$\log Z$ の摂動計算〜ϕ^4 理論〜

統計力学を見れば分かるように熱力学な物理量を求めるには分配関数というより、それの対数を取ったもの、つまり熱力学ポテンシャルが重要になってきています。というわけで、$\log Z$ を摂動計算してみます。
摂動計算でなくてはならない理由は簡単で、相互作用があるときには汎関数積分を厳密に実行できないので、結合定数が小さいとして展開して計算しましょうということです。
分配関数の形自体はゼロ温度の場合とほぼ変わらないので同じ形で展開できることは分かりますが、対数を取るので若干形が変わります。分配関数を相互作用項 S_I が小さいとして単純に展開してみると (S_0 は相互作用項を含まない作用、規格化定数は無視します)

$$
\begin{aligned}
Z = \int \mathcal{D}\phi e^{S} = \int \mathcal{D}\phi e^{S_0+S_I} &= \int \mathcal{D}\phi e^{S_0} e^{S_I} \\
&= \int \mathcal{D}\phi e^{S_0}(1+S_I+\cdots) \\
&= \int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} S_I^l
\end{aligned}
$$

これに対して対数を取れば

$$
\begin{aligned}
\log Z &= \log[\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} S_I^l] \\
&= \log[\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}(1+\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} S_I^l)] \\
&= \log[\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} + \int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} S_I^l] \\
&= \log\Big[\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}(1+\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} S_I^l}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}})\Big] \\
&= \log[\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}] + \log\Big[1+\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} S_I^l}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}}\Big] \\
&= \log Z_0 + \log Z_I
\end{aligned}
$$

というわけで、計算の対象となるのは $\log Z_I$ の中の第二項です。
具体的に実数スカラー場での ϕ^4 理論を使って計算してみます。そうすると作用の相互作用部分は

$$
S_I = -\lambda \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \phi^4
$$

このようになるので、$\log Z_I$ の λ^2 まで取り出すと

$$
\begin{aligned}
\log Z_I &= \log\Big[1+\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} S_I}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}} + \frac{1}{2}\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} S_I^2}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}}\Big] \\
&= \log\Big[1+\lambda\frac{-\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \phi^4}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \phi^8}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}}\Big]
\end{aligned}
$$

log 内の 1 以降は微小だということから展開して λ^2 までの項を拾えば

$$
\begin{aligned}
\log Z_I &= \log[1+\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}S_I}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}+\frac{1}{2}\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}S_I^2}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}] \\
&= \frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}S_I}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}+\frac{1}{2}\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}S_I^2}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}-\frac{1}{2}\Big(\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}S_I}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}\Big)^2 \\
&= \lambda\frac{-\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\phi^4}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\phi^8}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}-\frac{\lambda^2}{2}\Big(\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\phi^4}{\int\mathcal{D}\phi e^{S_0}}\Big)^2 \\
&= \log Z_1+\log Z_2
\end{aligned}
$$

λ が 1 次のオーダである $\log Z_1$ を具体的に計算していきます。まず $\phi(\tau,\boldsymbol{x})$ のフーリエ展開

$$
\phi(\tau,\boldsymbol{x})=\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\phi_n(\boldsymbol{p})\quad(\omega_n=2n\pi T)
$$

を代入します。相互作用なしの S_0 は「虚時間法〜クライン・ゴルドン場〜」でやっていて

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x((\frac{\partial\phi}{\partial\tau})^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2) \\
&= -\frac{1}{2\beta}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')\beta\delta_{n,-n'}(-\omega_n\omega_{n'}-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'+m^2)\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_{n'}(\boldsymbol{p}')) \\
&= -\frac{1}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3}\beta^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_{-n}(-\boldsymbol{p})\quad(\omega_{n'}=2\pi n'T=-2\pi nT=-\omega_n=\omega_{-n}) \\
&= -\frac{1}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})
\end{aligned}
$$

$\log Z_1$ でもフーリエ展開の式を入れて (測度を $\mathcal{D}\phi$ のまま書きますが、フーリエ変換したときの振幅 $\phi_n(\boldsymbol{p})$ に変わっています)

