# 虚時間法〜クライン・ゴルドン場〜

「虚時間法」では演算子形式でいろいろと見ましたが、経路積分を用いた方法をみていきます。これは統計力学の分配関数と経路積分で行ったことを場に変えて行います。なので同じように、経路積分が計算できれば分配関数を求めることが出来ます。ここではクライン・ゴルドン場 (実スカラー場) を使っていきます。

場の理論の枠組みの中で定式化しようとしているので、連続値での規格化を用います。状態 $|\phi(\boldsymbol{x}) >$ をシュレーディンガー表示での演算子 $\phi(\boldsymbol{x})$ の固有状態だとして ($\phi(\boldsymbol{x})|\phi(\boldsymbol{x}) >= \phi(\boldsymbol{x})|\phi(\boldsymbol{x}) >$)

$$\int d\phi\ |\phi >< \phi| = 1\ ,\ < \phi_a|\phi_b >= \delta(\phi_a(\boldsymbol{x}) - \phi_b(\boldsymbol{x}))$$

分配関数は連続な状態なら (状態の $\phi(\boldsymbol{x})$ は $\phi$ と書きます)

$$Z = \mathrm{tr}\mathrm{e}^{-\beta H} = \int d\phi_a < \phi_a|\mathrm{e}^{-\beta H}|\phi_a >$$

これに対して、量子論における遷移振幅の経路積分での表現は ($\pi$ は $\phi$ の共役量 $\mathcal{H}$ はハミルトニアン密度 )

$$< \phi_f, t_f|\phi_i, t_i >=< \phi_f|\exp[-iH(t_f - t_i)]|\phi_i >= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x\,(\pi\partial_0\phi - \mathcal{H}(\pi, \phi))\right]$$

$$H = \int d^3x\mathcal{H}$$

これで与えられており、分配関数と似ていることが分かります。つまり、

$$< \phi_f|\exp[-iH(t_f - t_i)]|\phi_i > \Rightarrow < \phi|\exp[-\beta H]|\phi >$$

この置き換えで一致します。なので、時間を $t_f - t_i\ \rightarrow\ -i\beta$、そして始状態と終状態を同じだとすればいいということです。経路積分では始状態 $|\phi_i; t_i\rangle$ が $t_f - t_i$ 経過した後に終状態 $|\phi_f; t_f\rangle$ になるということは、場に対する境界条件として

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}, t_i)\ ,\ \phi_f(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}, t_f)$$

と現れます。一方で分配関数では、トレースのために始状態と終状態が同じとするので、$\phi_i = \phi_f$ を要求します。そして、$\exp[-iH(-i\beta)]$ は始状態の時間 $t_i$ から $-i\beta$ 時間発展させることから境界条件として

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \phi_f(\boldsymbol{x})$$

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}, t_i)\ ,\ \phi_f(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}, t_i - i\beta)$$

これらはまとめれば

$$\phi(\boldsymbol{x}, t_i) = \phi(\boldsymbol{x}, t_i - i\beta)$$

という境界条件になり、これは久保-Martin-Schwinger の関係です。

経路積分から分配関数への変更は上の話から分かるように虚時間へ変えればいいだけです。簡単にするために $t_i = 0$ として、経路積分での時間を虚時間にすることで分配関数の表現として $(\tau = it,\ 0 \leq \tau \leq \beta)$

$$Z = \int_{periodic} \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi)\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau} = i\frac{\partial}{\partial \tau}\ ,\ dt = -id\tau$$

ここで出てきている $\mathcal{D}\phi$ 積分の $periodic$ は $\phi$ に周期性があることを表わしており、その周期的な経路にわたって積分しろということを表わすようにします ($\phi_a(0) = \phi_a(\beta)$ の範囲での積分)。ここでも場 $\phi$ に対して周期性が出てきたのでフーリエ変換の時間成分には松原振動数が現れることになります。

