有限温度・密度でのグリーン関数まとめ

いろいろとグリーン関数が出てきたので、まとめておきます。出てくるのは、温度グリーン関数、実時間伝播関数、遅延グリーン関数、先進グリーン関数、温度ファインマン伝播関数です。
グリーン関数でボソン、フェルミオンを区別しないときは G を使い、D はボソン、S はフェルミオン、$D_{\mu\nu}$ はゲージ場とします。基本的に可換ゲージ場だけを書いていますが、$SU(N)$ の非可換ゲージ場でも対応する生成子がつくだけです。
実時間的なグリーン関数では i を外に出すように定義します。
スペクトル関数は区別しないときには ρ と書き、ボソンでは ρ_B、フェルミオンでは ρ_F、ゲージ場では $\rho_G^{\mu\nu}$ とします。
$\theta(p_0)$ は階段関数、$\epsilon(p_0)=\theta(p_0)-\theta(-p_0)$ としています。
化学ポテンシャルありでの定式化はハミルトニアンを時間発展演算子にした場合を H 形式、$K=H-\mu N$ を時間発展演算子とした場合を K 形式と呼んでいます。H 形式から K 形式への変更は外線の p_0 を $p_0+\mu$ に置き換えればいいです。基本的に H 形式を使います。なので、スペクトル関数も H 形式でのものになります (相互作用なしでは化学ポテンシャルがいない)。
フェルミオンでの「$*$」はガンマ行列を除いた複素共役を意味します。
それぞれの導出については「有限温度でのグリーン関数」、「有限密度でのフェルミオン」、「有限密度でのフェルミオン～別形式～」、「実時間法～クライン・ゴルドン場～」、「実時間法～ディラック場～」、「実時間法～伝播関数の性質～」、「伝播関数の対角化」を見てください。

相互作用なしだとして、温度グリーン関数は運動量表示で

- ボソン

$$D_\beta(p)=\frac{1}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}=\frac{-1}{p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2}\qquad(p_0=i\omega_n+\mu\ ,\ \omega_n=2\pi nT)$$

- フェルミオン

$$S_\beta(p)=\frac{-1}{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}=\frac{-1}{p_0\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}\qquad(p_0=i\omega_n+\mu\ ,\ \omega_n=2\pi T(n+\frac{1}{2}))$$

- ゲージ場

$$D_\beta^{\mu\nu}=\frac{1}{k^2}\bigg(g^{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\bigg)\qquad(k_0=i\omega_n\ ,\ \omega_n=2\pi nT)$$

これらに対応する相互作用なしでのスペクトル関数は

$$G_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(k_0,\boldsymbol{k})}{i\omega_n+\mu-k_0}dk_0$$

$$\text{ボソン：}\quad \rho_B(k)=2\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)$$

$$\text{フェルミオン：}\quad \rho_F(k)=2\pi\epsilon(k_0)(\not{k}+m)\delta(k^2-m^2)$$

$$\text{ゲージ場：}\quad \rho_G^{\mu\nu}(k)=2\pi\epsilon(k_0)\big(-g^{\mu\nu}-(\xi-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\big)\delta(k^2)$$

これらはボソン場 $\phi(\tau,\boldsymbol{x})$、フェルミオン場 $\psi(\tau,\boldsymbol{x})$ に対する (反) 周期性

$$\phi(\tau+\beta,\boldsymbol{x})=\phi(\tau,\boldsymbol{x})\ ,\ \psi(\tau+\beta,\boldsymbol{x})=-\psi(\tau,\boldsymbol{x})$$

によって特徴付けられています。この関係を一般化して書くなら

$$\Phi(\tau+\beta,\boldsymbol{x})=e^{i\theta}\Phi(\tau,\boldsymbol{x})$$

とすることができます。これに対して周期 2β でフーリエ展開

$$G_\beta(\tau)=\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_n\tau}G_\beta(\omega_n)\ ,\ G_\beta(\omega_n)=\int_0^\beta d\tau G_\beta(\tau)e^{i\omega_n\tau}$$

ができることを要求するなら、$e^{i\theta}$ ぶんのずれを ω_n で吸収する必要があります。つまり、ω_n が

$$\omega_n=2\pi Tn+\theta T=2\pi T(n+\frac{\theta}{2\pi})$$

となります。$\theta=0$ でボソン、$\theta=\pi$ でフェルミオンになります。

上での温度グリーン関数を導出するとき一番素直なのはハミルトニアン H に粒子数演算子 N をくっつけた $K=H-\mu N$ を時間発展演算子としたときです。もしハミルトニアン H を時間発展演算子とするなら周期的条件は

$$\phi(\tau+\beta,\boldsymbol{x})=e^{\beta\mu}\phi(\tau,\boldsymbol{x})\ ,\ \psi(\tau+\beta,\boldsymbol{x})=-e^{\beta\mu}\psi(\tau,\boldsymbol{x})$$

