Influence functional

系が外部と相互作用している場合 (開いた系) を扱うときに出てくる influence functional について見ていきます。日本語で影響汎関数と呼ぶこともあるようですが、定着しているのか分からないので influence functional としていきます。
量子力学で見ていき、最後に場の理論にした場合を簡単に見ます。
influence functional について解説しているものが少なかったので、勝手な解釈が結構あります。ここの話は「Stochastic interpretation of Kadanoff-Baym equations and their relation to Langevin processes」(arXiv:hep-ph/9802312) の appendix と「Nonequilibrium Quantum Field Theory」(Esteban A.Calzetta and Bei-Lok B.Hu 著) を参考にしています。

ここでは見ている系が外部 (外界、環境) の影響を受けている場合を考えます。これは開いた系 (open system) と呼ばれるものです。なので、2 つの系を考えます。1 つは注目している系で、もう 1 つは環境の系だとし、この 2 つは相互作用しているとします。注目している系の変数は x、環境の系は変数 q で記述されているとします。環境の系は観測の対象とはしません。このとき、全体の作用は、注目している系の作用 $S_0[x]$、外部の系の作用 $S_{ex}[q]$、相互作用部分 $S_{int}[x,q]$ によって

$$S = S_0[x] + S_{ex}[q] + S_{int}[x,q]$$

と書いて、ハミルトニアンも同様に

$$H = H_0 + H_{ex} + H_{int}$$

とし、時間依存性はないとします。なので、時間発展は e^{iHt} で与えます。ここから添え字に 0 がついているのが注目している系、ex とついているのが環境の系を表します。

この系における密度行列 (演算子)ρ を見ていきます。系の変数は x, q と時間 t です。なので、$|x,q;t\rangle$ で挟んで

$$\rho(x,q,x',q;t) = \langle x,q;t|\rho|x',q;t\rangle$$

とします (これを密度行列と呼んでいきます)。環境の変数は同じにしています。$|x,q;t\rangle$ の完全性は

$$1 = \int dx \int dq |x,q;t\rangle\langle x,q;t|$$

と与えられます。経路積分の形にするためにこれを使うことで

$$\begin{aligned}
\rho(x,q,x',q;t) &= \langle x,q;t|\rho|x',q;t\rangle \\
&= \int dx_i dq_i \int dx'_i dq'_i \langle x,q;t|x_i,q_i;0\rangle\langle x_i,q_i;0|\rho|x'_i,q'_i;0\rangle\langle x'_i,q'_i;0|x',q;t\rangle \\
&= \int dx_i dq_i \int dx'_i dq'_i \langle x,q;t|x_i,q_i;0\rangle\rho(x_i,q_i,x'_i,q'_i;0)\langle x'_i,q'_i;0|x',q;t\rangle
\end{aligned}$$

経路積分はラグランジアンが 2 次形式なら

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle = \int \mathcal{D}q \exp[iS]$$

となることから、x, q の完全性を挟んでいくことで

$$\rho(x,q,x',q;t)=\int dx_i dq_i\int dx'_i dq'_i\int_{x_i}^{x}\mathcal{D}x\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q e^{iS[x,q]}\rho(x_i,q_i,x'_i,q'_i;0)\int_{x'_i}^{x'}\mathcal{D}x'\int_{q'_i}^{q}\mathcal{D}q' e^{-iS[x',q']}$$

$\mathcal{D}x,\mathcal{D}x',\mathcal{D}q,\mathcal{D}q'$ の積分の下限と上限は境界条件で、$\rho(x_i,q_i,x'_i,q'_i;0)$ は初期条件で与えられます。上限を x,q のようにしているのが紛らわしければ $\rho(x_f,q_f,x'_f,q_f;t)$ のようにすればいいです。一番右で $-iS$ になっているのは $\langle x'_i,q'_i|x',q,t\rangle$ を $\langle x',q,t|x'_i,q'_i\rangle$ とするために複素共役 (エルミート共役) を取るからです。これで密度行列の経路積分表示は出てきたので、ここから情報を取り出します。

$\rho(x,q,x',q;t)$ の q に対してトレースを取れば環境の系の変数が消えた密度行列が出てくるので、それを作ります。$\rho(x,q,x',q;t)$ において

$$J(x,q,x',q,t|x_i,q_i,x'_i,q_i,0)=\int_{x_i}^{x}\mathcal{D}x\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q\int_{x'_i}^{x'}\mathcal{D}x'\int_{q'_i}^{q}\mathcal{D}q' e^{iS[x,q]}e^{-iS[x',q']}$$

と定義すると

$$\rho(x,q,x',q;t)=\int dx_i dq_i\int dx'_i dq'_i\ J(x,q,x',q,t|x_i,q_i,x'_i,q_i,0)\rho(x_i,q_i,x'_i,q'_i;0)$$

と書けます。これを見ると J が密度行列の時間発展を与えているように見えます。ここで $t=0$ では注目している系と環境の系は相互作用していないとして、初期条件を

$$\rho(x_i,q_i,x'_i,q'_i;0)=\rho_0(x_i,x'_i;0)\rho_{ex}(q_i,q'_i;0)$$

とします（$t=0$ から相互作用が生じるとする）。

q のトレースをとることは q で積分することなので、環境の系の変数が消えた量として

$$\rho_r(x,x';t)=\int_{-\infty}^{\infty}dq\ \rho(x,q,x',q;t)$$

を定義できます。そうすると

$$\begin{aligned}\rho_r(x,x';t)=&\int_{-\infty}^{\infty}dq\ \rho(x,q,x',q;t)\\=&\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dx_i dq_i\int dx'_i dq'_i\ J(x,q,x',q,t|x_i,q_i,x'_i,q_i,0)\rho(x_i,q_i,x'_i,q'_i;0)\\=&\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dx_i dq_i\int dx'_i dq'_i\ J(x,q,x',q,t|x_i,q_i,x'_i,q_i,0)\rho_0(x_i,x'_i;0)\rho_{ex}(q_i,q'_i;0)\end{aligned}$$

このとき、$\rho(x,q,x',q;t)$ と同じように時間発展の形にするために

$$\rho_r(x,x';t)=\int dx_i\int dx'_i\ J_r(x,x',t|x_i,x'_i;0)\rho_0(x_i,x'_i;0)$$

とします。このときの J_r は

$$J_r(x,x',t|x_i,x'_i;0)=\int_{x_i}^{x}\mathcal{D}x\int_{x'_i}^{x'}\mathcal{D}x' e^{iS_0[x]}e^{-iS_0[x']}F[x,x'] \tag{1}$$

で与えられていて、環境の系の情報を持っている部分として $F[x,x']$ を

$$F[x,x'] = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q' e^{i(S_{ex}[q]+S_{int}[x,q])} e^{-i(S_{ex}[q']+S_{int}[x',q'])}$$

と定義しています。このように、見た目上には環境の変数がなくなり、$\rho_0(x_i,x_i';0)$ の時間発展によって $\rho_r(x,x';t)$ が出てくる形になります。ρ_r を reduced density matrix と呼びます。環境の変数が見た目からいなくなっているだけなので、ρ_r は注目する系と環境の系の両方に従って時間発展します。

このときの $F[x,x']$ を Feynman-Vernon influence functional と言い

$$\begin{aligned} F[x,x'] &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q' e^{i(S_{ex}[q]+S_{int}[x,q])} e^{-i(S_{ex}[q']+S_{int}[x',q'])} \\ &= e^{iS_{IF}[x,x';t]} \end{aligned}$$

とした S_{IF} を influence action と言います。この influence action に環境の系による影響 (相互作用も含めて) がすべて入っています。簡単にわかる性質として、$F[x,x']$ の複素共役は

$$F^*[x,x'] = F[x',x]$$

となっていて、これから $S_{IF}[x,x';t]$ の複素共役は

$$\begin{aligned} e^{-iS^*_{IF}[x,x';t]} &= e^{iS_{IF}[x',x';t]} \\ -S^*_{IF}[x,x';t] &= S_{IF}[x',x;t] \end{aligned} \tag{2}$$