ここから、クライン・ゴルドン場 (実スカラー場) だとしていきます。ここでは粒子数保存の電荷がないので、化学ポテンシャルは 0 とします (ハミルトニアンに化学ポテンシャルがない。「有限密度でのフェルミオン」参照)。このとき、共役量 $\pi$ の積分は通常の経路積分と同様に実行することができます。具体的に実行するには、離散的な状況 (連続極限をとる前の状況) での経路積分の一部

$$\begin{aligned}&\int \frac{d\pi_j}{2\pi} \exp\Big[i\int d^3x\big(\pi_j(\phi_{j+1} - \phi_j) - \Delta\tau(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2)\big)\Big]\\&\quad \Rightarrow \int \frac{d\pi_j}{2\pi} \exp\left[\int d^3x \left(i\pi_j(\phi_{j+1} - \phi_j) - \Delta\tau(\frac{1}{2}\pi_j^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_j)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_j^2)\right)\right]\end{aligned}$$

を計算すればよくて ($\dot{\phi}$ は $\tau$ の微分を表します)

$$\begin{aligned}&\int \frac{d\pi_j}{2\pi} \exp\left[\int d^3x \left(i\pi_j(\phi_{j+1} - \phi_j) - \Delta\tau(\frac{1}{2}\pi_j^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_j)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_j^2)\right)\right]\\&\quad = \int \frac{d\pi_j}{2\pi} \exp\left[\int d^3x\Delta\tau \left(i\pi_j\dot{\phi}_j - \frac{1}{2}(\pi_j^2 + (\nabla\phi_j)^2 + m^2\phi_j^2)\right)\right]\\&\quad = \int \frac{d\pi_j}{2\pi} \exp\left[\int d^3x\Delta\tau \left(-\frac{1}{2}\pi_j^2 + i\pi_j\dot{\phi}_j - \frac{1}{2}((\nabla\phi_j)^2 + m^2\phi_j^2)\right)\right]\\&\quad = \exp[-\frac{1}{2}\int d^3x\Delta\tau((\nabla\phi_j)^2 + m^2\phi_j^2)] \int \frac{d\pi_j}{2\pi} \exp\left[\int d^3x\Delta\tau \left(-\frac{1}{2}\pi_j^2 + i\pi_j\dot{\phi}_j\right)\right]\end{aligned}$$

これはガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 + ibx}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp[-\frac{b^2}{4a^2}]$$

によって

$$\exp\Big[-\frac{1}{2}\int d^3x\Delta\tau((\nabla\phi_j)^2+m^2\phi_j^2)\Big]\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\Delta\tau}}\exp\Big[-\int d^3x\Delta\tau\frac{\dot{\phi}_j^2}{2}\Big] \quad =\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\Delta\tau}}\exp[-\frac{1}{2}\int d^3x\Delta\tau(\dot{\phi}_j^2+(\nabla\phi_j)^2+m^2\phi$$

そうすると、これを $\Delta\tau$ の連続極限に持っていけばいいだけなので、分配関数 $Z$ は

$$Z=N'(\beta)\int_{periodic}\mathcal{D}\phi\exp[S]$$

$$S=\int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L}(\phi,\dot{\phi})$$

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}((\frac{\partial\phi}{\partial\tau})^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2)$$

これは経路積分と同じように二次形式のラグランジアン全てに言えることです。さらに、経路積分と同じことをしていきます。また、規格化定数として $N'(\beta)$ というのを導入していますが、これは今の場合 $\Delta\tau$ というのが $0$ から $\beta$ の間を無限個に切り取った時の値であることから温度依存性を持つことによります。

表面積分は落ちるという性質 (時間成分は周期性によって) を持たせることで、作用は部分積分によって

$$\begin{aligned}S &= -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x((\frac{\partial\phi}{\partial\tau})^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2)\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ \phi(\tau,\boldsymbol{x})(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nabla^2+m^2)\phi(\tau,\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

ここの $\phi$ で挟まれている部分が、ゼロ温度と同じように伝播関数の逆に対応すると考えられます。作用を運動量表示にするためには、$\phi(\tau,\boldsymbol{x})$ のフーリエ展開をします。$\phi(\tau,\boldsymbol{x})$ は $\beta$ の周期を持っているので

$$\phi(\tau,\boldsymbol{x})=\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\phi_n(\boldsymbol{p})\quad (\omega_n=2n\pi T)$$