$$
\begin{aligned}
\log Z_1 &= \lambda \frac{-\int \mathcal{D}\phi e^{S_0} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi^4}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}} \\
&= \frac{1}{\beta^4} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \sum_{n_1,\cdots n_4} \int \frac{d^3p_1 \cdots d^3p_4}{(2\pi)^{12}} \exp[i(\boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_4)\cdot \boldsymbol{x}] \exp[-i(\omega_{n_1} + \cdots + \omega_{n_4})\tau] \\
&\qquad\qquad \times \frac{-\lambda \int \mathcal{D}\phi e^{S_0}}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}} \phi_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\phi_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\phi_{n_3}(\boldsymbol{p}_3)\phi_{n_4}(\boldsymbol{p}_4) \\
&= -\frac{\lambda}{\beta^4} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \sum_{n_1,\cdots n_4} \int \frac{d^3p_1 \cdots d^3p_4}{(2\pi)^{12}} \exp[i(\boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_4)\cdot \boldsymbol{x}] \exp[-i(\omega_{n_1} + \cdots + \omega_{n_4})\tau] \\
&\qquad\qquad \times \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp[-\frac{1}{2\beta}\sum_i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}(\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]\phi_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\phi_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\phi_{n_3}(\boldsymbol{p}_3)\phi_{n_4}(\boldsymbol{p}_4)}{\int \mathcal{D}\phi \exp[-\frac{1}{2\beta}\sum_i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}(\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]} \\
&= -\frac{\lambda}{\beta^4} \sum_{n_1,\cdots n_4} \int \frac{d^3p_1 \cdots d^3p_4}{(2\pi)^{12}} (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_4)\beta\delta_{n_1\cdots n_4} \\
&\qquad\qquad \times \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp[-\frac{1}{2\beta}\sum_i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}(\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]\phi_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\phi_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\phi_{n_3}(\boldsymbol{p}_3)\phi_{n_4}(\boldsymbol{p}_4)}{\int \mathcal{D}\phi \exp[-\frac{1}{2\beta}\sum_i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}(\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]}
\end{aligned}
$$

汎関数積分の状況を見やすくするために、運動量を離散的だとして積分を和に置き換えて (V は三次元体積)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\int \mathcal{D}\phi \exp[-\frac{1}{2\beta V}\sum_i \sum_{\boldsymbol{q}}(\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]\phi_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\phi_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\phi_{n_3}(\boldsymbol{p}_3)\phi_{n_4}(\boldsymbol{p}_4)}{\int \mathcal{D}\phi \exp[-\frac{1}{2\beta V}\sum_i \sum_{\boldsymbol{q}}((\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]} \\
&\quad = \frac{\int \mathcal{D}\phi \prod_i \prod_{\boldsymbol{q}} \exp[-\frac{1}{2\beta V}(\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]\phi_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\phi_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\phi_{n_3}(\boldsymbol{p}_3)\phi_{n_4}(\boldsymbol{p}_4)}{\int \mathcal{D}\phi \prod_i \prod_{\boldsymbol{q}} \exp[-\frac{1}{2\beta V}((\omega_i^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]}
\end{aligned}
$$

このときに、分母、分子両方の $\int \mathcal{D}\phi$ 積分はガウス積分の形っぽいので積分が実行できそうな雰囲気になっています。というわけで、積分を実行するために構造を調べます。
ϕ の変数が異なっていることから、exp 内の i が n_1, n_2, n_3, n_4、$\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ のどれかと一致している場合に $\phi_{n_1}(\boldsymbol{p}_1), \phi_{n_2}(\boldsymbol{p}_2), \phi_{n_3}(\boldsymbol{p}_3), \phi_{n_4}(\boldsymbol{p}_4)$ が $\int \mathcal{D}\phi$ 積分にひっかかるという形になっています。そして、i と $\boldsymbol{q}$ が $n_1, \cdots, n_4, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_4$ のどれかと一致していないなら分母と同じになって打ち消しあうために、何の寄与もしません (無限積の中で 1 をかけるだけ)。さらに、もし $i = n_1, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_1$ というだけになっていたら、ガウス積分の性質によって積分は 0 になってしまいます。しかし、デルタ関数 $\delta^3(\boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_4)$、$\delta_{n_1\cdots n_4}$ によって、$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_4$, $n_1 = -n_3, n_2 = -n_4$、もしくは入れ替えた $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_3$, $n_1 = -n_4, n_2 = -n_3$ とか、$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_4$, $n_1 = -n_2, n_3 = -n_4$、という 3 つのパターンが許されるような制限がかけられています。この制限によって積分は 0 にならず、しかも簡単な格好をします。また、これらの制限に持っていくことで、積分は 2 つ落ち、デルタ関数は $(2\pi)^3\delta(0)$ となるので V に変わります ($(2\pi)^3\delta(0) = V$)。
例えば、$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$, $n_1 = -n_2$, $\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_4$, $n_3 = -n_4$ でやっていくと

$$\frac{\int\mathcal{D}\phi\prod_i\prod_{\boldsymbol{q}}\exp[-\frac{1}{2\beta V}(\omega_i^2+\boldsymbol{q}^2+m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]\phi_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\phi_{-n_1}(-\boldsymbol{p}_1)\phi_{n_3}(\boldsymbol{p}_3)\phi_{-n_3}(-\boldsymbol{p}_3)}{\int\mathcal{D}\phi\prod_i\prod_{\boldsymbol{q}}\exp[-\frac{1}{2\beta V}((\omega_i^2+\boldsymbol{q}^2+m^2)\phi_i(\boldsymbol{q})\phi_i(\boldsymbol{q})]}$$