となります。

このようにしたとき x,x',t に依存する演算子 A の熱的平均は

$$\langle A\rangle = \mathrm{tr}[\rho(x,q,x',q;t)A(x,x',t)] = \mathrm{tr}[\int_{-\infty}^{\infty} dq\ \rho(x,q,x',q;t)A(x,x',t)] = \mathrm{tr}[\rho_r(x,x';t)A(x,x',t)]$$

として、$\rho_r(x,x';t)$ で与えられます (残っているトレースは x,x' に関するもの)。そして、$\rho_r(x,x';t)$ の時間発展は $J_r(x,x',t|x_i,x_i',0)$ によると考えて、このときの作用は

$$J_r(x,x',t|x_i,x_i';0) = \int_{x_i}^{x} \mathcal{D}x \int_{x_i'}^{x'} \mathcal{D}x' e^{iS[x]} e^{-iS[x']} F[x,x'] = \int_{x_i}^{x} \mathcal{D}x \int_{x_i'}^{x'} \mathcal{D}x' e^{iS_0[x]} e^{-iS_0[x']} e^{iS_{IF}[x,x']}$$

から

$$S_{eff} = S_0[x] - S_0[x'] + S_{IF}[x,x';t] \tag{3}$$

になっていると考えます。この作用は、S_0 が粒子の運動、S_{IF} が環境からの影響を与えていると見えます。なので、古典的には環境の影響を受けた粒子の運動になっていると考えられます。これが実際に出てくることを見ます。そのために S_{IF} についてさらに見ていきます。

まず、$S_{IF}[x,x';t]$ の形を与えます。(2) の性質から

$$
\begin{aligned}
S_{IF}[x,x';t] \simeq \int_{t_i}^{t} ds\ F(s)(x(s)-x'(s)) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} dsd\tau\ R(s,\tau)(x(s)-x'(s))(x(\tau)+x'(\tau)) \\
+ \frac{i}{2}\int_{t_i}^{t} dsd\tau\ I(s,\tau)(x(s)-x'(s))(x(\tau)-x'(\tau))
\end{aligned} \tag{4}
$$

積分になっているのは作用は汎関数だからです。F,R,I は実数で、複素共役を取ると x,x' が入れ替わり符号が反転するので、$x(s)-x'(s)$ で展開される形になっています。この先も同じように展開されていきます。$x(s)-x'(s)$ が奇数個なら符号が反転し、偶数個だと符号が変わらないので i をつけて複素共役で $-i$ になります。この形を使って S_{eff} を作れますが、先に線形な相互作用項によって R,I が書けることを見ておきます。

第二項と第三項は、$x(s)$ を $x_1(s)$、$x'(s)$ を $x_2(s)$ と書くことにして

$$
\begin{aligned}
&R(s,\tau)(x(s)-x'(s))(x(\tau)+x'(\tau)) + iI(s,\tau)(x(s)-x'(s))(x(\tau)-x'(\tau)) \\
&= x(s)R(s,\tau)x(\tau) + x(s)R(s,\tau)x'(\tau) - x'(s)R(s,\tau)x(\tau) - x'(s)R(s,\tau)x'(\tau) \\
&\quad + i(x(s)I(s,\tau)x(\tau) - x(s)I(s,\tau)x'(\tau) - x'(s)I(s,\tau)x(\tau) + x'(s)I(s,\tau)x'(\tau)) \\
&= x(s)(R(s,\tau)+iI(s,\tau))x(\tau) + x(s)(R(s,\tau)-iI(s,\tau))x'(\tau) \\
&\quad + x'(s)(-R(s,\tau)-iI(s,\tau))x(\tau) + x'(s)(-R(s,\tau)+iI(s,\tau))x'(\tau) \\
&= x_1(s)\Sigma_{11}(s,\tau)x_1(\tau) + x_1(s)\Sigma_{12}(s,\tau)x_2(\tau) + x_2(s)\Sigma_{21}(s,\tau)x_1(\tau) + x_2(s)\Sigma_{22}(s,\tau)x_2(\tau) \\
&= x_a(s)\Sigma_{ab}(s,\tau)x_b(\tau)
\end{aligned} \tag{5}
$$

とします。a,b は 1 か 2 で、同じ添え字は和を取ることにします。よって

$$
S_{IF}[x,x';t] \simeq \int_{t_i}^{t} ds\ F(s)x_1(s) - \int_{t_i}^{t} ds\ F(s)x_2(s) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} dsd\tau\ x_a(s)\Sigma_{ab}(s,\tau)x_b(\tau)
$$

x_1,x_2 という 2 つの変数を持った作用になっていて、これの第一項と第二項の符号は逆になっています。これと「実時間法」での閉じた時間経路の考えを合わせます。つまり、ここで出てきていた経路積分における 2 つの変数 x_1,x_2 は、時間経路 C 上にいる X を、C_1 上では $X=x_1, C_2$ 上では $X=x_2$ というように分けたものだと考えます。x_1 は t_i から t、x_2 は t から t_i の時間経路なので ,C_1 は t_i から t、C_2 は t から t_i とする時間経路で、C_1 と C_2 をあわせたのが C です。こうすることで、$x_1(s)$ の積分は C_1、$x_2(s)$ の積分は C_2 で行うことになり

$$
\begin{aligned}
S_{IF}[x,x';t] \simeq &\int_{C_1} ds\ F(s)x_1(s) + \int_{C_2} ds\ F(s)x_2(s) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{C_1} ds\int_{C_1} d\tau\ x_1(s)\Sigma_{11}(s,\tau)x_1(\tau) + \frac{1}{2}\int_{C_2} ds\int_{C_2} d\tau\ x_2(s)\Sigma_{22}(s,\tau)x_2(\tau) \\
&- \frac{1}{2}\int_{C_1} ds\int_{C_2} d\tau\ x_1(s)\Sigma_{12}(s,\tau)x_2(\tau) - \frac{1}{2}\int_{C_2} ds\int_{C_1} d\tau\ x_2(s)\Sigma_{21}(s,\tau)x_1(\tau)
\end{aligned}
$$

と書けることが分かります ($x_2(s)$ の積分を C_2 に変えるときは時間経路が逆になるので符号が反転する)。C_2 は C_1 より後の時間です。ここからは

$$
\begin{aligned}
\int_C dsd\tau\ x_a(s)\Sigma_{ab}(s,\tau)x_b(\tau) = &\int_{C_1} ds\int_{C_1} d\tau\ x_1(s)\Sigma_{11}(s,\tau)x_1(\tau) + \int_{C_2} ds\int_{C_2} d\tau\ x_2(s)\Sigma_{22}(s,\tau)x_2(\tau) \\
&- \int_{C_1} ds\int_{C_2} d\tau\ x_1(s)\Sigma_{12}(s,\tau)x_2(\tau) - \int_{C_2} ds\int_{C_1} d\tau\ x_2(s)\Sigma_{21}(s,\tau)x_1(\tau)
\end{aligned}
$$

とします。さらに $\Sigma_{ab}(s,\tau)$ は s と τ の差にのみ依存するとして

$$\Sigma_{11}(s,\tau)=\Sigma_{11}(\tau,s)\ ,\ \Sigma_{22}(s,\tau)=\Sigma_{22}(\tau,s)\ ,\ \Sigma_{12}(s,\tau)=\Sigma_{21}(\tau,s)\ ,\ \Sigma_{21}(s,\tau)=\Sigma_{12}(\tau,s)$$

と仮定します。$\Sigma_{12}(s,\tau)$ と $\Sigma_{21}(s,\tau)$ は s,τ が C_1,C_2 のどちらにいるかによって区別されているので、このようにします。

これに対して汎関数微分を行います。$e^{iS_{IF}}=F$ は閉じた時間経路で評価するので、汎関数微分は閉じた時間経路のものを使うことにして、C_1,C_2 の経路に対して

$$\frac{\delta x_1(s')}{\delta x_1(s)}=\delta(s'-s)\ ,\ \frac{\delta x_2(s')}{\delta x_2(s)}=-\delta(s'-s)$$

と与えます。これによって

$$\int_{C_1}ds'\ f(s')\frac{\delta x_1(s')}{\delta x_1(s)}=f(s)\ ,\ \int_{C_2}ds'\ f(s')\frac{\delta x_2(s')}{\delta x_2(s)}=f(s)$$