これを入れることで

$$\begin{aligned}S &= -\frac{1}{2\beta^2}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ e^{-i\omega_{n'}\tau}e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}}\phi_{n'}(\boldsymbol{p}')(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nabla^2+m^2)e^{-i\omega_n\tau}e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\phi_n(\boldsymbol{p})\\ &= -\frac{1}{2\beta^2}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ e^{-i(\omega_{n'}+\omega_n)\tau}e^{i(\boldsymbol{p}'+p)\cdot\boldsymbol{x}}\phi_{n'}(\boldsymbol{p}')(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi_n(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

ここで $\tau$ は周期 $\beta$ を持つ状況であることと、$\omega_n$ が離散値であることから

$$\int_0^\beta d\tau e^{-i(\omega_{n'}-\omega_n)\tau}=\beta\delta_{nn'}$$

そして、場は $\phi_{-n}(-\boldsymbol{p})=\phi_n^*(\boldsymbol{p})$ であり (展開すれば実際にこうなっている)、今は実数なので $\phi_{-n}(-\boldsymbol{p})=\phi_n(\boldsymbol{p})$ ということから

$$S=-\frac{1}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})$$

この状況をゼロ温度での経路積分と比較すれば、$\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2$ が伝播関数の逆になっていることが予想できます。つまり、有限温度における実数スカラー場の自由な伝播関数は

$$\Delta(\omega_n,\boldsymbol{p})=\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}$$

となっていると予想でき、実際にそうなっていることも確かめられます。これの位置表示はフーリエ変換によって

$$\Delta(\tau'-\tau,\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})=\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}e^{-i\omega_n(\tau'-\tau)}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}$$

となっています。

伝播関数 (グリーン関数) にちゃんと対応していることを見ておきます。有限温度での伝播関数に対する方程式は、ゼロ温度でのクライン・ゴルドン方程式の伝播関数に対する方程式

$$(\Box+m^2)D(x-y)=-i\delta^4(x-y)$$

をユークリッド空間に持っていくことで出てきます。実際に、ユークリッド化させると

$$\begin{aligned}(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nabla^2+m^2)\Delta(\tau-\tau',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') &= \delta(\tau-\tau')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\quad(-i\delta(t)=\delta(\tau))\\ (\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2)\Delta(\tau-\tau',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') &= -\delta(\tau-\tau')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}$$

これはユークリッド空間でのクライン・ゴルドン方程式なのだと思い、$\Delta(\tau-\tau',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2)\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\omega_n(\tau-\tau')}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\Delta(p_0,\boldsymbol{p}) &= -\delta(\tau-\tau')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\ \frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-\omega_n^2-\boldsymbol{p}^2-m^2)\Delta(p_0,\boldsymbol{p})e^{-i\omega_n(\tau-\tau')}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} &=\end{aligned}$$

となることから

$$\Delta(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}$$

これで予想と一致したことが分かります (下の補足 1、2 も見てください)。ここで、気づくこととして有限温度の伝播関数 $\Delta(\tau-\tau',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ に対する方程式は、ゼロ温度の方程式から $i$ を取ってマイナスをつけたものに対応しているということです。言い換えれば、ゼロ温度での伝播関数を、ミンコフスキー空間からユークリッド空間に移して (解析接続)、$i$ を取って符号を反転させれば有限温度での伝播関数になるということです。そして、これはミンコフスキー空間からユークリッド空間への伝播関数の移行のしかたそのものです (唯一の違いは、有限温度では $p_0$ 成分が離散的になっているという点)。実際に、クライン・ゴルドン場の場合、ミンコフスキー空間では

$$\frac{i}{p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2}$$

これをユークリッド化すれば

$$\frac{i}{-p_4^2-\boldsymbol{p}^2-m^2}$$

で、これの符号を反転させて、$i$ を取れば $1/(p_4^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)$ となります ($p_4=\omega_n=2n\pi T$)。そして、$p_4$ を松原振動数 $\omega_n$ に変えれば、上の結果と一致します。他にも、頂点に対するファインマン則もユークリッド空間のものと同じになっています ($i$ で割ればいい)。
これとは別に、伝播関数の形を操作すると便利な形で書くことができます。どういうことかというと、有限温度での伝播関数を

$$\frac{i}{p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2}\quad(p_0=2in\pi T)$$

