空洞放射

有限温度での電磁場を扱っていきます。ゲージ場での量子化の問題は経路積分と同じように処理できるので、経路積分での結果を流用してしまいます。
粒子との相互作用のない電磁場を考えるので、状況としては空洞放射です。なので、ここでの計算結果は通常の統計力学で出てくる空洞放射の結果と一致するはずです。

　電磁場の経路積分の形は

$$Z_F = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[i\int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha}(F[A_\mu])^2 - \overline{\eta}^a M_{ab}\eta^b\right)\right] \tag{1}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$M = \frac{\delta F}{\delta \Lambda}$$

A_μ は 4 元ベクトルポテンシャル、$\eta, \overline{\eta}$ はゴースト、反ゴースト場、α はゲージパラメータ、$F[A_\mu]$ はゲージ固定関数です。Λ はゲージ不変性による

$$A_\mu \ \Rightarrow\ A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

で出てくるものです。
　これを分配関数にします。電磁場のときでも β による周期性があるので、時間成分の積分は $0 \sim \beta$ になります。というわけで、結局手続きはスカラー場やディラック場と同じなので、ユークリッド化して周期性を入れればいいだけです。ユークリッド化するには、$t \to -i\tau$, $A_0 \to iA_4$ という置き換えをします。この段階で置き換えるより、

$$Z_F = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu]\delta[F[A_\mu]] \exp[S[A]]$$

$$\Delta_{FP}[A_\mu] = \det\left|\frac{\delta F(A_\mu)}{\delta\Lambda}\right|_{F=0} = \det M$$

$$S[A] = i\int d^4x\mathcal{L}$$

この段階の方が分かりやすいので、こっちで変形していきます。この段階での exp 部分は簡単に

$$i\int d^4x\mathcal{L} \ \Rightarrow\ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E$$

となります。E はユークリッドを表わしていて、$\mathcal{L}_E$ は $t \to -i\tau$, $A_0 \to iA_4$ と置き換えたものです (正確には完全にユークリッド化されていませんが、便宜上ユークリッドだとしてしまいます)。というわけで分配関数 Z は

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu]\delta[F[A_\mu]] \exp\Big[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\Big] \tag{2}$$

となるだけです。

具体的にゲージを選んで見てみます。まず、軸性ゲージ (axial gauge)$A_3 = 0$ とすれば、ゲージ固定関数 $F[A_\mu]$ は A_3 になるので

$$\delta[F[A_\mu]] = \delta[A_3]$$

$$\Delta_{FP}[A_3] = \det\left|\frac{\delta F[A_3]}{\delta\Lambda}\right| = \det\left|\frac{\delta[A_3 + \partial_3\Lambda]}{\delta\Lambda}\right| = \det\partial_3 \ \Rightarrow\ M = \partial_3$$

ということになって

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \delta[F[A_3]] \det(\partial_3) \exp\Big[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\Big]$$

$\mathcal{L}_E$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{4}(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) - \frac{1}{4}(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) - \frac{1}{4}(\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0)(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1)(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) - \frac{1}{4}(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) - \frac{1}{4}(\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1)(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2)(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2) - \frac{1}{4}(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)(\partial^2 A^1 - \partial^1 A^2) - \frac{1}{4}(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3)(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3)(\partial^3 A^2 - \partial^2 A^3) \\
&= -\frac{1}{4}(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) - \frac{1}{4}(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_0)(\partial^3 A^0) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1)(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) - \frac{1}{4}(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_1)(\partial^3 A^1) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2)(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2) - \frac{1}{4}(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)(\partial^2 A^1 - \partial^1 A^2) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_2)(\partial^3 A^2) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_3 A_0)(\partial^3 A^0) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_1)(\partial^3 A^1) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_2)(\partial^3 A^2) \\
&= -\frac{1}{4}(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)(-\partial_0 A_1 + \partial_1 A_0) - \frac{1}{4}(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)(-\partial_0 A_2 + \partial_2 A_0) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_0)(-\partial_3 A_0) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1)(-\partial_1 A_0 + \partial_0 A_1) - \frac{1}{4}(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_1)(\partial_3 A_1) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2)(-\partial_2 A_0 + \partial_0 A_2) - \frac{1}{4}(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_2)(\partial_3 A_2) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_3 A_0)(-\partial_3 A_0) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_1)(\partial_3 A_1) - \frac{1}{4}(\partial_3 A_2)(\partial_3 A_2) \\
&= \frac{1}{4}(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)^2 + \frac{1}{4}(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)^2 + \frac{1}{4}(\partial_3 A_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1)^2 - \frac{1}{4}(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^2 - \frac{1}{4}(\partial_3 A_1)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2)^2 - \frac{1}{4}(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)^2 - \frac{1}{4}(\partial_3 A_2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(\partial_3 A_0)^2 - \frac{1}{4}(\partial_3 A_1)^2 - \frac{1}{4}(\partial_3 A_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3 A_0)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\partial_0 \boldsymbol{A} - \nabla A_0)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \qquad (\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, 0))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_E &= \frac{1}{2}(i\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{A} - i\nabla A_4)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{A} - \nabla A_4)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{A})^2
\end{aligned}
$$