となります。

まず、$e^{iS_{IF}}$ を汎関数微分していきます。x_1 で行うと

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta x_1(u)}e^{iS_{IF}}\\
&\quad=\frac{\delta}{\delta x_1(u)}\exp\Big[i\int_{C_1}ds\ F(s)x_1(s)+i\int_{C_2}ds\ F(s)x_2(s)+\frac{i}{2}\int_C dsd\tau\ x_a(s)\Sigma_{ab}(s,\tau)x_b(\tau)\Big]\\
&\quad=\Big(i\int_{C_1}ds\ F(s)\frac{\delta x_1(s)}{\delta x_1(u)}+\frac{i}{2}\int_{C_1}dsd\tau\ \frac{\delta x_1(s)}{\delta x_1(u)}\Sigma_{11}(s,\tau)x_1(\tau)+\frac{i}{2}\int_{C_1}dsd\tau\ x_1(s)\Sigma_{11}(s,\tau)\frac{\delta x_1(\tau)}{\delta x_1(u)}\\
&\qquad-\frac{i}{2}\int_{C_1}ds\int_{C_2}d\tau\ \frac{\delta x_1(s)}{\delta x_1(u)}\Sigma_{12}(s,\tau)x_2(\tau)-\frac{i}{2}\int_{C_1}ds\int_{C_2}d\tau\ x_2(s)\Sigma_{21}(s,\tau)\frac{\delta x_1(\tau)}{\delta x_1(u)}\Big)\\
&\qquad\exp[\cdots]\\
&\quad=\Big(i\int_{C_1}dsF(s)\delta(s-u)+\frac{i}{2}\int_{C_1}dsd\tau\delta(s-u)\Sigma_{11}(s,\tau)x_1(\tau)+\frac{i}{2}\int_{C_1}dsd\tau x_1(s)\Sigma_{11}(s,\tau)\delta(\tau-u)\\
&\qquad+\frac{i}{2}\int_{C_1}ds\int_{C_2}d\tau\delta(s-u)\Sigma_{12}(s,\tau)x_2(\tau)+\frac{i}{2}\int_{C_2}ds\int_{C_1}d\tau x_2(s)\Sigma_{21}(s,\tau)\delta(\tau-u)\Big)\exp[\cdots]\\
&\quad=\Big(iF(u)+\frac{i}{2}\int_{C_1}d\tau\Sigma_{11}(u,\tau)x_1(\tau)+\frac{i}{2}\int_{C_1}dsx_1(s)\Sigma_{11}(s,u)\\
&\qquad+\frac{i}{2}\int_{C_2}d\tau\Sigma_{12}(u,\tau)x_2(\tau)+\frac{i}{2}\int_{C_2}dsx_2(s)\Sigma_{21}(s,u)\Big)\exp[\cdots]
\end{aligned}$$

ここで、$x_1,x_2=0$ とすれば

$$G_1(u)=\frac{\delta}{\delta x_1(u)}e^{iS_{IF}}\big|_{x_1=x_2=0}=iF(u)\tag{6}$$

x_2 では

$$
\begin{aligned}
G_2(u) &= \frac{\delta}{\delta x_2(u)} e^{iS_{IF}}\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta x_2(u)} \exp\Big[i\int_{C_1} ds\ F(s)x_1(s) + i\int_{C_2} ds\ F(s)x_2(s) + \frac{i}{2}\int_C dsd\tau x_a(s)\Sigma_{ab}(s,\tau)x_b(\tau)\Big]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \Big(i\int_{C_2} dsF(s)\frac{\delta x_2(s)}{\delta x_2(u)} + \frac{i}{2}\int_{C_2} dsd\tau\frac{\delta x_2(s)}{\delta x_2(u)}\Sigma_{22}(s,\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} dsd\tau x_2(s)\Sigma_{22}(s,\tau)\frac{\delta x_2(\tau)}{\delta x_2(u)} \\
&\quad - \frac{i}{2}\int_{C_2} ds\int_{C_1} d\tau\frac{\delta x_2(s)}{\delta x_2(u)}\Sigma_{21}(s,\tau)x_1(\tau) - \frac{i}{2}\int_{C_1} ds\int_{C_2} d\tau x_1(s)\Sigma_{12}(s,\tau)\frac{\delta x_2(\tau)}{\delta x_2(u)}\Big)\exp[\cdots]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \Big(iF(s) + \frac{i}{2}\int_{C_2} d\tau\ \Sigma_{22}(u,\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} ds\ x_2(s)\Sigma_{22}(s,u) \\
&\quad - \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau\ \Sigma_{21}(u,\tau)x_1(\tau) - \frac{i}{2}\int_{C_1} ds\ x_1(s)\Sigma_{12}(s,u)\Big)\exp[\cdots]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= iF(s) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

x_1 で 2 回行った場合も同様にしていくと

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta x_1(u)\delta x_1(u')} e^{iS_{IF}} &= \frac{\delta}{\delta x_1(u)}\Big(iF(u') + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau\Sigma_{11}(u',\tau)x_1(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_1} dsx_1(s)\Sigma_{11}(s,u') \\
&\qquad + \frac{i}{2}\int_{C_2} d\tau\Sigma_{12}(u',\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} dsx_2(s)\Sigma_{21}(s,u')\Big)\exp[\cdots] \\
&= \Big(\frac{i}{2}\Sigma_{11}(u',u) + \frac{i}{2}\Sigma_{11}(u,u')\Big)\exp[\cdots] \\
&\quad + \Big(iF(u') + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau\Sigma_{11}(u',\tau)x_1(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_1} dsx_1(s)\Sigma_{11}(s,u') \\
&\quad + \frac{i}{2}\int_{C_2} d\tau\Sigma_{12}(u',\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} dsx_2(s)\Sigma_{21}(s,u')\Big)\frac{\delta}{\delta x_1(u)}\exp[\cdots]
\end{aligned}
$$

$x_1 = x_2 = 0$ としても消えない項を取り出すと

$$
\begin{aligned}
G_{11}(u,u') &= \frac{\delta}{\delta x_1(u)\delta x_1(u')} e^{iS_{IF}}\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= (\frac{i}{2}\Sigma_{11}(u',u) + \frac{i}{2}\Sigma_{11}(u,u') + iF(u')iF(u))\exp[\cdots]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= i\Sigma_{11}(u,u') - F(u')F(u) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となります。

x_2, x_2 では

$$
\begin{aligned}
G_{22}(u,u') &= \frac{\delta}{\delta x_2(u)\delta x_2(u')} e^{iS_{IF}}\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta x_2(u)}\Big(iF(u') + \frac{i}{2}\int_{C_2} d\tau \Sigma_{22}(u',\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} ds x_2(s)\Sigma_{22}(s,u') \\
&\qquad\qquad + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau\ x_1(s)\Sigma_{12}(s,u') + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau \Sigma_{21}(u',\tau)x_1(\tau)\Big)\exp[\cdots]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \Big(\frac{i}{2}\Sigma_{22}(u',u) + \frac{i}{2}\Sigma_{22}(u,u')\Big)\exp[\cdots]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&\quad + \Big(iF(u') + \frac{i}{2}\int_{C_2} d\tau \Sigma_{22}(u',\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} ds x_2(s)\Sigma_{22}(s,u') \\
&\qquad\qquad + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau\ x_1(s)\Sigma_{12}(s,u') + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau \Sigma_{21}(u',\tau)x_1(\tau)\Big)\frac{\delta}{\delta x_1(u)}\exp[\cdots]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= i\Sigma_{22}(u,u') + iF(u')iF(u) \\
&= i\Sigma_{22}(u,u') - F(u)F(u')
\end{aligned} \tag{9}
$$

x_1, x_2 でも、最後に $x_1 = x_2 = 0$ にすることを踏まえて消えない項だけを取り出していくと

$$
\begin{aligned}
G_{12}(u,u') &= \frac{\delta^2}{\delta x_1(u)\delta x_2(u')}\exp\Big[i\int_{C_1} ds\ F(s)x_1(s) + i\int_{C_2} ds\ F(s)x_2(s) + \frac{i}{2}\int_C dsd\tau\ x_a(s)\Sigma_{ab}(s,\tau)x_b(\tau)\Big]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta x_1(u)}\Big(iF(u') + \frac{i}{2}\int_{C_1} ds\ x_1(s)\Sigma_{12}(s,u') + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau \Sigma_{21}(u',\tau)x_1(\tau) \\
&\qquad\qquad + \frac{i}{2}\int_{C_2} d\tau\ \Sigma_{22}(u',\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} ds\ \Sigma_{22}(s,u')x_2(u')\Big)\exp[\cdots]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \Big(\frac{i}{2}\Sigma_{12}(u,u') + \frac{i}{2}\Sigma_{21}(u',u) + iF(u')iF(u))\Big)\exp[\cdots]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= i\Sigma_{12}(u,u') - F(u)F(u')
\end{aligned} \tag{10}
$$