という形にすることも可能です。この形式で行うと伝播関数自体を変更する必要がないために、有限温度へは時間成分の置き換えだけですみます。しかも、頂点とループ積分に対するファインマン則もユークリッド化するだけでよくなっています。この形の伝播関数やファインマン則は、虚時間法の最後の方で出てきた、時間経路を 0 から $-i\beta$ にとった場合に出てきます。
ここで求められた分配関数が、統計力学と同じ結果を返すことを見ておきます。今の場合、実スカラー場によるものはボソンなので、ボソンの結果が導けるはずです。それを見るために、分配関数の対数を計算します

$$\log Z=\log\Big[\frac{1}{N'(\beta)}\int_{periodic}\mathcal{D}\phi\exp\Big[-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ \phi(\tau,\boldsymbol{x})(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nabla^2+m^2)\phi(\tau,\boldsymbol{x})\Big]\Big]$$

$\phi$ 積分には周期性という制約がかかっていて厄介なので、変更します。何をするのかというと、単純にフーリエ変換して運動量表示に変えます。exp 内は上で計算したように

$$S=-\frac{1}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})$$

これを見て分かるように、exp 内には位相因子 ($\exp(-i\omega_n\tau+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})$ みたいなやつ ) がありません。このとき、内積 (関数内積) 部分を

$$\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}D(\omega_n,\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})$$

$$D(\omega_n,\boldsymbol{p})=\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2$$

のように定義します。内積の記号との対応から (本当は演算子の固有値でするんですが、結局同じなので対応関係だけでやってしまいます)

$$\int_0^\beta d\tau\int d^3x\phi(\tau,\boldsymbol{x})D(\tau,\boldsymbol{x})\phi(\tau,\boldsymbol{x})=(\phi,D\phi)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}D(\omega_n,\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})$$

で、積分測度 $\mathcal{D}\phi$ もフーリエ変換されるんですが、言った様に exp 内には位相因子がないために、測度は単にフーリエ変換の振幅 $\phi_n(\boldsymbol{p})$ を使って $\mathcal{D}\phi_n(\boldsymbol{p})$ とすればいいだけになっています。そうすると、$\phi_n(\boldsymbol{p})$ は振幅であるために、積分範囲には何の制限もかからずに $-\infty \sim \infty$ となります。まとめると、計算すべきものは

$$\log Z = \log\Big[\frac{1}{N'(\beta)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\phi_n(\boldsymbol{p})\exp\big[-\frac{1}{2\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi_n(\boldsymbol{p})\phi_n(\boldsymbol{p})\big]\Big]$$

となります。これはリーマン積分と呼ばれる

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_1dx_2\cdots dx_n\exp\left[-x_iA_{ij}x_j\right] = \pi^{\frac{n}{2}}(\det A)^{-\frac{1}{2}}$$

これの関数版が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\phi\exp\big[-\frac{1}{2}(\phi, D\phi)\big]\Big] = N(\det D)^{-\frac{1}{2}}$$

となることを使います（左辺の exp 内の 1/2 は係数でしかないので定数 $N$ に入る)。定数 $N$ は熱的な寄与を与えないので無視して

$$\begin{aligned}\log Z &= \log(\det D)^{-\frac{1}{2}} + \log N'(\beta)\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log D + \log N'(\beta) \quad (\log\det A = \mathrm{tr}\log A)\end{aligned}$$

ここでは、ある行列 $A$ があり、その固有値が $\lambda_i$ となっているとき

$$\log\det A = \log\prod_i\lambda_i = \sum_i\log\lambda_i = \mathrm{tr}\log A$$

という関係があることを使っています。そして、このために $\log Z$ の第一項のトレースは $n$ と $\boldsymbol{p}$ の和という形にすることができ

$$\log Z = -\frac{1}{2}\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2) + \log N'(\beta)$$

ここで、$n$ の和を実行します。$n$ に対する和を取るために

$$\log(\omega_n^2+a^2) = \int_{1/\beta^2}^{\omega_{\boldsymbol{p}}^2}da^2\frac{1}{\omega_n^2+a^2} + \log(\omega_n^2+\frac{1}{\beta^2})$$