これを部分積分して、表面項を落として変形すれば、第一項は

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{A}-\nabla A_4)^2 &= (\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\tau})^2+(\nabla A_4)^2-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\tau}\cdot\nabla A_4-\nabla\cdot A_4\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\tau}\\ &= -\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial\tau^2}-A_4\nabla^2A_4+\boldsymbol{A}\cdot(\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla A_4)+A_4\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\tau}\end{aligned}$$

第二項は (∇ を使った形に持っていっても同じことなので、個別にやってしまいます)

$$\begin{aligned}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2 &= (\partial_1A_2-\partial_2A_1)^2+(\partial_3A_1)^2+(\partial_3A_2)^2\\ &= (\partial_1A_2)^2+(\partial_2A_1)^2-\partial_1A_2\partial_2A_1-\partial_2A_1\partial_1A_2+(\partial_3A_1)^2+(\partial_3A_2)^2\\ &= (\partial_2A_1)^2+(\partial_3A_1)^2+(\partial_1A_2)^2+(\partial_3A_2)^2-\partial_1A_2\partial_2A_1-\partial_2A_1\partial_1A_2\\ &= -A_1\partial_2^2A_1-A_1\partial_3^2A_1-A_2\partial_1^2A_2-A_2\partial_3^2A_2+A_2\partial_1\partial_2A_1+A_1\partial_2\partial_1A_2\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E=\frac{1}{2}\big[&\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial\tau^2}+A_4\nabla^2A_4-\boldsymbol{A}\cdot(\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla A_4)-A_4\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\tau}\\ &+A_1\partial_2^2A_1+A_1\partial_3^2A_1+A_2\partial_1^2A_2+A_2\partial_3^2A_2-A_2\partial_1\partial_2A_1-A_1\partial_2\partial_1A_2\big]\\ =\frac{1}{2}\big[&A_4\nabla^2A_4+A_1(\partial_2^2+\partial_3^2+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2})A_1+A_2(\partial_1^2+\partial_3^2+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2})A_2\\ &-A_4\partial_1\frac{\partial}{\partial\tau}A_1-A_4\partial_2\frac{\partial}{\partial\tau}A_2-A_1\partial_1\frac{\partial}{\partial\tau}A_4-A_2\partial_2\frac{\partial}{\partial\tau}A_4\\ &-A_2\partial_1\partial_2A_1-A_1\partial_2\partial_1A_2\big]\end{aligned}$$

これは行列で書けば

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(A_4,A_1,A_2)\begin{pmatrix}\nabla^2 & -\partial_1\frac{\partial}{\partial\tau} & -\partial_2\frac{\partial}{\partial\tau}\\ -\partial_1\frac{\partial}{\partial\tau} & \partial_2^2+\partial_3^2+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} & -\partial_1\partial_2\\ -\partial_2\frac{\partial}{\partial\tau} & -\partial_1\partial_2 & \partial_1^2+\partial_3^2+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_4\\A_1\\A_2\end{pmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}(A_4,A_1,A_2)\begin{pmatrix}-\nabla^2 & \partial_1\frac{\partial}{\partial\tau} & \partial_2\frac{\partial}{\partial\tau}\\ \partial_1\frac{\partial}{\partial\tau} & -\partial_2^2-\partial_3^2-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} & \partial_1\partial_2\\ \partial_2\frac{\partial}{\partial\tau} & \partial_1\partial_2 & -\partial_1^2-\partial_3^2-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_4\\A_1\\A_2\end{pmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}A_iD_{ij}A_j\qquad(i,j=4,1,2)\end{aligned}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
Z_A &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp\Big[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\Big] \\
&= \int \mathcal{D}A_\mu \exp\Big[-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x A_i D_{ij} A_j\Big]
\end{aligned}
$$