で与えられます。これも同じように考えれば

$$\omega_n=2\pi Tn-i\mu\ ,\ \omega_n=2\pi T(n+\frac{1}{2})-i\mu$$

なので、虚時間法では K 形式、H 形式で同じ温度グリーン関数を導きます。

実時間伝播関数は化学ポテンシャルなしで

- ボソン

$$iD_{(11)}(p)=\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}+2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)$$

$$iD_{(22)}(p)=\frac{-i}{p^2-m^2-i\epsilon}+2\pi n_B(|p_0|)\delta(p^2-m^2)$$

$$iD_{(12)}(p)=2\pi e^{\sigma p_0}[\theta(-p_0)+n_B(|p_0|)]\delta(p^2-m^2)$$

$$iD_{(21)}(p)=2\pi e^{-\sigma p_0}[\theta(p_0)+n_B(|p_0|)]\delta(p^2-m^2)$$

- フェルミオン

$$iS_{(11)}(p)=(\not{p}+m)\Big[\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}-2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2-m^2)\Big]$$

$$iS_{(22)}(p)=(\not{p}+m)\Big[\frac{-i}{p^2-m^2-i\epsilon}-2\pi n_F(|p_0|)\delta(p^2-m^2)\Big]$$

$$iS_{(12)}(p)=2\pi e^{\sigma p_0}(\not{p}+m)\big[-n_F(|p_0|)+\theta(-p_0)\big]\delta(p^2-m^2)$$

$$iS_{(21)}(p)=2\pi e^{-\sigma p_0}(\not{p}+m)\big[-n_F(|p_0|)+\theta(p_0)\big]\delta(p^2-m^2)$$

- ゲージ場

$$iD^{\mu\nu}_{(11)}(k)=\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\Big(g^{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2+i\epsilon}\Big)-2\pi n_B(|k_0|)\Big(g^{\mu\nu}+(\xi-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\Big)\delta(k^2)$$

$$iD^{\mu\nu}_{(22)}(k)=\frac{i}{k^2-i\epsilon}\Big(g^{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2-i\epsilon}\Big)-2\pi n_B(|k_0|)\Big(g^{\mu\nu}+(\xi-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\Big)\delta(k^2)$$

$$iD^{\mu\nu}_{(12)}(k)=-2\pi e^{\sigma k_0}[n_B(|k_0|)+\theta(-k_0)]\Big(g^{\mu\nu}+(\xi-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\Big)\delta(k^2)$$

$$iD^{\mu\nu}_{(21)}(k)=-2\pi e^{-\sigma k_0}[n_B(|k_0|)+\theta(k_0)]\Big(g^{\mu\nu}+(\xi-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\Big)\delta(k^2)$$

時間経路を $-i\sigma$ ずらした場合で書いていますが、関係式は $\sigma=0$ と $\sigma=\beta/2$ の場合だけを扱っていきます。分布関数は

$$n_B(p_0)=\frac{1}{e^{\beta p_0}-1}\ ,\ n_F(p_0)=\frac{1}{e^{\beta p_0}+1}$$

となっています。分布関数部分を書き換えるなら

$$\epsilon(p_0)n_B(p_0)=n_B(|p_0|)+\theta(-p_0)$$

$$\epsilon(p_0)n_F(p_0)=n_F(|p_0|)-\theta(-p_0)$$

これらの関係を使えばいいです。また、化学ポテンシャルがいるときの表記は

$$n_B(p_0-\mu)=\frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}-1}\ ,\ n_F(p_0-\mu)=\frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1}$$

とします。

$\sigma=\beta/2$ では

$$iD_{(12)}(p)=iD_{(21)}(p)=2\pi e^{\beta p_0/2}[\theta(-p_0)+n_B(|p_0|)]\delta(p^2-m^2)$$

$$iS_{(12)}(p)=-iS_{(21)}(p)=-2\pi e^{\beta p_0/2}(\not{p}+m)[n_F(|p_0|)-\theta(-p_0)]\delta(p^2-m^2)$$

化学ポテンシャルありへは、$n_B(|p_0|)$ を

$$N_B(p_0)=\theta(p_0)n_B^-(|p_0|)+\theta(-p_0)n_B^+(|p_0|)$$

$$(n_B^-(|p_0|)=\frac{1}{e^{\beta(|p_0|-\mu)}-1}\ ,\ n_B^+(|p_0|)=\frac{1}{e^{\beta(|p_0|+\mu)}-1})$$