と変形させて、和の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+(x/2\pi)^2} = \frac{2\pi^2}{x}(1+\frac{2}{e^x-1})$$

を使うことで $(\omega_n = 2\pi n/\beta, \omega_{\boldsymbol{p}}^2 = \boldsymbol{p}^2+m^2)$

$$\begin{aligned}
\sum_n \log(\omega_n^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2) &= \sum_n \log((\frac{2\pi n}{\beta})^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2)\\
&= \sum_n \int_{1/\beta^2}^{\omega_{\boldsymbol{p}}^2} da^2 \frac{1}{(\frac{2\pi n}{\beta})^2+a^2} + \sum_n \log((\frac{2\pi n}{\beta})^2+\frac{1}{\beta^2})\\
&= \sum_n \int_{1/\beta^2}^{\omega_{\boldsymbol{p}}^2} da^2 \frac{\frac{\beta^2}{(2\pi)^2}}{n^2+(a\beta/2\pi)^2} + \sum_n \log((\frac{2\pi n}{\beta})^2+\frac{1}{\beta^2})\\
&= \int_{1/\beta^2}^{\omega_{\boldsymbol{p}}^2} da^2 \frac{\beta^2}{(2\pi)^2}\frac{2\pi^2}{a\beta}(1+\frac{2}{\exp[a\beta]-1}) + \sum_n \log((\frac{2\pi n}{\beta})^2+\frac{1}{\beta^2})\\
&= \int_{1/\beta^2}^{\omega_{\boldsymbol{p}}^2} da^2 \frac{\beta}{a}(\frac{1}{2}+\frac{1}{\exp[a\beta]-1}) + \sum_n \log((\frac{2\pi n}{\beta})^2+\frac{1}{\beta^2})\\
&= \int_{1/\beta}^{\omega_{\boldsymbol{p}}} da\ 2\beta(\frac{1}{2}+\frac{1}{\exp[a\beta]-1}) + \sum_n \log((\frac{2\pi n}{\beta})^2+\frac{1}{\beta^2})\\
&= \int_{1/\beta}^{\omega_{\boldsymbol{p}}} da\ 2\beta(\frac{1}{2}+\frac{1}{\exp[a\beta]-1}) + \log\frac{1}{\beta^2} + \sum_n \log((2\pi n)^2+1)
\end{aligned}$$

第三項は無限大の値を持ちます。第二項と第三項はひとまず無視して、第一項だけを見ると

$$\begin{aligned}
\int_{1/\beta}^{\omega_{\boldsymbol{p}}} da\ 2\beta(\frac{1}{2}+\frac{1}{\exp[a\beta]-1}) &= 2\beta\big[\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}-\frac{1}{2\beta}+\frac{1}{\beta}(\log(1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}})-\log(1-e^{-1}))\big]\\
&= 2\big(\frac{\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}+\log(1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}})\big)
\end{aligned}$$

$\beta$ を含んでいない項は無視しています。というわけで、

$$\log Z = -\sum_{\boldsymbol{p}}(\frac{\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}+\log(1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}})) + \log N'(\beta) + \log\frac{1}{\beta^2} + \sum_n \log((2\pi n)^2+1)$$

実は、これの第三項、第四項、第五項は打ち消しあうことが分かっています。これは、分配関数を今やってきたのと違う方法で計算していくと、これの第一項のみが出てくるということから確かめられています。
最終的に $\log Z$ は

$$\log Z = -\sum_{\boldsymbol{p}}\big(\frac{\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}+\log(1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}})\big)$$

ということになり、$\boldsymbol{p}$ は連続的だと考えているので積分の形に変更すれば

$$\log Z = -V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\big(\frac{\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}+\log(1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}})\big)$$

$$\Big(\sum = \frac{V}{(2\pi)^3}\sum\frac{(2\pi)^3}{V}\ \Rightarrow\ \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p\Big)$$

このようになります ($V$ は三次元体積で、フーリエ級数の無限体積極限として積分へ移る)。これは統計力学で出てくるボソンの場合と零点エネルギー $\beta\omega_{\boldsymbol{p}}/2$ を除けば一致しています (零点エネルギーは真空の寄与なので問題のある項ではないです)。