このとき、$x_2(u')$ は $x_1(u)$ より後の時間にいます。逆で行うと

$$
\begin{aligned}
G_{21}(u,u') &= \frac{\delta^2}{\delta x_2(u)\delta x_1(u')}\exp\Big[i\int_{C_1} ds\ F(s)x_1(s) + i\int_{C_2} ds\ F(s)x_2(s) + \frac{i}{2}\int_C dsd\tau\ x_a(s)\Sigma_{ab}(s,\tau)x_b(\tau)\Big]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta x_2(u)}\Big(iF(u') + \frac{i}{2}\int_{C_1} d\tau\ \Sigma_{11}(u',\tau)x_1(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_1} ds\ \Sigma_{11}(s,u')x_1(u') \\
&\qquad\qquad + \frac{i}{2}\int_{C_2} d\tau \Sigma_{12}(u',\tau)x_2(\tau) + \frac{i}{2}\int_{C_2} ds\ x_2(s)\Sigma_{21}(s,u')\Big)\exp[\cdots]\Big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \frac{i}{2}\Sigma_{12}(u',u) + \frac{i}{2}\Sigma_{21}(u,u') + iF(u')iF(u) \\
&= i\Sigma_{21}(u,u') - F(u)F(u')
\end{aligned} \tag{11}
$$

こちらでは $x_2(u)$ は $x_1(u')$ より後の時間にいます

ここで、S_{IF} を少し具体的にするために相互作用項の形を決めます。相互作用項は線形で

$$S_{int}[x,q] = \int dt\ x(t)\Xi[q(t)] \tag{12}$$

となっているとします (Ξ は $q(t)$ の線形結合による)。そうすると

$$\begin{aligned}
&e^{i(S_{ex}[q]+S_{int}[x,q])}e^{-i(S_{ex}[q']+S_{int}[x',q'])}\\
&\qquad = e^{iS_{ex}[q]}e^{-iS_{ex}[q']}\exp[iS_{int}[x,q]-iS_{int}[x',q']]\\
&\qquad = e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}\exp\Big[i\int dt\ (x(t)\Xi[q(t)]-x'(t)\Xi[q'(t)])\Big]
\end{aligned}$$

となるので、q,q' に対しても閉じた時間経路を使うことにし、q を C_1 上、q' を C_2 上として

$$\begin{aligned}
e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]} = &\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dq_i\int dq_i'\rho_{ex}(q_i,q_i';0)\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q\int_{q_i'}^{q}\mathcal{D}q'\\
&\times e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}\exp\Big[i\int_{C_1}dt\ x_1(t)\Xi[q(t)]+i\int_{C_2}dt\ x_2(t)\Xi[q'(t)]\Big]
\end{aligned}$$

明確にしていませんが $S_{ex}[q]-S_{ex}[q']$ も閉じた時間経路にいます。q は q_1、q' は q_2 と出来ますが、q,q' のままにします。これに対して同じように x_1,x_2 で汎関数微分を行えば $G_1,G_2,G_{11},G_{22},G_{12},G_{21}$ が求まるので、Σ_{ab} を Ξ によって書くことが出来ます。

x_1 では

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta x_1(u)}e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]} = &\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dq_i\int dq_i'\rho_{ex}(q_i,q_i';0)\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q\int_{q_i'}^{q}\mathcal{D}q'e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}\\
&\times i\int_{C_1}dt\ \delta(t-u)\Xi[q(t)]\exp\Big[i\int_{C_1}dt\ x_1(t)\Xi[q(t)]+i\int_{C_2}dt\ x_2(t)\Xi[q'(t)]\Big]\\
=\ & i\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dq_i\int dq_i'\rho_{ex}(q_i,q_i';0)\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q\int_{q_i'}^{q}\mathcal{D}q'e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}\Xi[q(u)]\exp\Big[i\int_{C}dt\ x(t)\Xi[q(t)]\Big]
\end{aligned}$$

$x_1=x_2=0$ として

$$\begin{aligned}
G_1(u) &= \frac{\delta}{\delta x_1(u)}e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]}\Big|_{x_1=x_2=0}\\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dq_i\int dq_i'\rho_{ex}(q_i,q_i';0)\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q\int_{q_i'}^{q}\mathcal{D}q'\ \Xi[q(u)]e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}\\
&= i\langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}
\end{aligned}$$

$\langle\ \rangle_{ex}$ は環境の作用によるので環境の系による熱的平均として定義して、ex はその意味で付けています。よって (6) から

$$F(u) = \langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}$$

となります。
　同じようにして、x_2 では

$$
\begin{aligned}
G_2(u) &= \frac{\delta}{\delta x_2(u)} e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]}\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q' \\
&\quad \times e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])} \big(i\int_{C_2} dt\ \delta(t-u)\Xi[q(t)]\big) \exp\Big[i\int_C dt\ x(t)\Xi[q(t)]\Big]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q'\ \Xi[q'(u)] e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])} \\
&= i\langle \Xi[q'(u)]\rangle_{ex}
\end{aligned}
$$

(7) から

$$
F(u) = \langle \Xi[q'(u)]\rangle_{ex}
$$

となります。
　x_1 で 2 回行った場合では

$$
\begin{aligned}
G_{11}(u,u') &= \frac{\delta^2}{\delta x_1(u)\delta x_1(u')} e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]}\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q' e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])} \\
&\quad \times i\Xi[q(u')] \frac{\delta}{\delta x_1(u)} \exp\Big[i\int_C dt\ x(t)\Xi[q(t)]\Big]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q'\ \Xi[q(u)]\Xi[q(u')] e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}
\end{aligned}
$$

この場合では経路積分の性質から u,u' による時間順序積 T が現れて

$$
\begin{aligned}
G_{11}(u,u') &= -(\theta(u-u')\langle(\Xi[q(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex} + \theta(u'-u)\langle(\Xi[q(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex}) \\
&= -\langle T(\Xi[q(u)]\Xi[q(u')])\rangle_{ex}
\end{aligned}
$$

θ は階段関数です。よって (8) から

$$
\begin{aligned}
i\Sigma_{11}(u,u') - F(u')F(u) &= -\langle T(\Xi[q(u)]\Xi[q(u')])\rangle_{ex} \\
\Sigma_{11}(u,u') &= i(\langle T(\Xi[q(u)]\Xi[q(u')])\rangle_{ex} - F(u)F(u')) \\
&= i\big(\langle T(\Xi[q(u)]\Xi[q(u')])\rangle_{ex} - \langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u')]\rangle_{ex}\big)
\end{aligned}
$$

x_2,x_2 では

$$
\begin{aligned}
G_{22}(u,u') &= \frac{\delta^2}{\delta x_2(u)\delta x_2(u')} e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]}\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q' e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])} \\
&\quad \times i\Xi[q'(u')] \frac{\delta}{\delta x_2(u)} \exp\Big[i\int_C dt\ x(t)\Xi[q(t)] \Big]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q'\ \Xi[q'(u)]\Xi[q'(u')] e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}
\end{aligned}
$$

この場合では時間順序が $+\infty$ から t_i なので逆向きの時間順序積 $\tilde{T}$ によって

$$
\begin{aligned}
G_{22}(u,u') &= -\big(\theta(u-u')\langle\Xi[q'(u')]\Xi[q'(u)]\rangle_{ex} + \theta(u'-u)\langle\Xi[q'(u)]\Xi[q'(u')]\rangle_{ex}\big) \\
&= -\langle\tilde{T}(\Xi[q'(u)]\Xi[q'(u')])\rangle_{ex}
\end{aligned}
$$

