虚時間法〜ディラック場〜

ディラック場を使った場合での分配関数の表現を求めます。ディラック場でもクライン・ゴルドン場と同じように exp 内の時間を虚時間に持っていくだけで定式化されます。また、明確には書きませんが $\psi, \psi^\dagger$ はスピノール成分を持つということに注意してください。
最初にディラック場での伝播関数を導きます。ゼロ温度でのディラック方程式は

$$(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi = 0$$

これから

$$(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial \tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi(x) = 0$$

このような有限温度でのディラック方程式に移します。ここからゼロ温度と同じように考えて、ディラック場での 2 点相関関数 (伝播関数)$\mathcal{S}_F$ が

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\mathcal{S}_F(x-y) = i\delta^4(x-y)$$

このようにして求まるとすれば、有限温度での 2 点相関関数 S_F はクライン・ゴルドン場と同じように

$$(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial \tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)S_F(\tau, \boldsymbol{x}) = -\delta(\tau)\delta^3(\boldsymbol{x})$$

そして、2 点相関関数のフーリエ変換

$$S_F(\tau, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_n\tau + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} S_F(\omega_n, \boldsymbol{p})$$

の両辺に対してディラック方程式の演算子を作用させることで

$$\begin{aligned}
-\delta(\tau)\delta^3(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial \tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)e^{-i\omega_n\tau + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} S_F(\omega_n, \boldsymbol{p}) \\
&= \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(i\omega_n\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m)S_F(\omega_n, \boldsymbol{p})e^{-i\omega_n\tau + ipx}
\end{aligned}$$

というわけで、有限温度での 2 点相関関数は

$$S_F(\omega_n, \boldsymbol{p}) = \frac{-1}{i\omega_n\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m}$$

また、松原振動数 ω_n はフェルミオンなので、$(2n+1)\pi/\beta$ です。
ディラック場を扱う時の注意として、ガンマ行列はミンコフスキー空間での代数を用いているということです ($\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$)。ここが少し捻られた状況になっていて、運動量の時間成分はウィック回転させられたもの

になっているのに対して、ガンマ行列は変更されずに残されています。そのために、クライン・ゴルドン場のときと違って、この段階ではユークリッド空間での 2 点相関関数と対応していません (ガンマ行列もユークリッド空間へ接続する必要がある)。しかし、これは運動量の時間成分を $p_0 = i\omega_n$ だと思ってしまえば、ミンコフスキー空間での 4 次元運動量と同じになっているために、ミンコフスキー空間での内積計算になっています。なので、結局はただのミンコフスキー空間での内積計算をした後に p_0 を $i\omega_n$ に直せばいいだけという分かりやすい構造にはなっています。

これが面倒だと思うなら、ガンマ行列も回転させて完全にユークリッド空間に持っていき、ユークリッド空間での 2 点相関関数にしてしまえばいいです。そうすることで内積計算が全部ユークリッド空間での計算になります (計算した後にミンコフスキー空間に戻せばいい)。

ここからは分配関数を求めていきます。ゼロ温度でのディラック場に対する経路積分は

$$\int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[i\int d^4x\ \left(\overline{\psi}(x)(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi(x)\right)\right]$$

これを虚時間に持っていけば

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x\ \left(\overline{\psi}(x)(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial \tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi(x)\right)\right] \\ &= \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[S] \end{aligned}$$

となります ($\psi, \overline{\psi}$ は反周期性を持っています)。グラスマン数による代数や場の反交換関係なんかはゼロ温度と同じものです。

フェルミオンでは電荷の保存があるように、粒子数は重要になっているので、化学ポテンシャル μ を $\mu \neq 0$ にします。化学ポテンシャル μ があるときの分配関数 (大分配関数) は、Q を粒子数演算子だとすれば

$$Z = \mathrm{tr} e^{-\beta(H-\mu Q)}$$

これを組み込んでいくんですが、クライン・ゴルドン場で行うとすれば、$\mathcal{H} \to \mathcal{H} - \mu\mathcal{N}$($\mathcal{N}$ は粒子数密度) と置き換えることで

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi\frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi,\phi) + \mu\mathcal{N}\right)\right]$$

このような大分配関数になります。これは時間発展演算子としてハミルトニアン H の代わりに、$H - \mu Q$ を使ったようなものです。ここでの $\mathcal{N}$ は粒子数密度演算子であり、ネーターカレント J_μ の 0 成分に対応しています。複素スカラー場なら (場の量子論の「クライン・ゴルドン場〜複素スカラー場〜」参照)

$$Q = \int d^3x J_0 = \int d^3x\ i\alpha\big(\phi(x)\pi(x) - \phi^\dagger(x)\pi^\dagger(x)\big)$$

$$\left(Q = \int d^3x\mathcal{N}\right)$$

Q はハミルトニアンと交換する ($[Q, H] = 0$) 保存量で、α は定数です。密度あり複素スカラー場の場合は「ボーズ・アインシュタイン凝縮」を見てください。