ここで行った計算は、単純な相互作用のない自由な場合でした。そうすると、次に必要になってくるのは相互作用がある場合です。しかし、分配関数の構造は経路積分とほぼ同じなので、ここで行ったような直接計算が行えなくなることが予想できます。それに対しては結合定数が小さいとし、摂動展開して計算していくという方法を取っていきます。この発想もゼロ温度と全く同じです。そのため、ここや「虚時間法」でちらほらとファインマン則について触れていたように、ゼロ温度とほぼ同じのファインマン則を構成することができ、それに従って摂動計算を行います。といっても、同じことをするだけで済むかというとそうでもないです。

**・補足 1**

ここで伝播関数と呼んでいたものが温度グリーン関数に対応していることを示しておきます。そのためには、生成汎関数の汎関数微分が温度グリーン関数であることを示せばいいです。これはゼロ温度ではファインマンの伝播関数が生成汎関数の汎関数微分で出てきたということに対応します (それの虚数時間版)。実数スカラー場だとして、生成汎関数は

$$Z[J]=\int\mathcal{D}\phi\exp[-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\frac{1}{2}((\frac{\partial\phi}{\partial\tau})^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2)+\int_0^\beta d\tau\int d^3xJ(x)\phi(x)]$$

表記を省略するために $x=(\tau,\boldsymbol{x})$ としています。これを $J$ で汎関数微分すれば $\phi$ が exp の外に出てくるので

$$\frac{\delta^2Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}=\int\mathcal{D}\phi\phi(x_1)\phi(x_2)\exp[-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\frac{1}{2}((\frac{\partial\phi}{\partial\tau})^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2)+\int_0^\beta d\tau\int d^3xJ(x)\phi(x)]$$

これに対して、温度グリーン関数の定義は $\tau$ に対する時間順序積によって

$$\langle T(\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_\beta=\mathrm{tr}[e^{-\beta H}T(\phi(x_1)\phi(x_2)]$$

分配関数は

$$Z=\mathrm{tr}[e^{-\beta H}]$$

であって、これを源をつけた生成汎関数に変えれば

$$Z[J]=\mathrm{tr}\Big[e^{-\beta H}T\Big(\exp\Big[\int_0^\beta d\tau\int d^3xJ(x)\phi(x)\Big]\Big)\Big]$$

このように書けます。これを $J$ で汎関数微分すれば明らかに温度グリーン関数の定義になります。よって、有限温度での生成汎関数に対する源の汎関数微分は温度グリーン関数を導きます。

もしくは $\tau_i>\tau_j$ だとして完全性を挟んでいって

$$\mathrm{tr}[e^{-\beta H}T(\phi(x_i)\phi(x_j)]$$

$$=\int d\phi_a\langle\phi_a|e^{-\beta H}\phi(x_i)\phi(x_j)|\phi_a\rangle$$

$$=\int d\phi_a\int d\phi(x_1)\cdots d\phi(x_n)\langle\phi_a|e^{-\beta H}|\phi(x_n)\rangle\langle\phi(x_n)|\cdots\phi(x_i)|\phi(x_i)\rangle\langle\phi(x_i)|\cdots\phi(x_j)|\phi(x_j)\rangle\langle\phi(x_j)|\cdots|\phi(x_1)\rangle\langle\phi(x_1)|\phi_a\rangle$$

これをゼロ温度の場合と同じように変形していけば

$$\int \mathcal{D}\phi\phi(x_i)\phi(x_j)\exp\Big[-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L}\Big]$$

となるので、温度グリーン関数の定義式が汎関数微分した式に対応します。

**・補足 2**

使っている関係が、「有限温度でのグリーン関数」と「実時間法〜伝播関数の性質〜」で出てきているものなので、細かいことはそっちを見てください。

クライン・ゴルドン方程式の演算子の逆としてグリーン関数は定義されるので、グリーン関数は

$$(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2)\Delta(\tau-\tau',\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=-\delta(\tau-\tau')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1}$$

