{-(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\\ =&\frac{1}{\beta}\sum_{n_p}\frac{-(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(p_0-E_{\boldsymbol{p}})(p_0+E_{\boldsymbol{p}})}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\qquad (E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})\\ =&\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dp_0}{2\pi i}\frac{-(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(p_0-E_{\boldsymbol{p}})(p_0+E_{\boldsymbol{p}})}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\\ &-\int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon}\frac{dp_0}{2\pi i}\frac{-(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(p_0-E_{\boldsymbol{p}})(p_0+E_{\boldsymbol{p}})}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1}\\ &-\int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon}\frac{dp_0}{2\pi i}\frac{-(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(p_0-E_{\boldsymbol{p}})(p_0+E_{\boldsymbol{p}})}\frac{-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)]}{p_0-q_0-k_0}\frac{1}{e^{\beta(\mu-p_0)}+1}\end{aligned}$$

μ があるときに積分に変えると出てくるもう一つの積分は寄与しないので無視します。

$$f(p_0,q_0,k_0)=\frac{-(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{p_0-q_0-k_0}(-\exp[\beta(p_0-\mu)]+\exp[\beta(k_0+q_0-\mu)])$$

とします。これは $f(p_0, q_0, k_0)$ が特異点を持っていないために、この後の留数定理に引っかからないからです。そのために、余計なことを気にせずに順番に和の計算をできます。

$$
\begin{aligned}
I_p =& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{(p_0 - E_{\boldsymbol{p}})(p_0 + E_{\boldsymbol{p}})} f(p_0, q_0, k_0) \\
& - (-2\pi i) \frac{1}{2\pi i} \frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}} - \mu)} + 1} - 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{-2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta(\mu + E_{\boldsymbol{p}})} + 1} \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{(p_0 - E_{\boldsymbol{p}})(p_0 + E_{\boldsymbol{p}})} f(p_0, q_0, k_0) \\
& + \frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}} - \mu)} + 1} + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta(\mu + E_{\boldsymbol{p}})} + 1}
\end{aligned}
$$

第一項も温度依存しているので積分を実行します。見やすくするために $p_0 = ip_0$ として

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{(ip_0 - E_{\boldsymbol{p}})(ip_0 + E_{\boldsymbol{p}})} f(ip_0, q_0, k_0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{(ip_0 - E_{\boldsymbol{p}})(ip_0 + E_{\boldsymbol{p}})} \frac{-(ip_0 q_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) + 2m^2}{ip_0 - q_0 - k_0} (-\exp[\beta(ip_0 - \mu)] + \exp[\beta(k_0 + q_0 - \mu)]) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{-(p_0 - iE_{\boldsymbol{p}})(p_0 + iE_{\boldsymbol{p}})} \frac{-(ip_0 q_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) + 2m^2}{ip_0 - q_0 - k_0} (-\exp[i\beta(p_0 + i\mu)] + \exp[\beta(k_0 + q_0 - \mu)])
\end{aligned}
$$

これは上半円の経路を取ることで、留数定理によって

$$
\begin{aligned}
& \frac{2\pi i}{2\pi} \frac{1}{-2iE_{\boldsymbol{p}}} \frac{-(-E_{\boldsymbol{p}} q_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) + 2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}} - q_0 - k_0} (-\exp[i\beta(iE_{\boldsymbol{p}} + i\mu)] + \exp[\beta(k_0 + q_0 - \mu)]) \\
&= -\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{-(-E_{\boldsymbol{p}} q_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) + 2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}} - q_0 - k_0} (-\exp[\beta(-E_{\boldsymbol{p}} - \mu)] + \exp[\beta(k_0 + q_0 - \mu)]) \\
&= -\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
I_p &= -\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0) + \frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}} - \mu)} + 1} + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta(\mu + E_{\boldsymbol{p}})} + 1} \\
&= \frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}} - \mu)} + 1} + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} \left(\frac{1}{e^{\beta(\mu + E_{\boldsymbol{p}})} + 1} - 1\right) \\
&= \frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1) \\
&= I'_p(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)
\end{aligned}
$$

フェルミオンの分布関数は μ の符号に合わせて

$$N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) = \frac{1}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+1}\ ,\ N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) = \frac{1}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}+1}$$