ディラック場での Q は

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger \psi$$

となっています (場の量子論の「ディラック場」参照)。これがディラック場のハミルトニアン密度に $\mathcal{H} - \mu\mathcal{N}$ と入ってきても、経路積分の定式化の流れに影響を与えないことが分かると思います。なので、ディラック場での分配関数 Z は、化学ポテンシャルを μ として ($\gamma_0\gamma_0 = 1$)

$$Z = \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \ \left(\overline{\psi}(x)(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m + \gamma_0\mu)\psi(x)\right)\right]$$

ここから $\log Z$ を求めていきます。分配関数 Z はグラスマン数における関係

$$\int \mathcal{D}\overline{\alpha}\mathcal{D}\alpha \exp\left[-\overline{\alpha}A\alpha\right] = \det A$$

を適用することで、クライン・ゴルドン場の時と同じように計算できます。$\log Z$ は演算子部分を D とすれば

$$\log Z = \log\det(-D) = \mathrm{tr}\log(-D) \quad (D = (i\omega_n + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m)$$

このトレースはクライン・ゴルドン場のときと違い、ガンマ行列 (スピノール成分) に対しても行うようになっています。固有値へのトレースを取った形にもって行けば

$$\log Z = \sum_n\sum_{\boldsymbol{p}} \mathrm{tr}\log(-(i\omega_n + \mu)\gamma_0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)$$

ここでのトレースはガンマ行列に対してです。ガンマ行列に効いているトレースを計算するために、行列計算をする必要があります (もしくは場の量子論での「南部・Jona-Lasinio モデル」の補足で示した方法)。そのために、log を展開します

$$\begin{aligned}
\log[-\gamma_0(i\omega_n + \mu) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m] &= \log m + \log[1 + \frac{-\gamma_0(i\omega_n + \mu) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}}{m}] \\
&= \log m + \frac{-\gamma_0(i\omega_n + \mu) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}}{m} - \frac{1}{2}\frac{(-\gamma_0(i\omega_n + \mu) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^2}{m^2} \\
&\quad + \frac{1}{3}\frac{(-\gamma_0(i\omega_n + \mu) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^3}{m^3} - \frac{1}{4}\frac{(-\gamma_0(i\omega_n + \mu) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^4}{m^4} + \cdots
\end{aligned}$$

$\log m$ 項は無視します。ガンマ行列のトレースは、ガンマ行列が奇数個ある時と $\gamma_0\boldsymbol{\gamma}$ はトレースを取れば消えるので（$\mathrm{tr}[\not{a}\not{b}] = 4a\cdot b$ において、$a = (1, 0, 0, 0), b = (0, \boldsymbol{1})$ とした場合に対応）

$$\mathrm{trtr}[-\frac{1}{2}\frac{(-\gamma_0(i\omega_n+\mu)+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^2}{m^2}-\frac{1}{4}\frac{(-\gamma_0(i\omega_n+\mu)+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^4}{m^4}-\frac{1}{6}\frac{(-\gamma_0(i\omega_n+\mu)+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^6}{m^6}-\cdots]$$

$$=\mathrm{tr}[-\frac{1}{2}\frac{(i\omega_n+\mu)^2-\boldsymbol{p}^2}{m^2}-\frac{1}{4}\frac{((i\omega_n+\mu)^2-\boldsymbol{p}^2)^2}{m^4}-\frac{1}{6}\frac{((i\omega_n+\mu)^2-\boldsymbol{p}^2)^3}{m^6}-\cdots]$$

$$=-2\frac{-(\omega_n-i\mu)^2-\boldsymbol{p}^2}{m^2}-\frac{(-(\omega_n-i\mu)^2-\boldsymbol{p}^2)^2}{m^4}-\frac{2}{3}\frac{(-(\omega_n-i\mu)^2-\boldsymbol{p}^2)^3}{m^6}\cdots$$

$$=2\frac{(\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2}{m^2}-\frac{((\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2)^2}{m^4}+\frac{2}{3}\frac{((\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2)^3}{m^6}\cdots$$

$$=2(\frac{(\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2}{m^2}-\frac{1}{2}\frac{((\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2)^2}{m^4}+\frac{1}{3}\frac{((\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2)^3}{m^6}\cdots)$$

$$=2\log(1+\frac{(\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2}{m^2})$$

$$=2\log[(\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2+m^2]$$

途中で (添え字 i,j は $1\sim3$)

$$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^2=(-\gamma_ip^i)^2=p_ip_j\gamma^i\gamma^j=-\delta^{ij}p_ip_j=-\boldsymbol{p}^2\quad(\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=-2\delta_{ij})$$