となり、(9) から

$$
\begin{aligned}
i\Sigma_{22}(u,u') - F(u')F(u) &= -\langle\tilde{T}(\Xi[q'(u)]\Xi[q'(u')])\rangle_{ex} \\
\Sigma_{22}(u,u') &= i\big(\langle\tilde{T}(\Xi[q'(u)]\Xi[q'(u')])\rangle_{ex} - F(u)F(u')\big) \\
&= i\big(\langle\tilde{T}(\Xi[q'(u)]\Xi[q'(u')])\rangle_{ex} - \langle\Xi[q'(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q'(u')]\rangle_{ex}\big)
\end{aligned}
$$

x_2 で汎関数微分しているので $F(u)=\langle\Xi[q'(u)]\rangle$、$F(u')=\langle\Xi[q'(u')]\rangle$ となります。
　今度は x_1, x_2 で行って

$$
\begin{aligned}
G_{12}(u,u') &= \frac{\delta^2}{\delta x_1(u)\delta x_2(u')} e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]}\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta x_1(u)} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q' e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])} \\
&\quad \times i\int_{C_2} dt\ \delta(t-u')\Xi[q'(t)] \exp\Big[i\int_C dt\ x(t)\Xi[q(t)] \Big]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q' e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])} \Xi[q'(u')] \frac{\delta}{\delta x_1(u)} \exp[\cdots]\big|_{x_1=x_2=0} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dq \int dq_i \int dq_i' \rho_{ex}(q_i,q_i';0) \int_{q_i}^{q} \mathcal{D}q \int_{q_i'}^{q} \mathcal{D}q' \Xi[q'(u')]\Xi[q(u)] e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])} \\
&= -\langle\Xi[q'(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex}
\end{aligned}
$$

今は $x_2(u')$ が常に $x_1(u)$ よりも後の時間だとしているので時間順序積は出てきません。よって、(10) から

$$
\begin{aligned}
i\Sigma_{12}(u,u')-F(u)F(u') =& \ -\langle\Xi[q'(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\\
\Sigma_{12}(u,u') =& \ i\big(\langle\Xi[q'(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex}-F(u)F(u')\big)\\
=& \ i\big(\langle\Xi[q'(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex}-\langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q'(u')]\rangle_{ex}\big)
\end{aligned}
$$

x_2 の方が $F(u')=\langle\Xi[q'(u')]\rangle$ で、x_1 の方が $F(u)=\langle\Xi[q(u)]\rangle$ です。逆では

$$
\begin{aligned}
G_{21}(u,u') =& \ \frac{\delta^2}{\delta x_2(u)\delta x_1(u')}e^{iS_{IF}[x_1,x_2;t]}\Big|_{x_1=x_2=0}\\
=& \ i\frac{\delta}{\delta x_2(u)}\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dq_i\int dq'_i\rho_{ex}(q_i,q'_i;0)\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q\int_{q'_i}^{q}\mathcal{D}q'e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}\Xi[q(u')]\exp[\cdots]\Big|_{x_1=x_2=0}\\
=& \ -\int_{-\infty}^{\infty}dq\int dq_i\int dq'_i\rho_{ex}(q_i,q'_i;0)\int_{q_i}^{q}\mathcal{D}q\int_{q'_i}^{q}\mathcal{D}q'\Xi[q'(u)]\Xi[q(u')]e^{i(S_{ex}[q]-S_{ex}[q'])}\\
=& \ -\langle\Xi[q'(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex}
\end{aligned}
$$

今度は $x_2(u)$ が $x_1(u')$ の後の時間になっています。(11) から

$$
\begin{aligned}
i\Sigma_{21}(u,u')-F(u)F(u') =& \ -\langle\Xi[q'(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex}\\
\Sigma_{21}(u,u') =& \ i\big(\langle\Xi[q'(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex}-F(u)F(u')\big)\\
=& \ i\big(\langle\Xi[q'(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex}-\langle\Xi[q'(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u')]\rangle_{ex}\big)
\end{aligned}
$$

まとめると

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{11}(u,u') =& \ i\big(\langle T(\Xi[q(u)]\Xi[q(u')])\rangle_{ex}-\langle\Xi[q(u')]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\big)\\
\Sigma_{22}(u,u') =& \ i\big(\langle\tilde{T}(\Xi[q'(u)]\Xi[q'(u')])\rangle_{ex}-\langle\Xi[q'(u')]\rangle_{ex}\langle\Xi[q'(u)]\rangle_{ex}\big)\\
\Sigma_{12}(u,u') =& \ i\big(\langle\Xi[q'(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex}-\langle\Xi[q'(u')]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\big)\\
\Sigma_{21}(u,u') =& \ i\big(\langle\Xi[q'(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex}-\langle\Xi[q'(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u')]\rangle_{ex}\big)
\end{aligned}
$$

となっています。これで相互作用形が (12) のときの S_{IF} が与えられたことになります。

(5) と比較して、R,I と Σ_{ab} の関係を出します。C_1 での q、C_2 での q' の区別は、C 上での Q を分けただけのものなので、今求めた Σ_{ab} は

$$
\Sigma_C(u-u')=\theta_C(u-u')\langle\Xi[Q(u')]\Xi[Q(u)]\rangle_{ex}+\theta_C(u'-u)\langle\Xi[Q(u)]\Xi[Q(u')]\rangle_{ex}
$$

のことです。階段関数 θ_C は u,u' が C_1,C_2 のどこにいるかで決まり、それによって Σ_C が Σ_{ab} に対応します。これから (Q は q と書きます)

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{<}(u,u') =& \ i\langle\Xi[q(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex}-i\langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u')]\rangle_{ex}\\
\Sigma^{>}(u,u') =& \ i\langle\Xi[q(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex}-i\langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u')]\rangle_{ex}
\end{aligned}
$$

という記号を定義します。これによって Σ_{11} は

$$\Sigma_{11}(u,u') = \theta(u-u')\Sigma^{>}(u,u') + \theta(u'-u)\Sigma^{<}(u,u')$$

と書くことができ、u,u' の時間順序が明確になっていれば $\Sigma^{<}(u,u')$ は $\Sigma_{12}(u,u')$、$\Sigma^{>}(u,u')$ は $\Sigma_{21}(u,u')$ に対応します。$\Sigma^{<},\Sigma^{>}$ を足したものと引いたものは交換関係と反交換関係によって

$$\Sigma^{>}(u,u') - \Sigma^{<}(u,u') = i\langle\Xi[q(u)]\Xi[q(u')]\rangle_{ex} - i\langle\Xi[q(u')]\Xi[q(u)]\rangle_{ex} = i(\langle[\Xi[q(u)],\Xi[q(u')]]\rangle_{ex}$$
$$\Sigma^{>}(u,u') + \Sigma^{<}(u,u') = i\langle\{[\Xi[q(u)],\Xi[q(u')]]\}\rangle_{ex} - 2i\langle\Xi[q(u)]\rangle_{ex}\langle\Xi[q(u')]\rangle_{ex}$$

と書けて、それぞれを

$$\Sigma_R(u,u') = \Sigma^{>}(u,u') - \Sigma^{<}(u,u')$$
$$\Sigma_I(u,u') = \Sigma^{>}(u,u') + \Sigma^{<}(u,u')$$

と定義します。$\Sigma^{>}(u,u') = \Sigma^{<}(u,u')$ から

$$\Sigma_R(u',u) = \Sigma^{>}(u',u) - \Sigma^{<}(u',u) = \Sigma^{<}(u,u') - \Sigma^{<}(u,u') = -\Sigma_R(u,u')$$
$$\Sigma_I(u,u') = \Sigma_I(u',u)$$