このように書いています。
次に n_q の和を取ります

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \frac{1}{\beta}\sum_{n_q}\frac{1}{(q^2-m^2)}I'_p(E_{\boldsymbol{p}},q_0,k_0)\\
&= \frac{1}{\beta}\sum_{n_q}\frac{1}{q_0^2-E_{\boldsymbol{q}}^2}[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}},q_0,k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{f(-E_{\boldsymbol{p}},q_0,k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}}(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)] \quad (E_{\boldsymbol{q}}=\sqrt{\boldsymbol{q}^2+m^2})\\
&= \frac{1}{\beta}\sum_{n_q}\frac{1}{(q_0-E_{\boldsymbol{q}})(q_0+E_{\boldsymbol{q}})}[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}},q_0,k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{f(-E_{\boldsymbol{p}},q_0,k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}}(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)]
\end{aligned}$$

[ ] の中の $f(\pm E_{\boldsymbol{p}},q_0,k_0)$ に係数がくっついているだけなので、同じようにやればいいです。というわけで

$$
\begin{aligned}
I_{p,q} =& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} [\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)] \\
&- \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \frac{1}{e^{\beta(q_0-\mu)} + 1} \\
&- \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \frac{1}{e^{\beta(\mu-q_0)} + 1} \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} I_p'(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0) \\
&- \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \frac{1}{e^{\beta(q_0-\mu)} + 1} \\
&- \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \frac{1}{e^{\beta(\mu-q_0)} + 1} \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} I_p'(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0) \\
&- (-2\pi i) \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \frac{1}{e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)} + 1} \\
&- 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{-2E_{\boldsymbol{q}}} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \frac{1}{e^{\beta(\mu+E_{\boldsymbol{q}})} + 1} \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \\
&+ \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+ \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{(q_0 - E_{\boldsymbol{q}})(q_0 + E_{\boldsymbol{q}})} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, q_0, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)\Big] \\
&+ \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I_p'(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I_p'(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0) N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})
\end{aligned}
$$

第一項は上での結果を考えれば

$$
\frac{-1}{2E_{\boldsymbol{q}}} [\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)] = \frac{-1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I_p'(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
I_{p,q} =& \frac{-1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I'_p(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0) + \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I'_p(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I'_p(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0) N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) \\
=& \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I'_p(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} I'_p(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - 1) \\
=& \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1) \Big] N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+ \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}} \Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}) + \frac{f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, k_0)}{2E_{\boldsymbol{p}}} (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1) \Big] (N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - 1) \\
=& I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0)
\end{aligned}
$$

最後に n_k の計算します

$$
\begin{aligned}
I_{p,q,k} =& \frac{1}{\beta} \sum_{n_k} \frac{1}{k^2} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) \\
=& \frac{1}{\beta} \sum_{n_k} \frac{1}{k_0^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) \qquad (E_{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{k}|) \\
=& \frac{1}{\beta} \sum_{n_k} \frac{1}{(k_0 - E_{\boldsymbol{k}})(k_0 + E_{\boldsymbol{k}})} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{1}{(k_0 - E_{\boldsymbol{k}})(k_0 + E_{\boldsymbol{k}})} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) \\
&+ \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{(k_0 - E_{\boldsymbol{k}})(k_0 + E_{\boldsymbol{k}})} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \\
&+ \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{(k_0 - E_{\boldsymbol{k}})(k_0 + E_{\boldsymbol{k}})} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -k_0) \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{1}{(k_0 - E_{\boldsymbol{k}})(k_0 + E_{\boldsymbol{k}})} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) \\
&+ (-2\pi i) \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, E_{\boldsymbol{k}}) \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \\
&+ (-2\pi i) \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}}) \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1} \\
=& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{1}{(k_0 - E_{\boldsymbol{k}})(k_0 + E_{\boldsymbol{k}})} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, k_0) \\
&- \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, E_{\boldsymbol{k}}) N_B(E_{\boldsymbol{k}}) - \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}}) N_B(E_{\boldsymbol{k}})
\end{aligned}
$$

ボソンの分布関数は

$$
N_B(E_{\boldsymbol{k}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}} - 1}
$$