を使っています。よって $\log Z$ は

$$\log Z=2\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n-i\mu)^2+\boldsymbol{p}^2+m^2]=2\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n-i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]$$

これを変形してみると

$$\begin{aligned}\log Z&=2\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n-i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]\\&=2\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n-i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]+2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n-i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(-\omega_n-i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]+2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n-i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n+i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]+2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}}\log[(\omega_n-i\mu)^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2]\end{aligned}$$

$$(\omega_{-2}=-2\pi T\frac{3}{2},\omega_{-1}=-2\pi T\frac{1}{2},\omega_0=2\pi T\frac{1}{2},\omega_1=2\pi T\frac{3}{2})$$

これの第一項と第二項は複素共役になっているので、虚部は消えて実数部分だけが残ります。細かいことを言うと、有限の和の範囲だとしたとき、$\omega_n=-\omega_{-n-1}$ となっているために、虚部が消えるには和の下限と上限を 1 ずらす必要があります (例えば $-10\sim9$)。しかし、和が無限大で収束してくれているなら和の端での 1 の差は無視できるので、虚部は消えてくれているとみなせます。というわけで、複素数 z での $\log z=\log|z|+i\arg$ $(z=a+ib$ で arg は a と b の偏角) を使って変形させると、偏角の項は消えて

$$
\begin{aligned}
\log Z &= 2\sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[(\omega_n - i\mu)^2 + \omega_{\boldsymbol{p}}^2] \\
&= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[\omega_n^2 - \mu^2 + \omega_{\boldsymbol{p}}^2 - 2i\omega_n\mu]^2 \\
&= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[(\omega_n^2 - \mu^2 + \omega_{\boldsymbol{p}}^2)^2 + 4\omega_n^2\mu^2] \\
&= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[(\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu))^2 + 4\omega_n^2\mu^2] \\
&= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[\omega_n^4 + (\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)^2(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)^2 + 2\omega_n^2(\omega_{\boldsymbol{p}}^2 - \mu^2) + 4\omega_n^2\mu^2] \\
&= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[\omega_n^4 + (\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)^2(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)^2 + 2\omega_n^2(\omega_{\boldsymbol{p}}^2 + \mu^2)] \\
&= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[(\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)^2)(\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)^2)] \\
&= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)^2] + \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)^2]
\end{aligned}
$$

n に対する和を求めるために、クライン・ゴルドン場の時と同じように

$$
\log(\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} \pm \mu)^2) = \int_{1/\beta^2}^{(\omega_{\boldsymbol{p}} \pm \mu)^2} da^2 \frac{1}{\omega_n^2 + a^2} + \log(\omega_n^2 + \frac{1}{\beta^2}) \tag{1}
$$

と置き換えることで ($\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$)

$$
\begin{aligned}
&\sum_n \Big[\int_{1/\beta^2}^{(\omega_{\boldsymbol{p}} \pm \mu)^2} da^2 \frac{1}{\omega_n^2 + a^2} + \log(\omega_n^2 + \frac{1}{\beta^2}) \Big] \\
&\quad = \sum_n \Big[\int_{1/\beta^2}^{(\omega_{\boldsymbol{p}} \pm \mu)^2} da^2 \frac{1}{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\beta^2} + a^2} + \log(\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}) \Big] \\
&\quad = \sum_n \Big[\int_{1/\beta^2}^{(\omega_{\boldsymbol{p}} \pm \mu)^2} da^2 \frac{\beta^2}{(2n+1)^2\pi^2 + a^2\beta^2} + \log(\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}) \Big] \\
&\quad = \sum_n \int_{1/\beta^2}^{(\omega_{\boldsymbol{p}} \pm \mu)^2} da^2 \frac{\beta^2}{\big((2n+1)\pi + ia\beta\big)\big((2n+1)\pi - ia\beta\big)} + \sum_n \log\big(\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\big)
\end{aligned}
$$