となっています。
　Σ_R,Σ_I と (5) を比べてみます。閉じた時間経路上で書くと (5) は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{C_1}du\int_{C_1}du'\ x_1(u)(R(u,u')+iI(u,u'))x_1(u') + \frac{1}{2}\int_{C_2}du\int_{C_2}du'\ x_2(u)(-R(u,u')+iI(u,u'))x_2(u')\\&\quad+\frac{1}{2}\int_{C_1}du\int_{C_2}du'\ x_1(u)(-R(u,u')+iI(u,u'))x_2(u') + \frac{1}{2}\int_{C_2}du\int_{C_1}du'\ x_2(u)(R(u,u')+iI(u,u'))x_1(u')\end{aligned}$$

x_a に挟まれている部分が Σ_{ab} なので

$$\frac{1}{2}(R(u,u')+iI(u,u')) = \theta(u-u')\Sigma^{>}(u,u') + \theta(u'-u)\Sigma^{<}(u,u')$$
$$\frac{1}{2}(-R(u,u')+iI(u,u')) = \theta(u'-u)\Sigma^{>}(u,u') + \theta(u-u')\Sigma^{<}(u,u')$$
$$\frac{1}{2}(-R(u,u')+iI(u,u')) = \Sigma^{<}(u,u')$$
$$\frac{1}{2}(R(u,u')+iI(u,u')) = \Sigma^{>}(u,u')$$

これらから R は

$$
\begin{aligned}
R(u,u') &= \Sigma_{11}(u,u') - \Sigma^{<}(u,u') \\
&= \theta(u-u')\Sigma^{>}(u,u') + \theta(u'-u)\Sigma^{<}(u,u') - \Sigma^{<}(u,u') \\
&= \theta(u-u')\Sigma^{>}(u,u') + \theta(u'-u)\Sigma^{<}(u,u') - \theta(u'-u)\Sigma^{<}(u,u') - \theta(u-u')\Sigma^{<}(u,u') \\
&= \theta(u-u')\Sigma^{>}(u,u') - \theta(u-u')\Sigma^{<}(u,u') \\
&= \theta(u-u')(\Sigma^{>}(u,u') - \Sigma^{<}(u,u')) \\
&= \theta(u-u')\Sigma_R(u-u')
\end{aligned}
$$

また、$\theta(u-u')$ のために $u>u'$ のときに値を持つことと、$R(u,u')$ は Σ_{11} の実部であることから

$$
R(u,u') = 2\theta(u-u')\mathrm{Re}\Sigma_{11}
$$

I は単純に

$$
iI(u,u') = \Sigma^{>}(u,u') + \Sigma^{<}(u,u') = \Sigma_I(u,u') \tag{13}
$$

そして、I は Σ_{11} の虚部なので

$$
iI = 2\mathrm{Im}\Sigma_{11}
$$

となります。

このようにして出てきた R と I が何のか見ていきます。そのために、I を使ってガウス分布

$$
P[\xi] = C\exp[-\frac{1}{2}\int dsds'\xi(s)I^{-1}(s,s')\xi(s')]
$$

を導入します。ξ はこれによって平均を取ると 0 になるものです。C は規格化定数で確率の規格化

$$
1 = \int \mathcal{D}\xi P[\xi] = C\int \mathcal{D}\xi \exp[-\frac{1}{2}\int dsds'\xi(s)I^{-1}(s,s')\xi(s')] = CC'(\det I^{-1})^{-1/2}
$$

から

$$
C = (C'(\det I^{-1})^{-1/2})^{-1}
$$

C' はガウス積分で出てくる定数です。$\xi(u)$ の平均が実際に 0 になることと、$\xi(u)\xi(u')$ の平均を見ておきます。そのために

$$
P[\xi,J] = C\exp[-\frac{1}{2}\int dsds'\ \xi(s)I^{-1}(s,s')\xi(s') + \int ds\ \xi(s)J(s)]
$$

として源 J を加えます。これを J で汎関数微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta P[\xi,J]}{\delta J(u)} &= C\xi(u)\exp\Big[-\frac{1}{2}\int dsds'\ \xi(s)I^{-1}(s,s')\xi(s') + \int ds\ \xi(s)J(s)\Big] \\
\frac{\delta^2 P[\xi,J]}{\delta J(u)\delta J(u')} &= C\xi(u)\xi(u')\exp\Big[-\frac{1}{2}\int dsds'\ \xi(s)I^{-1}(s,s')\xi(s') + \int ds\ \xi(s)J(s)\Big]
\end{aligned}
$$

となるので、ガウス積分

$$\int \mathcal{D}\eta \exp\Big[-\frac{1}{2}\int dydy'\ \eta(y)M(y,y')\eta(y')+\int dy\ \eta(y)J(y)\Big] = C'(\det M^{-1})^{-1/2}\exp\Big[\frac{1}{2}\int dydy' J(y)M^{-1}(y,y')J(y')\Big]$$

を使って

$$\begin{aligned}
\langle\xi(u)\rangle_P &= \int \mathcal{D}\xi\ \xi(u)P[\xi] \\
&= \int \mathcal{D}\xi \frac{\delta P[\xi,J]}{\delta J(u)}\Big|_{J=0} \\
&= C\frac{\delta}{\delta J(u)}\int \mathcal{D}\xi\ \ \exp[-\frac{1}{2}\int dsds'\ \xi(s)I^{-1}(s,s')\xi(s') + \int ds\ \xi(s)J(s)]\Big|_{J=0} \\
&= CC'(\det I^{-1})^{-1/2}\frac{\delta}{\delta J(u)}\exp[\frac{1}{2}\int dsds'\ J(s)I(s,s')J(s')\Big|_{J=0}
\end{aligned}$$

これは $J=0$ で明らかに消えるので

$$\langle\xi(u)\rangle = 0$$

同様に

$$\begin{aligned}
\langle\xi(u)\xi(u')\rangle_P &= \int \mathcal{D}\xi\ \xi(u)\xi(u')P[\xi] = \int \mathcal{D}\xi\frac{\delta^2 P[\xi,J]}{\delta J(u)\delta J(u')}\Big|_{J=0} \\
&= CC'(\det I^{-1})^{-1/2}\frac{\delta}{\delta J(u)}(\frac{1}{2}\int dsI(u',s)J(s) + \frac{1}{2}\int dsJ(s)I(s,u'))\exp[\frac{1}{2}\int dsds'J(s)I(s,s')J(s')\Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{2}I(u',u) + \frac{1}{2}I(u,u')
\end{aligned}$$

$I(u,u')$ は (13) から分かるように u,u' の入れ替えで同じなので

$$\langle\xi(u)\xi(u')\rangle_P = I(u',u)$$

となります。
　次に S_{IF} に

$$S'_{IF} = S_{IF} + \int_{t_i}^{t} ds\ \xi(s)(x(s)-x'(s))$$

として新しい項を加えたものを作ります。$P[\xi]$ で新しい項による exp の平均を取ってみると

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\xi\ P[\xi]\exp\Big[i\int_{t_i}^{t} ds\ \xi(s)(x(s)-x'(s))\Big] \\
&\quad = C\int \mathcal{D}\xi\ \exp\Big[-\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} dsds'\xi(s)I^{-1}(s,s')\xi(s')+i\int_{t_i}^{t} ds\ \xi(s)(x(s)-x'(s))\Big] \\
&\quad = CC'(\det I^{-1})^{-1/2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} dsds'(x(s)-x'(s))I(s,s')(x(s)-x'(s))\Big] \\
&\quad = \ \exp\Big[-\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} dsds'(x(s)-x'(s))I(s,s')(x(s)-x'(s))\Big]
\end{aligned}
$$

最後で符号がマイナスになっているのは

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp[\frac{b^2}{4a^2}]\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+ibx}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp[-\frac{b^2}{4a^2}]
$$

との対応からです。これに S_{IF} の実部を加えてみると (4) から

$$
\begin{aligned}
&\exp[i\mathrm{Re}S_{IF}]\int \mathcal{D}\xi\ P[\xi]\exp\Big[i\int_{t_i}^{t} ds\ \xi(s)(x(s)-x'(s))\Big] \\
&= \ \exp\Big[i\int_{t_i}^{t} ds\ F(s)(x(s)-x'(s))+\frac{i}{2}\int_{t_i}^{t} dsd\tau\ R(s,\tau)(x(s)-x'(s))(x(\tau)+x'(\tau)) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} dsds'(x(s)-x'(s))I(s,s')(x(s)-x'(s))\Big] \\
&= \ \exp[iS_F]
\end{aligned}
$$