第一項はフェルミオンの時と変わらないので

$$
\begin{aligned}
&\frac{-1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})}{2E_{\boldsymbol{p}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})}{2E_{\boldsymbol{p}}}(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)\Big]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\\
&\qquad+\frac{-1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})}{2E_{\boldsymbol{p}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})}{2E_{\boldsymbol{p}}}(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)\Big](N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1)\\
&=\frac{-1}{2E_{\boldsymbol{k}}}I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
I_{p,q,k} &= \frac{-1}{2E_{\boldsymbol{k}}}I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_B(E_{\boldsymbol{k}})-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})N_B(E_{\boldsymbol{k}})\\
&= -\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}[I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_B(E_{\boldsymbol{k}})+I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})(N_B(E_{\boldsymbol{k}})+1)]
\end{aligned}
$$

$I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})$ をちゃんと書いて整理します。$I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})$ は

$$
\begin{aligned}
&I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})\\
&=\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)\big]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\\
&\quad+\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)\big](N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1)\\
&=\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))\big]\\
&\quad+\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}))\big]\\
&\quad-\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)\big]\\
&=\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\big]\\
&\quad+\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big]\\
&\quad-\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})\big]\\
&=\frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\Big[f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\\
&\qquad+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})\big[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+1\big]\\
&\qquad+f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})\big[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\big]\\
&\qquad+f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})\big[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big]\Big]
\end{aligned}
$$

$I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})$ はこれの $E_{\boldsymbol{k}}$ の符号を反転させるだけなので

$$
\begin{aligned}
I'_{p,q}(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}}) =& \frac{1}{4E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}}\Big[f(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+ f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})\big[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) + 1\big] \\
&+ f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})\big[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\big] \\
&+ f(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})\big[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big]\Big]
\end{aligned}
$$

あわせれば

$$
\begin{aligned}
I_{p,q,k} = -& \frac{1}{8E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\big[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, E_{\boldsymbol{k}}) + (1 + N_B(E_{\boldsymbol{k}}))f(E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})\big]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+ \big[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, E_{\boldsymbol{k}}) + (1 + N_B(E_{\boldsymbol{k}}))f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})\big](N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1)(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - 1) \\
&+ \big[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, E_{\boldsymbol{k}}) + (1 + N_B(E_{\boldsymbol{k}}))f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})\big][N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - 1]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+ \big[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, E_{\boldsymbol{k}}) + (1 + N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}})\big][N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - 1]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\Big]
\end{aligned}
$$

これの計算は相当長くなるので、途中計算は分けておきます。相殺項によって発散を除去した形で $\log Z_2$ は

$$
\begin{aligned}
\log Z_2 =& -\frac{8}{2}e^2\beta V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{k})I_{p,q,\boldsymbol{k}} \\
=& \frac{1}{2}e^2\beta V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}) \\
&\times\Big[-\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1 + \frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{q}})^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2}\big)[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})] \\
&\quad - \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1 + \frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}})^2 - E_{\boldsymbol{k}}^2}\big)[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})] \\
&\quad - \frac{4}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{k}}}N_B(E_{\boldsymbol{k}})n_F(E_{\boldsymbol{p}})\Big]
\end{aligned}
$$

これを見ると、分布関数が単独でいるような項は出てきません。発散の除去のところを見れば分かりますが、分布関数が単独で現われる項は相殺項によって打ち消されるようになっています。
最後の項はボソン部分の積分を実行できて

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{N_B(E_{\boldsymbol{k}})n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{k}}} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{k}}}N_B(E_{\boldsymbol{k}})n_F(E_{\boldsymbol{p}}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}}N_B(E_{\boldsymbol{k}}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{|\boldsymbol{k}|}N_B(E_{\boldsymbol{k}}) \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|}{e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1} \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{6}(\frac{\pi}{\beta})^2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}} \\
&= \frac{1}{12}T^2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}
\end{aligned}
$$

残りの項では $\boldsymbol{k}$ 積分を実行して $(E=|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)$

$$
\begin{aligned}
\log Z_2 = &-\frac{1}{6}e^2\beta VT^2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}} \\
&-\frac{1}{2}e^2\beta V\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\Big[\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})] \\
&\qquad +\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]\Big]
\end{aligned}
$$

後は目的に合わせた極限を取って積分を実行すればいいです。