ゴーストの部分は、$M = \partial_3$ なので

$$
Z_{ghost} = \int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int d^3x\ \overline{\eta}\partial_3\eta\right]
$$

そして、残っているデルタ関数 $\delta[A_3]$ は A_3 の積分に引っかかり

$$
\int \mathcal{D}A_3\delta[A_3] = 1
$$

となるので、影響を与えません。

全部合わせて (2) の表記で書けば

$$
Z = \int \mathcal{D}A_4\mathcal{D}A_1\mathcal{D}A_2\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x(-\frac{1}{2}A_iD_{ij}A_j - \overline{\eta}\partial_3\eta)\right]
$$

$A_iD_{ij}A_j$ は実数スカラー場のときと同じように計算できます。ゴーストの項は、運動量表示で

$$
\begin{aligned}
\log Z_{ghost} &= \log \int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\Big[\int_0^\beta d\tau \int d^3x(-\overline{\eta}\partial_3\eta)\Big] \\
&= \log \int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\Big[-i\int_0^\beta d\tau \int d^3x\overline{\eta}(-i\partial_3)\eta\Big] \\
&= \log\det(p_3)
\end{aligned}
$$

定数は無視しています。次に $A_iD_{ij}A_j$ を計算します。これを運動量表示に持っていく時の変換は

$$
\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}
\begin{pmatrix}
-\nabla^2 & \partial_1\dfrac{\partial}{\partial\tau} & \partial_2\dfrac{\partial}{\partial\tau} \\
\partial_1\dfrac{\partial}{\partial\tau} & -\partial_2^2 - \partial_3^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} & \partial_1\partial_2 \\
\partial_2\dfrac{\partial}{\partial\tau} & \partial_1\partial_2 & -\partial_1^2 - \partial_3^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}
\end{pmatrix}
e^{-i\omega_n\tau}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}
$$

なので

$$
D_{ij} \ \Rightarrow\ D_{ij}(n,\boldsymbol{p}) =
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{p}^2 & p_1\omega_n & p_2\omega_n \\
p_1\omega_n & p_2^2 + p_3^2 + \omega_n^2 & -p_1p_2 \\
p_2\omega_n & -p_1p_2 & p_1^2 + p_3^2 + \omega_n^2
\end{pmatrix}
$$

となります。そして

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\phi\exp\Big[-\frac{1}{2}(\phi,D\phi)\Big]=N(\det D)^{-\frac{1}{2}}$$

を使うことで (定数は無視します)

$$\log Z_A=\log(\det D(n,\boldsymbol{p}))^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log\det D(n,\boldsymbol{p})$$