クライン・ゴルドン場と同じように (1) の第二項は最終的には寄与しないと考えて、無視します。第一項に対しては和の公式

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \frac{1}{(n-x)(n-y)} = \pi \frac{\cot \pi x - \cot \pi y}{y - x}
$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
\beta^2\sum_n\frac{1}{((2n+1)\pi+ia\beta)((2n+1)\pi-ia\beta)} &= \sum_n\frac{\beta^2}{4\pi^2}\frac{1}{(n-(-\frac{1}{2}-\frac{ia\beta}{2\pi}))(n-(-\frac{1}{2}+\frac{ia\beta}{2\pi})}\\
&= \frac{\beta^2}{4\pi}\frac{\cot\pi(-\frac{1}{2}-\frac{ia\beta}{2\pi})-\cot\pi(-\frac{1}{2}+\frac{ia\beta}{2\pi})}{\frac{ia\beta}{\pi}}\\
&= \frac{\beta^2}{4\pi}\frac{\cot(-\frac{\pi}{2}-\frac{ia\beta}{2})-\cot(-\frac{\pi}{2}+\frac{ia\beta}{2})}{\frac{ia\beta}{\pi}}\\
&= \frac{\beta^2}{4\pi}\frac{\tan(\frac{ia\beta}{2})+\tan(\frac{ia\beta}{2})}{\frac{ia\beta}{\pi}} \qquad (\tan\theta=-\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)\ ,\ \tan(-\theta)=-\tan\theta)\\
&= \frac{\beta^2}{2ia\beta}\frac{1-\cos(ia\beta)}{\sin(ia\beta)} \qquad (\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta})\\
&= \frac{\beta^2}{2ia\beta}\frac{1-\cosh(a\beta)}{i\sinh(a\beta)} \qquad (\sinh\theta=-i\sin i\theta\ ,\ \cosh\theta=\cos i\theta)\\
&= \frac{\beta^2}{2a\beta}\frac{\cosh(a\beta)-1}{\sinh(a\beta)}\\
&= \frac{\beta^2}{2a\beta}\frac{e^{a\beta}+e^{-a\beta}-2}{e^{a\beta}-e^{-a\beta}} \qquad (\sinh\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}\ ,\ \cosh\theta=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2})\\
&= \frac{\beta^2}{2a\beta}\frac{1+e^{-2a\beta}-2e^{-a\beta}}{1-e^{-2a\beta}}\\
&= \frac{\beta^2}{2a\beta}\frac{1-e^{-2a\beta}+2e^{-2a\beta}-2e^{-a\beta}}{1-e^{-2a\beta}}\\
&= \frac{\beta^2}{2a\beta}(1+2\frac{e^{-2a\beta}-e^{-a\beta}}{1-e^{-2a\beta}})\\
&= \frac{\beta^2}{a\beta}(\frac{1}{2}+\frac{-e^{-a\beta}(1-e^{-a\beta})}{(1-e^{-a\beta})(1+e^{-a\beta})})\\
&= \frac{\beta^2}{a\beta}(\frac{1}{2}+\frac{-e^{-a\beta}}{e^{-a\beta}(e^{a\beta}+1)})\\
&= \frac{\beta}{a}(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{a\beta}+1})
\end{aligned}
$$

ダラダラと計算してきましたが結局のところ、和の公式として

$$
\sum_n\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2+x^2}=\frac{1}{x}(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x+1})
$$

というのが導かれたことになりますし、最初っからこれを知っていればこれを使えばいいだけです。
話を $\log Z$ に戻すと

$$
\begin{aligned}
\sum_n\log(\omega_n^2+(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)^2) &= \sum_n\int_{1/\beta^2}^{(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)^2}da^2\frac{1}{\omega_n^2+a^2}\\
&= \int_{1/\beta^2}^{(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)^2}da^2\frac{\beta}{a}(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{a\beta}+1})\\
&= 2\beta\int_{1/\beta}^{(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)}da(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{a\beta}+1})\\
&= 2\beta\Big[\frac{(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)}{2}-\frac{1}{2\beta}-\frac{1}{\beta}\big(-\log(1+e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)})+\log(1-e^{-1})\big)\Big]\\
&= 2\big(\frac{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)}{2}+\log(1+e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu)})\big)
\end{aligned}
$$

定数になっている項は落としています。というわけで、$\log Z$ は

$$
\begin{aligned}
\log Z &= \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)^2] + \sum_n \sum_{\boldsymbol{p}} \log[\omega_n^2 + (\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)^2] \\
&= 2\sum_{\boldsymbol{p}} (\frac{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)}{2} + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)})) + 2\sum_{\boldsymbol{p}} (\frac{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)}{2} + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)})) \\
&= 2\sum_{\boldsymbol{p}} [\beta\omega_{\boldsymbol{p}} + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)}) + (\log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)})]
\end{aligned}
$$

積分の形にすれば

$$
\log Z = 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\beta\omega_{\boldsymbol{p}} + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)}) + \log(1 + e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}} + \mu)})]
$$

今度も零点エネルギーを含んで出てきますが、それを除けば統計力学での結果と同じものとなっています。そして、符号が逆になっていることから、第二項と第三項が粒子と反粒子を表現するという形で求められています。