となることが分かります。よって

$$
\exp[iS_F]=\int \mathcal{D}\xi\ P[\xi]\exp\Big[i\mathrm{Re}S_{IF}+i\int ds\ \xi(s)(x(s)-x'(s))\Big]
$$

と書けます。

ここで (3) に戻ります。今の結果を入れると

$$
\begin{aligned}
S_{eff}=S_0[x]-S_0[x']&+\int_{t_i}^{t} ds\ F(s)(x(s)-x'(s)) \\
&+\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} dsd\tau\ R(s,\tau)(x(s)-x'(s))(x(\tau)+x'(\tau))+\int ds\ \xi(s)(x(s)-x'(s))
\end{aligned}
$$

となります。作用を汎関数微分して 0 になるとすれば運動方程式になるので、S_{eff} を x で汎関数微分して 0 になるとして

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{\delta S_{eff}}{\delta x(t)} \\
&=\frac{\delta S_0[x]}{\delta x(t)}+F(t)+\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} d\tau\ R(t,\tau)(x(\tau)+x'(\tau))+\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} ds\ R(s,t)(x(s)-x'(s))+\xi(t)
\end{aligned}
$$

x' でも同じようにすれば (古典的な作用のみを見るので閉じた時間経路による汎関数微分ではない)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta S_{eff}}{\delta x'(t)} \\ &= -\frac{\delta S_0[x']}{\delta x'(t)} - F(t) - \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} d\tau\ R(t,\tau)(x(\tau)+x'(\tau)) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t} ds\ R(s,t)(x(s)-x'(s)) - \xi(t) \end{aligned}$$

このとき $x = x'$ とすれば、同じ式になります。なので、解 ($x(t)$ の軌道) として $x = x'$ での

$$-\frac{\delta S_0[x]}{\delta x(t)} - F(t) - \int_{t_i}^{t} d\tau\ R(t,\tau)x(\tau) = \xi(t)$$

を採用します。作用の汎関数微分はラグランジアン L で書けば

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

となっているので、S_0 が 1 個の自由粒子の作用だとすれば、オイラー・ラグランジュ方程式であることから第一項から自由粒子の運動方程式が出てきます。

そうすると、v を粒子の速度として (質量は 1 とします)

$$\frac{dv}{dt} - F(t) - \int_{t_i}^{t} d\tau\ R(t,\tau)x(\tau) = \xi(t)$$

これは自由粒子が環境の影響を受けている方程式だと見れます。ここで、古典論における周りの環境の影響による運動の代表であるブラウン運動を持ち込みます。なので、ランジュバン方程式

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\partial S(v)}{\partial v} = \eta(t)$$

と比べてみます。η は揺動力、S は摩擦等の外力を作る関数 (例えば $S = \gamma v^2/2$ で速度に比例する摩擦) です。これから、$\xi(t)$ と $\eta(t)$ が対応し、F は外力として R は散逸として S の部分に対応していることが分かります。

実際に、ξ はガウス分布に対して

$$\langle \xi(t) \rangle_P = 0\ ,\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle_P = I(t',t)$$

となっていて、$S = \gamma v^2/2$ におけるブラウン運動において $\eta(t)$ はガウス分布に対して

$$\langle \eta(t) \rangle_P = 0\ ,\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle_P = 2\gamma k_B T \delta(t-t')$$

となることから

$$I(t',t) = 2\gamma k_B T \delta(t-t')$$

となり、I は揺動力によるノイズになっていることが分かります。そして、F は 0 だとして R を

$$R(t,\tau) = -\gamma \frac{d\delta(t-\tau)}{d\tau}$$

としてみると、デルタ関数の性質

$$\frac{d\delta(-x)}{dx} = -\frac{d\delta(x)}{dx}\ ,\ \int dx\ f(x)\frac{d\delta(x-y)}{dx} = -\frac{df(y)}{dy}$$

から

$$-\int_{t_i}^{t} d\tau\ R(t,\tau)x(\tau) = \gamma\int_{t_i}^{t} d\tau\ \frac{d\delta(t-\tau)}{d\tau}x(\tau) = \gamma\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \gamma v(t)$$

となり、これは $S=\gamma v^2/2$ での摩擦に対応するので、R は散逸と考えられます。このように今見た近似において、influence action の中に系のノイズと散逸が含まれていることが分かります。ここでの話はかなり簡易的なものなので、話の背景を理解するにはもっといろいろと見ていく必要があります。

ついでに、場の理論の場合も見ておきます。実数スカラー場だとして注目している系の作用を $S_0[\phi]$、環境の系を $S_{ex}[\psi]$ とします。環境の系での ψ もスカラー場だとします。全体の作用は

$$S[\phi,\psi] = S_0[\phi] + S_{ex}[\psi] + S_{int}[\phi,\psi]$$

$S_{int}[\phi,\psi]$ は系のやりとりによる相互作用で、S_0 や S_{ex} には場の相互作用が入っていてもいいです。密度行列は初期状態の時間を t_i として

$$\rho[\phi,\psi,\phi',\psi';t] = \langle\phi,\psi|\rho(t)|\phi',\psi'\rangle = \langle\phi,\psi;t|\rho(t_i)|\phi',\psi';t\rangle$$

と与えます。完全性を挟んでいくことで

$$\begin{aligned}
\rho[\phi,\psi,\phi',\psi';t] &= \int d\phi_i d\psi_i \int d\phi_i' d\psi_i' \langle\phi,\psi;t|\phi_i,\psi_i\rangle\langle\phi_i,\psi_i|\rho(t_i)|\phi_i',\psi_i'\rangle\langle\phi_i',\psi_i'|\phi',\psi';t\rangle \\
&= \int d\phi_i d\psi_i \int d\phi_i' d\psi_i' \langle\phi,\psi;t|\phi_i,\psi_i\rangle\rho[\phi_i,\psi_i,\phi_i',\psi_i';t_i]\langle\phi_i',\psi_i'|\phi',\psi';t\rangle \\
&= \int d\phi_i d\psi_i \int d\phi_i' d\psi_i' \int_{\phi_i}^{\phi}\mathcal{D}\phi\int_{\psi_i}^{\psi}\mathcal{D}\psi e^{iS[\phi,\psi]}\rho[\phi_i,\psi_i,\phi_i',\psi_i';t_i]\int_{\phi_i'}^{\phi'}\mathcal{D}\phi'\int_{\psi_i'}^{\psi'}\mathcal{D}\psi' e^{-iS[\phi',\psi']}
\end{aligned}$$

これから ψ を消した $\rho_r[\phi,\phi';t]$ を作るので

$$\rho_r[\phi,\phi';t] = \int d\psi\ \rho[\phi,\psi,\phi',\psi;t]$$

とします。ここでも初期状態の時間 t_i において

$$\rho[\phi_i,\psi_i,\phi_i',\psi_i';t_i] = \rho_0[\phi_i,\phi_i';t_i]\rho_{ex}[\psi_i,\psi_i';t_i]$$

と分解できるとすることで

$$
\begin{aligned}
\rho_r[\phi,\phi';t] = &\int d\psi\ \rho[\phi,\psi,\phi',\psi;t] \\
= &\int d\psi \int d\phi_i d\psi_i \int d\phi'_i d\psi'_i \int_{\phi_i}^{\phi} \mathcal{D}\phi \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\phi'_i}^{\phi'} \mathcal{D}\phi' \int_{\psi'_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi' \\
&\times e^{iS[\phi,\psi]} e^{-iS[\phi',\psi']} \rho_{ex}[\psi_i,\psi'_i;t_i]\rho_0[\phi_i,\phi'_i;t_i] \\
= &\int d\phi_i \int d\phi'_i \mathcal{J}_r[\phi,\phi',t|\phi_i.\phi'_i,t_i]\rho_0[\phi_i,\phi'_i;t_i]
\end{aligned}
$$

と書けます。ここで $\mathcal{J}_r[\phi,\phi',t|\phi_i.\phi'_i,t_i]$ から Feynman-Vernon influence functional を

$$
\begin{aligned}
e^{iS_{IF}[\phi,\phi']} = \ \mathcal{F}[\phi,\phi'] = &\int d\psi \int d\psi_i \int d\psi'_i\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi'_i;t_i] \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\psi'_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi' \\
&\times \exp[i(S_{ex}[\psi] + S_{int}[\phi,\psi] - S_{ex}[\psi'] - S_{int}[\phi',\psi'])]
\end{aligned}
$$