$n_F(|p_0|)$ を

$$N_F(p_0)=\theta(p_0)n_F^-(|p_0|)+\theta(-p_0)n_F^+(|p_0|)$$

$$\left(n_F^-(|p_0|) = \frac{1}{e^{\beta(|p_0|-\mu)}+1}\ ,\ n_F^+(|p_0|) = \frac{1}{e^{\beta(|p_0|+\mu)}+1}\right)$$

に置き換えればいいです (H 形式)。これらは

$$n_B(p_0-\mu) = \epsilon(p_0)N_B(p_0) - \theta(-p_0)$$

$$n_F(p_0-\mu) = \epsilon(p_0)N_F(p_0) + \theta(-p_0)$$

という関係を持っています。$\mu \neq 0$ のとき、$\sigma = \beta/2$ で $G_{(12)} = \pm G_{(21)}$ になっていないことに注意してください。

$G_{(12)}(p)$ と $G_{(21)}(p)$ の関係は

- $\sigma = 0$ のとき

$$G_{(12)}(p) = \pm e^{-\beta(p_0-\mu)}G_{(21)}(p) \quad (H\ \text{形式})$$

$$G_{(12)}(p) = \pm e^{-\beta p_0}G_{(21)}(p) \quad (K\ \text{形式})$$

- $\sigma = \beta/2$ のとき

$$G_{(12)}(p) = \pm e^{\beta\mu}G_{(21)}(p) \quad (H\ \text{形式})$$

$$G_{(12)}(p) = \pm G_{(21)}(p) \quad (K\ \text{形式})$$

プラスがボソン、マイナスがフェルミオンです。

実時間伝播関数は三角関数と双曲線関数を使うことで

- ボソン

$$D_{(11)}(p) = \Delta(p)\cosh^2\theta - \Delta^*(p)\sinh^2\theta$$

$$D_{(22)}(p) = \Delta(p)\sinh^2\theta - \Delta^*(p)\cosh^2\theta$$

$$D_{(12)}(p) = e^{-\beta(p_0-\mu)/2+\sigma p_0}(\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta$$

$$D_{(21)}(p) = e^{\beta(p_0-\mu)/2-\sigma p_0}(\Delta(p)-\Delta^*(p))\sinh\theta\cosh\theta$$

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\ ,\ \Delta^*(p) = \frac{1}{p^2-m^2-i\epsilon}$$

$$\sinh^2\theta = \theta(p_0)n_B(p_0-\mu) - \theta(-p_0)(1+n_B(p_0-\mu))$$

$$\cosh^2\theta = \theta(p_0)(1+n_B(p_0-\mu)) - \theta(-p_0)n_B(p_0-\mu)$$

$$\sinh\theta\cosh\theta = \epsilon(p_0)\exp[\beta(p_0-\mu)/2]n_B(p_0-\mu)$$

- フェルミオン (Δ_f^* はガンマ行列を除いた複素共役)

$$
\begin{aligned}
S_{(11)}(p) &= \Delta_f(p)\cos^2\theta + \Delta_f^*(p)\sin^2\theta \\
S_{(22)}(p) &= -\Delta_f(p)\sin^2\theta - \Delta_f^*(p)\cos^2\theta \\
S_{(12)}(p) &= -e^{-\beta(p_0-\mu)/2+\sigma p_0}(\Delta_f(p) - \Delta_f^*(p))\sin\theta\cos\theta \\
S_{(21)}(p) &= e^{\beta(p_0-\mu)/2-\sigma p_0}(\Delta_f(p) - \Delta_f^*(p))\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\Delta_f(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}\ ,\ \Delta_f^*(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2-i\epsilon}
$$

$$
\sin^2\theta = \theta(p_0)n_F(p_0-\mu) + \theta(-p_0)(1-n_F(p_0-\mu))
$$

$$
\cos^2\theta = \theta(p_0)(1-n_F(p_0-\mu)) + \theta(-p_0)n_F(p_0-\mu)
$$

$$
\sin\theta\cos\theta = \epsilon(p_0)e^{\beta(p_0-\mu)/2}n_F(p_0-\mu)
$$

対角化された表現は

$$
D(p) = V^{-1}\begin{pmatrix} \Delta(p) & 0 \\ 0 & -\Delta^*(p) \end{pmatrix} V^{-1}
$$

$$
V = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -e^{-\beta(p_0-\mu)/2+\sigma p_0}\sinh\theta \\ -e^{\beta(p_0-\mu)/2-\sigma p_0}\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}
$$

$$
V^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & e^{-\beta(p_0-\mu)/2+\sigma p_0}\sinh\theta \\ e^{\beta(p_0-\mu)/2-\sigma p_0}\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}
$$

$$
S(p) = M^{-1}\begin{pmatrix} \Delta_f(p) & 0 \\ 0 & -\Delta_f^*(p) \end{pmatrix} M^{-1}
$$

$$
M = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-\beta(p_0-\mu)/2+\sigma p_0}\sin\theta \\ -e^{\beta(p_0-\mu)/2-\sigma p_0}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

$$
M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -e^{-\beta(p_0-\mu)/2+\sigma p_0}\sin\theta \\ e^{\beta(p_0-\mu)/2-\sigma p_0}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