行列式の 2×2 行列部分に対する計算は

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \boldsymbol{p}^2 & p_1\omega_n & p_2\omega_n \\ p_1\omega_n & p_2^2+p_3^2+\omega_n^2 & -p_1p_2 \\ p_2\omega_n & -p_1p_2 & p_1^2+p_3^2+\omega_n^2 \end{vmatrix} \\
&=\boldsymbol{p}^2\begin{vmatrix} p_2^2+p_3^2+\omega_n^2 & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & p_1^2+p_3^2+\omega_n^2 \end{vmatrix}-p_1\omega_n\begin{vmatrix} p_1\omega_n & p_2\omega_n \\ -p_1p_2 & p_1^2+p_3^2+\omega_n^2 \end{vmatrix}+p_2\omega_n\begin{vmatrix} p_1\omega_n & p_2\omega_n \\ p_2^2+p_3^2+\omega_n^2 & -p_1p_2 \end{vmatrix} \\
&=\boldsymbol{p}^2(p_2^2+p_3^2+\omega_n^2)(p_1^2+p_3^2+\omega_n^2)-\boldsymbol{p}^2(p_1p_2)^2-p_1\omega_n(p_1\omega_n)(p_1^2+p_3^2+\omega_n^2) \\
&\quad -p_1\omega_np_2\omega_np_1p_2-p_2\omega_np_1\omega_np_1p_2-p_2\omega_np_2\omega_n(p_2^2+p_3^2+\omega_n^2) \\
&=\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2-p_1^2)(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2-p_2^2)-\boldsymbol{p}^2(p_1p_2)^2-p_1^2\omega_n^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2-p_2^2) \\
&\quad -2p_1^2p_2^2\omega_n^2-p_2^2\omega_n^2(\boldsymbol{p}^2-p_1^2+\omega_n^2) \\
&=\boldsymbol{p}^2[(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2)^2+p_1^2p_2^2-p_1^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2)-p_2^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2)]-\boldsymbol{p}^2(p_1p_2)^2-p_1^2\boldsymbol{p}^2\omega_n^2-p_1^2\omega_n^4+p_1^2p_2^2\omega_n^2 \\
&\quad -2p_1^2p_2^2\omega_n^2-p_2^2\boldsymbol{p}^2\omega_n^2+p_2^2p_1^2\omega_n^2-p_2^2\omega_n^4 \\
&=\boldsymbol{p}^2\big[\boldsymbol{p}^4+\omega_n^4+2\boldsymbol{p}^2\omega_n^2-p_1^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2)-p_2^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2)\big]-(\boldsymbol{p}^2-p_3^2)\omega_n^2\boldsymbol{p}^2-(\boldsymbol{p}^2-p_3^2)\omega_n^4 \\
&=\boldsymbol{p}^2\big[\boldsymbol{p}^4+\boldsymbol{p}^2\omega_n^2-(\boldsymbol{p}^4+\boldsymbol{p}^2\omega_n^2)+p_3^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2)\big]+p_3^2\omega_n^2\boldsymbol{p}^2+p_3^2\omega_n^4 \\
&=\boldsymbol{p}^2p_3^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2)+p_3^2\omega_n^2(\boldsymbol{p}^2+\omega_n^2) \\
&=p_3^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\log Z_A=-\frac{1}{2}\log\det D &= -\frac{1}{2}\log\det(p_3^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log(p_3^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2)
\end{aligned}$$

ゴーストとくっつければ

$$
\begin{aligned}
\log Z &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log[p_3^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2]+\log\det p_3 \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log[p_3^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2]+\mathrm{tr}\log p_3 \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log[p_3^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2]+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log p_3^2 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\log(\frac{p_3^2}{p_3^2(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\log(\frac{1}{(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2}) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)^2 \\
&= -\mathrm{tr}\log(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2) \\
&= -\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)
\end{aligned}
$$

これは「虚時間法〜クライン・ゴルドン場〜」での形そのままなので

$$
\begin{aligned}
\log Z &= -2\sum_{\boldsymbol{p}}\big(\frac{\beta|\boldsymbol{p}|}{2}+\log(1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|})\big) \\
&= -2V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\big(\frac{\beta|\boldsymbol{p}|}{2}+\log(1-e^{-\beta|\boldsymbol{p}|})\big)
\end{aligned}
$$

となります。これは丁度、スピン 0 の実数スカラー場での $m=0$ とした結果の 2 倍に当たっています。つまり、電磁場での物理的な自由度 (横波による自由度 2) がこれに表われています。そして、これは空洞放射の結果に一致します。運動量積分の形は質量 0 の実数スカラー場と同じで、そこに単純に 2 が掛けられているだけなので、圧力は

$$
P=\frac{\pi^2}{45}T^4
$$

となって、空洞放射での圧力と一致します。

結果がゲージに依存していないことを見るために、ローレンツゲージ $\partial_\mu A^\mu=0$ を使ってみます。ローレンツゲージの場合は、軸性ゲージと違ってゲージパラメータ α がおもいっきり絡んでくるので、ファインマンゲージ $\alpha=1$ を取ることにします。ローレンツゲージでの経路積分は場の量子論の「経路積分〜電磁場〜」で出しているので、その結果を書くと

$$
Z_F=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2-\overline{\eta}\Box\eta\right)\right]
$$

$$
F[A_\mu]=\partial^\mu A_\mu\ ,\ M=\frac{\delta F}{\delta\Lambda}=\frac{\delta\partial^\mu(A_\mu+\partial_\mu\Lambda)}{\delta\Lambda}=\Box
$$