$$=\frac{\int\mathcal{D}\phi\prod_i\prod_{\boldsymbol{q}}\exp[-\frac{1}{2\beta V}(\omega_i^2+\boldsymbol{q}^2+m^2)\phi_i^2(\boldsymbol{q})]\phi_{n_1}^2(\boldsymbol{p}_1)\phi_{n_3}^2(\boldsymbol{p}_3)}{\int\mathcal{D}\phi\prod_i\prod_{\boldsymbol{q}}\exp[-\frac{1}{2\beta V}((\omega_i^2+\boldsymbol{q}^2+m^2)\phi_i^2(\boldsymbol{q})]}$$

そしてこの場合、$i=n_1,\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_1$ と $i=n_3,\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_3$ のときだけがガウス積分として値を返すことが分かります。これによって単純なガウス積分となって

$$\frac{\int d\phi_1(\boldsymbol{p}_1)\exp[-\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)\phi_1^2(\boldsymbol{p}_1)]\phi_1^2(\boldsymbol{p}_1)}{\int d\phi_1(\boldsymbol{p}_1)\exp[-\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)\phi_1^2(\boldsymbol{p}_1)]}\frac{\int d\phi_3(\boldsymbol{p}_3)\exp[-\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)\phi_3^2(\boldsymbol{p}_3)]\phi_3^2(\boldsymbol{p}_3)}{\int d\phi_3(\boldsymbol{p}_3)\exp[-\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)\phi_3^2(\boldsymbol{p}_3)]}$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{4(\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2))^3}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\pi}{\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)}\right)^{1/2}}\frac{\left(\frac{\pi}{4(\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2))^3}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\pi}{\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)}\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{(\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2))^3}\right)^{1/2}}{\pi\left(\frac{1}{\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)}\right)^{1/2}}\frac{\left(\frac{1}{(\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2))^3}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)}\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)}\frac{1}{\frac{1}{2\beta V}(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)}$$

$$=\frac{\beta^2V^2}{(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)}$$

というわけで、$\log Z_1$ にこの結果を入れると

$$\begin{aligned}
-\frac{\lambda}{\beta^4V^4}\sum_{n_1,n_3}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3}\beta V\frac{\beta^2V^2}{(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)}\\
=-\frac{\lambda}{\beta V}\sum_{n_1,n_3}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3}\frac{1}{(\omega_{n_1}^2+\boldsymbol{p}_1^2+m^2)(\omega_{n_3}^2+\boldsymbol{p}_3^2+m^2)}\\
=-\frac{\lambda}{\beta V}(\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2})^2
\end{aligned}$$

上で言ったように、$\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2$, $n_1=-n_2$, $\boldsymbol{p}_3=-\boldsymbol{p}_4$, $n_3=-n_4$ とすることでクロネッカーデルタとデルタ関数は消えますし、$(2\pi)^3\delta^3(0)=V$ です。
まだデルタ関数による場合分けは他に２つあります。しかし、行う計算は変わらないので、結果は同じになります。よって、単純に３倍すればいいだけなので $\log Z_1$ は

$$\begin{aligned}
\log Z_1 &= -\frac{3\lambda}{\beta V}(\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2})^2\\
&= -\frac{3\lambda}{V}\beta(\frac{1}{\beta}\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2})^2
\end{aligned}$$

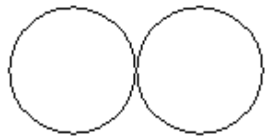
運動量の和を積分にすれば

$$\log Z_1 = -3\lambda\beta V(\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2})^2$$

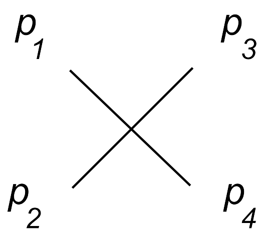
ここで、ゼロ温度の場合と同じように考えると、図を描くことが出来そうです。つまり、

$$\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}$$

は、あからさまに伝播関数の形をしているということと、和と 3 次元積分 (ループ積分) があることから



こんな図が描けます。これは、ループを持った場合のファインマン則そのものです。この前段階の図としては



このようになっており、クロネッカーデルタとデルタ関数の制限に対応する $(\omega_n,\boldsymbol{p})$ の線が結ばれます。このことから分かるように、線の結び方の場合の数が前にかかることになります (上の場合では最後にかけた 3 がそれに相当する)。
そして、真ん中の頂点に対しては、運動量保存のデルタ関数をくっつけて

$$-\lambda\beta(2\pi)^3\delta_{fi}\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)$$