この方程式に従います。ここで $\Delta(\tau,\boldsymbol{x})$ の一般形を考えてみます。$\Delta(\tau,\boldsymbol{x})$ は演算子形式で言えば、2 つの場の演算子の熱平均なので、当然、久保-Martin-Schwinger の関係を満たし

$$\Delta(\tau,\boldsymbol{x})=\Delta(\tau-\beta,\boldsymbol{x})$$

という周期性を持ちます $(0\leq\tau\leq\beta)$。もしくは、$-\beta\leq\tau\leq 0$ では

$$\Delta(\tau,\boldsymbol{x})=\Delta(\tau+\beta,\boldsymbol{x})$$

これを踏まえて、方程式を満たす形としては

$$\Delta(\tau,\boldsymbol{x})=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\exp[-k_0\tau][\theta(\tau)+\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k)$$

このようなものが考えられます。$\rho_B(k)$ はボソンに対するスペクトル関数で、$1/(e^{\beta k_0}-1)$ はボソンの分布関数です。スペクトル関数は「有限温度でのグリーン関数」を見てください。周期性は、$0\leq\tau\leq\beta$ に対して

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau-\beta,\boldsymbol{x}) &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\exp[-k_0(\tau-\beta)][\theta(\tau-\beta)+\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k)\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\exp[-k_0\tau]\frac{e^{\beta k_0}}{e^{\beta k_0}-1}\rho_B(k)\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\exp[-k_0\tau][\frac{e^{\beta k_0}-1}{e^{\beta k_0}-1}+\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k)\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\exp[-k_0\tau][1+\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k)\\
&= \Delta(\tau,\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

なので、$0\leq\tau\leq\beta$ に対して、ちゃんと満たされています。

フーリエ変換して運動量表示にすれば

$$
\begin{aligned}
\Delta(\omega_n, \boldsymbol{p}) &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \exp[i\omega_n\tau - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}]\Delta(\tau, \boldsymbol{x}) \\
&= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}] \exp[(i\omega_n - k_0)\tau][\theta(\tau) + \frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k) \\
&= \int_0^\beta d\tau \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) \exp[(i\omega_n - k_0)\tau][\theta(\tau) + \frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k) \\
&= \int_0^\beta d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \exp[(i\omega_n - k_0)\tau][\theta(\tau) + \frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k_0, \boldsymbol{p}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\exp[-k_0\beta]-1}{i\omega_n - k_0}[1 + \frac{1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k_0, \boldsymbol{p}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{i\omega_n - k_0}[e^{-\beta k_0} - 1 + \frac{e^{-\beta k_0}-1}{e^{\beta k_0}-1}]\rho_B(k_0, \boldsymbol{p}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{i\omega_n - k_0}[e^{-\beta k_0} - 1 - e^{-\beta k_0}]\rho_B(k_0, \boldsymbol{p}) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{i\omega_n - k_0}\rho_B(k_0, \boldsymbol{p})
\end{aligned}
$$

となって、分布関数がいなくなります。$\exp[i\omega_n\beta] = 1$ ($\omega_n = 2\pi nT$) と、$\tau$ の積分範囲より $\theta(\tau) = 1$ だというのを使っています。この結果は「有限温度でのグリーン関数」で出てくるスペクトル表示と同じものになっています。相互作用のない場合では

$$
\Delta(\omega_n, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{2}
$$

となります。

ここで注意することは、グリーン関数 $\Delta(\tau, \boldsymbol{x})$ に久保-Martin-Schwinger の関係による周期的条件を満たしているという条件を入れると、位置表示では分布関数がいるものが出てくるという点です。一方で、グリーン関数の式 (1) に対して、ゼロ温度と同じような手続きによって運動量表示の場合を求めようとしても、結局は (2) のようになっています。しかし、実際には周期的条件がいるためにゼロ温度とは明らかに違う構造を持っているので、これは偶然と理解するべきだと思います (フーリエ変換自体に周期性が入っているためとも言えますが。また、虚時間法はユークリッド空間と同等という視点から見ればこれは当然ですが、ユークリッド空間と全く同じではないということを注意するために)。このことは実時間では直接効いてきて、実時間でのグリーン関数は運動量表示でもゼロ温度とは異なった部分を持ちます (「実時間の伝播関数」や「実時間法」参照)。