分配関数にもっていけば

$$
\begin{aligned}
Z &= \int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2-\overline{\eta}\Box\eta\right)\right] \\
&= \int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\exp\left[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\,(\mathcal{L}_E+\mathcal{L}_{ghost})\right]
\end{aligned}
$$

A_μ と微分演算子を変更せずに書いていますが、$A_0 \to iA_4$, $t \to -i\tau$ と置き換えたものです ($\mathcal{L}_E$ の E はユークリッドであることを表わします)。

$\mathcal{L}$ は変形すると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{4}[\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + 2(\partial^\mu A_\mu)^2] \\
&= -\frac{1}{4}[2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + 2\partial^\mu A_\mu \partial_\nu A^\nu] \\
&= -\frac{1}{4}[2\partial_\mu(A_\nu \partial^\mu A^\nu) - 2A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\nu(A_\mu \partial^\mu A^\nu) + 2A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu + 2\partial_\mu(A^\mu \partial_\nu A^\nu) - 2A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu] \\
&= -\frac{1}{4}[-2A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu] \\
&= \frac{1}{2}A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu \\
&= \frac{1}{2}[A_0 \partial_\mu \partial^\mu A^0 + A_i \partial_\mu \partial^\mu A^i] \\
\mathcal{L}_E &= \frac{1}{2}[-A_4(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2)A_4 - A_i(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2)A_i] \\
&= -\frac{1}{2}A_\mu(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2)A_\mu \qquad (\nu = 4,1,2,3)
\end{aligned}
$$

最後で、A_μ の添え字を下にそろえているのはユークリッド空間では添え字の位置は関係ないからです。
というわけで、おなじみの計算をします。$\mathcal{L}_E$ は完全にスカラー場と一致した形になっているので、A_μ の部分は

$$
\begin{aligned}
Z_A &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\right] \\
&= \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x A_\mu(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2)A_\mu\right] \\
&= \int \mathcal{D}A_4 \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}A_3 \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau \int d^3x [A_4(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2)A_4 + \cdots]\right] \\
&= 4N \det(\omega_n^2 + \boldsymbol{p}^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

ゴーストの部分は

$$
\begin{aligned}
Z_{ghost} &= \int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{ghost}\right] \\
&= \int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int d^3x\ \overline{\eta}\Box\eta\right] \\
&= \int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int d^3x\ \overline{\eta}(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2)\eta\right] \\
&= N \det(\omega_n^2 + \boldsymbol{p}^2)
\end{aligned}
$$

というわけで (定数は無視して)

$$\begin{aligned}\log Z &= \log Z_A + \log Z_{ghost}\\ &= 4\log(\det(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2))^{-\frac{1}{2}} + \log\det(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)\end{aligned}$$

ここで、電磁場特有の状況が起きています。それは、ローレンツゲージを取ることは偏極ベクトルに対して制限を与えきれないために実数スカラー場での 4 倍の値を持つということで、それを第一項が反映しています (電磁場の自由度は 4 で、物理的な自由度は横波の 2 だけで、縦波の 1 とスカラー光子の 1 は非物理的。場の量子論の「電磁場の量子化」参照)。そこに第二項として、ゴーストの寄与が存在しており、変形すると

$$\log Z = -\frac{1}{2}\times 4\log(\det(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)) + \frac{1}{2}\times 2\log\det(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)$$

このように書けることから、ゴーストによって自由度が 2 つ減らされています。つまり、ゴーストによって非物理的な自由度が打ち消されるような構造を持っています。このように有限温度ではゴーストを残しておくことで、ゴーストによるローレンツゲージでの自由度の減少をかなり直接的にみることができます。そして、ゴーストの寄与までを含めた $\log Z$ は

$$\log Z = -\log(\det(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)) = -\sum_n\sum_{\boldsymbol{p}}\log(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2)$$

となり、軸性ゲージを取った時と一致します。

ゼロ温度の電磁場ではゴーストの項は単純な定数であったために最初から無視していましたが、有限温度では見てきたように温度依存性を持っているために無視することができなく、ちゃんと考慮することで統計力学での結果を再現します。このために QED での計算においてゴーストが絡んで来るような気がしますが、ゴーストは他の場と相互作用するような形でラグランジアンに入ってきていないので、相互作用に影響を与えません。なので、結局ゴーストの寄与は自由な電磁場に対してだけになります。