と与えることで

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_r[\phi,\phi',t|\phi_i.\phi'_i,t_i] = &\int_{\phi_i}^{\phi} \mathcal{D}\phi \int_{\phi'_i}^{\phi'} \mathcal{D}\phi' \exp[i(S[\phi] - S[\phi'])] F[\phi,\phi'] \\
= &\int_{\phi_i}^{\phi} \mathcal{D}\phi \int_{\phi'_i}^{\phi'} \mathcal{D}\phi' \exp[i(S[\phi] - S[\phi'] + S_{IF}[\phi,\phi'])]
\end{aligned}
$$

となります。

今度は $\mathcal{F}[\phi,\phi']$ を求めるために摂動論を使ってみます。場自体は相互作用していないとして、S_{int} が微小な場合で展開していきます。そうすると $\exp S_{IF}$ は

$$
\begin{aligned}
&\exp[i(S_{ex}[\psi] - S_{ex}[\psi'] + S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi'])] \\
&= e^{i(S_{ex}[\psi] - S_{ex}[\psi'])}(1 + i(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi']) - \frac{1}{2}(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi'])^2 + \cdots)
\end{aligned}
$$

S_{ex} には場の相互作用がないとしています。この展開を $\mathcal{F}$ に入れて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\phi,\phi'] = & \int d\psi \int d\psi_i \int d\psi_i'\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi_i';t_i] \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\psi_i'}^{\psi} \mathcal{D}\psi' \\
& \times \exp[i(S_{ex}[\psi] + S_{int}[\phi,\psi] - S_{ex}[\psi'] - S_{int}[\phi',\psi'])] \\
= & \int d\psi \int d\psi_i \int d\psi_i'\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi_i';t_i] \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\psi_i'}^{\psi} \mathcal{D}\psi' \\
& \times e^{i(S_{ex}[\psi]-S_{ex}[\psi'])}\big(1 + i(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi']) - \frac{1}{2}(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi'])^2 + \cdots\big) \\
= & \int d\psi \int d\psi_i \int d\psi_i'\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi_i';t_i] \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS_{ex}[\psi]} \int_{\psi_i'}^{\psi} \mathcal{D}\psi' e^{-iS_{ex}[\psi']} \\
& + \int d\psi \int d\psi_i \int d\psi_i'\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi_i';t_i] \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\psi_i'}^{\psi} \mathcal{D}\psi' e^{i(S_{ex}[\psi]-S_{ex}[\psi'])} \\
& \times \big(i(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi']) - \frac{1}{2}(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi'])^2 + \cdots\big)
\end{aligned}
$$

第一項は積分が実行されれば定数 N になるので (ϕ がいないから)、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\phi,\phi'] = N\Big(1 + N^{-1} & \int d\psi \int d\psi_i \int d\psi_i'\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi_i';t_i] \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\psi_i'}^{\psi} \mathcal{D}\psi' e^{i(S_{ex}[\psi]-S_{ex}[\psi'])} \\
& \times \big(i(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi']) - \frac{1}{2}(S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi'])^2 + \cdots\big)\Big)
\end{aligned}
$$

とし、N は今は影響しないので無視します。
　ここで環境の系による熱的平均を

$$
\langle A \rangle = \int d\psi \int d\psi_i \int d\psi_i'\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi_i';t_i] \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\psi_i'}^{\psi} \mathcal{D}\psi' e^{i(S_{ex}[\psi]-S_{ex}[\psi'])} A
$$

と定義します ($\langle A \rangle$ に ex を付けると見づらくなるので省きます)。そうすると $\mathcal{F}[\phi,\phi']$ は

$$
\mathcal{F}[\phi,\phi'] = 1 + i\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - i\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle - \frac{1}{2}\langle (S_{int}[\phi,\psi] - S_{int}[\phi',\psi'])^2\rangle + \cdots
$$

これを使って

$$
e^{iS_{IF}[\phi,\phi']} = \mathcal{F}[\phi,\phi']
$$

の対数を取って展開すると、

$$
\begin{aligned}
iS_{IF}[\phi,\phi'] = & \log[1+i\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - i\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle - \frac{1}{2}\langle (S_{int}[\phi,\psi]-S_{int}[\phi',\psi'])^2\rangle + \cdots] \\
&= i\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - i\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle - \frac{1}{2}\langle (S_{int}[\phi,\psi]-S_{int}[\phi',\psi'])^2\rangle + \cdots \\
&\quad - \frac{1}{2}\big(i\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - i\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle - \frac{1}{2}\langle (S_{int}[\phi,\psi]-S_{int}[\phi',\psi'])^2\rangle + \cdots\big)^2 \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

となるので、S_{int} の 2 次までを拾うと

$$
\begin{aligned}
iS_{IF}[\phi,\phi'] &\simeq i\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - i\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\langle (S_{int}[\phi,\psi]-S_{int}[\phi',\psi'])^2\rangle + \frac{1}{2}(\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - \langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle)^2 \\
&= i\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - i\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle - \frac{1}{2}\langle S^2_{int}[\phi,\psi]\rangle + \langle S^2_{int}[\phi',\psi']\rangle - 2\langle S_{int}[\phi,\psi]S_{int}[\phi',\psi']\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}(\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle^2 + \langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle^2 - 2\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle) \\
&= i\langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle - i\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\big(\langle S^2_{int}[\phi,\psi]\rangle - \langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle^2\big) - \frac{1}{2}\big(\langle S^2_{int}[\phi',\psi']\rangle - \langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle^2\big) \\
&\quad + \langle S_{int}[\phi,\psi]S_{int}[\phi',\psi']\rangle - \langle S_{int}[\phi,\psi]\rangle\langle S_{int}[\phi',\psi']\rangle
\end{aligned}
$$

このように influence action S_{IF} の展開形が求まります。
　熱的平均は、$\mathcal{F}$ に源 J, J' を加えて生成汎関数

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[J,J'] = & \int d\psi \int d\psi_i \int d\psi'_i\ \rho_{ex}[\psi_i,\psi'_i;t_i] \\
& \times \int_{\psi_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\psi'_i}^{\psi} \mathcal{D}\psi' \exp[i\big(S_{ex}[\psi] + \int d^4x J(x)\psi(x) - S_{ex}[\psi'] - \int d^4x J'(x)\psi'(x)\big)]
\end{aligned}
$$

とすることで、$\langle\ \rangle$ は通常の生成汎関数の話と同じように

$$
\langle A[\psi,\psi']\rangle = A[\frac{\delta}{i\delta J},\frac{\delta}{i\delta J'}]\mathcal{F}[J,J']\big|_{J=J'=0}
$$

と求められます。なので、例えばファインマン伝播関数に対応するものとして (t_i から未来方向に進む時間経路上にいる場合)

$$
\langle T(\psi(x)\psi(y))\rangle = \frac{\delta}{i\delta J(x)}\frac{\delta}{i\delta J(y)}\mathcal{F}[J,J']\big|_{J=J'=0}
$$

今は $\mathcal{F}$ の S_{ex} は相互作用のない実数スカラー場だとしているので、$\mathcal{F}$ の形から分かるように通常のスカラー場の伝播関数が出てきます。なので、

$$
D_F(x,y) = \langle T(\psi(x)\psi(y))\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2_\psi+i\epsilon}e^{ip(x-y)}
$$

となります。t_i から未来方向に進む時間経路のみを使いましたが、閉じた時間経路にすることで 4 つの伝播関数が出てきます。

後は環境の系との相互作用の形を与えて計算してけばいいです。例えば

$$S_{int} = -\lambda \int d^4x \phi^2(x) \psi^2(x)$$

とするなら

$$\langle S_{int}[\phi, \psi] \rangle = -\lambda \int d^4x \phi^2(x) \frac{\delta}{i\delta J(x)} \frac{\delta}{i\delta J(x)} \mathcal{F}[J, J'] \big|_{J=J'=0} = -\lambda \int d^4x \phi^2(x) D_F(x, x)$$

となり、$D_F(x, x)$ はループを作るので発散します。なので、くり込みが必要になります。