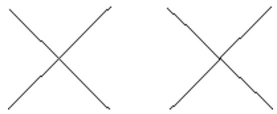
保存している状況でなら単に

$$-\lambda\beta V \qquad ((2\pi)^3\delta(0)=V)$$

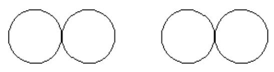
となります。これが、$\log Z$（少し変更すれば熱力学ポテンシャル) に対するファインマン則です。$\log Z$ のファインマン図は常にループを持った状況で作られるので、伝播関数はループ積分を含んで現われます。
次に $\log Z_2$ について見ていきます。$\log Z_2$ は

$$\log Z_2 = \frac{1}{2}\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}S_I^2}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}S_I}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0}}\Big)^2$$

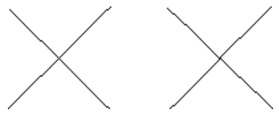
これの第二項は $\log Z_1$ の二乗なので、図としては単に



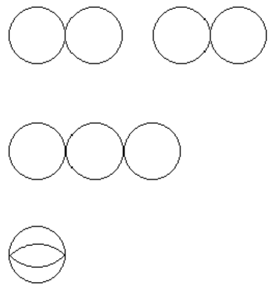
このようになり、線をくっつければ



次に第一項を見てみると、相互作用項 S_I の二乗があることから



という $\log Z_2$ の第二項と同じ図を用意します。今度の場合では、運動量はデルタ関数によって二つのバツの図の線にいる運動量はお互いにくっつけるので



このような三種類の図を作れます (本来なら、これらの図の前には線の結び方の場合の数がかかります)。ここで、$\log Z_2$ の第二項と同じ図が現われているために、この図はお互いに打ち消しあいます。つまり、$\log Z_2$ の計算においては、このような分離した図というのは寄与しません。これは $\log Z_2$ の場合が特殊なのではなくて、$\log Z$ の計算においては常に分離した図は寄与を与えません。
$\log Z$ に対するファインマン則をまとめておきます

- 分離している図は無視して、接続しているものだけを考える
- 運動量保存 $(\delta_{n_1,n_2,\cdots}, \delta^3(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\cdots))$ に対応する線の結び方による場合の数をかける
- 結ばれている線に対しては $\sum\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}G_0(\omega_n,\boldsymbol{p})$ を当てる。ここでの $G_0(\omega_n,\boldsymbol{p})$ は対応する粒子の最低次の伝播関数
- 頂点に対しては $-\lambda$
- 運動量保存に対応する頂点で $\beta\delta_{n_1,n_2,\cdots}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\cdots)$ をかける。もしくは、保存した状態の頂点では βV をかける。

また、ここでやったきたことは Z を計算してから log を取っても同じになります。実際に見ておきます。面倒なので、ゼロ温度での生成汎関数を使ってしまって (分配関数にしたければユークリッド化して、τ の積分範囲を $0\sim\beta$ にすればいいだけ)

$$Z_0[J]=\int\mathcal{D}\phi\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\phi\left(\Box+m^2\right)\phi\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$

で、$\mathcal{D}\phi$ の積分にひっかかている部分は源のない生成汎関数なので Z_0 と書くことにします (「経路積分〜クライン・ゴルドン場〜」では規格化定数に入れてましたが、今の場合では温度依存するので取り出しておきます)。ここでの、Δ_F は i を含めていない伝播関数です。そして、相互作用ありでの生成汎関数は

$$Z[J] = Z_0 \exp\left[i\int d^4z\mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$

$$\exp\left[\int d^4z\frac{-i\lambda}{4!}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4\right] = 1-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4$$

規格化による分母は無視しています。で、相互作用による部分を計算していって $J=0$ にすれば

$$Z = Z_0[1-i\lambda\int d^4z(-3\left(\Delta_F(0)\right)^2)]$$

というのが出てきます (「経路積分〜クライン・ゴルドン場 (相互作用あり)〜」参照)。これの対数を取り、λ が小さいとして展開して

$$\begin{aligned}\log Z &= \log Z_0 + \log[1-i\lambda\int d^4z(-3\left(\Delta_F(0)\right)^2)]\\ &= \log Z_0 + 3i\lambda(\Delta_F(0))^2\int dz^4\\ &= \log Z_0 - 3i\lambda(i\Delta_F(0))^2\int dz^4\end{aligned}$$

これを有限温度の場合に変更します。$i\Delta_F(0)$ というのはファインマン図で言えばループによる図にあたり、ゼロ温度では

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2}$$

なので、$p_0 = i\omega_n$、$d^4p = id^4p_E$ として有限温度に変更することで

$$\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}$$

そして、d^4z 積分は $-id\tau d^3z$ なので β と V をつくることになるので

$$\log Z = \log Z_0 - 3\lambda\beta V(\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2})^2$$

結局、同じものが出てきます。