$\sigma = \beta/2$ では三角関数、双曲線関数の外にいる exp 部分が $e^{\pm\beta\mu}$ になります。
　ゲージ場はボソンで

$$\Delta_G(k) = \frac{-1}{k^2+i\epsilon}(g^{\mu\nu} + (\xi-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2+i\epsilon})$$

とすればいいですが、$\Delta_G(k) - \Delta^*_G(k)$ においてゲージ固定項が

$$\frac{1}{(k^2+i\epsilon)^2} - \frac{1}{(k^2-i\epsilon)^2}$$

という項を持ってしまいます。これをちゃんと定義するにはデルタ関数の微分

$$\frac{\partial}{\partial k^2}\delta(k^2) = \frac{1}{2i\pi}(\frac{1}{(k^2+i\epsilon)^2} - \frac{1}{(k^2-i\epsilon)^2}) \quad (\delta(k^2) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-1}{2i\pi}(\frac{1}{k^2+i\epsilon} - \frac{1}{k^2-i\epsilon}))$$

に書き換える必要があります (もしくは $|\boldsymbol{k}|^2$ の微分)。最後に同じような光子伝播関数に関する注意をしてます。
　スペクトル関数を使った厳密な表現は

- 温度グリーン関数

$$G_\beta(\omega_n, \boldsymbol{k}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(k_0, \boldsymbol{k})}{i\omega_n + \mu - k_0}dk_0$$

- 実時間伝播関数 (H 形式)

$$iS_{(ab)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}I_{(ab)}(p_0, k_0)\rho_F(k_0, \boldsymbol{p})$$

$$iD_{(ab)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}J_{(ab)}(p_0, k_0)\rho_B(k_0, \boldsymbol{p})$$

$$iD^{\mu\nu}_{(ab)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}J_{(ab)}(p_0, k_0)\rho^{\mu\nu}_G(k_0, \boldsymbol{p})$$

$$I_{(11)}(p_0, k_0) = I^*_{(22)}(p_0, k_0) = \frac{i}{p_0 - k_0 + i\epsilon} - 2\pi n_F(k_0-\mu)\delta(p_0-k_0)$$

$$I_{(12)}(p_0, k_0) = -2\pi e^{\sigma k_0}n_F(k_0-\mu)\delta(p_0-k_0)$$

$$I_{(21)}(p_0, k_0) = 2\pi e^{-\sigma k_0}(1 - n_F(k_0-\mu))\delta(p_0-k_0)$$

$$J_{(11)}(p_0, k_0) = J^*_{(22)}(p_0, k_0) = \frac{i}{p_0 - k_0 + i\epsilon} + 2\pi n_B(k_0-\mu)\delta(p_0-k_0)$$

$$J_{(12)}(p_0, k_0) = 2\pi e^{\sigma k_0}n_B(k_0-\mu)\delta(p_0-k_0)$$

$$J_{(21)}(p_0, k_0) = 2\pi e^{-\sigma k_0}(1 + n_B(k_0-\mu))\delta(p_0-k_0)$$

実時間伝播関数での K 形式では、分布関数から μ がなくなり、スペクトル関数 $\rho(k_0,\boldsymbol{p})$ が $k_0+\mu$ に依存している限り $\rho(k_0+\mu,\boldsymbol{p})$ になります。
$\sigma=\beta/2$ では

$$I_{(12)}=-e^{\beta\mu}I_{(21)}=-2\pi e^{\beta k_0/2}n_F(k_0-\mu)\delta(p_0-k_0)$$

$$J_{(12)}=e^{\beta\mu}J_{(21)}=2\pi e^{\beta k_0/2}n_B(k_0-\mu)\delta(p_0-k_0)$$

となります。

各グリーン関数に対する関係を示します。遅延グリーン関数 $G_R(x,y)$、先進グリーン関数 $G_A(x,y)$ を

$$G_R(x,y)=i\theta(x_0-y_0)(iG^>(x,y)-iG^<(x,y))$$

$$G_A(x,y)=-i\theta(y_0-x_0)(iG^>(x,y)-iG^<(x,y))$$

とし、ボソンでは

$$iG^>(x,y)=\langle\phi(x)\phi^\dagger(y)\rangle_\beta\ ,\ iG^<(x,y)=\langle\phi^\dagger(y)\phi(x)\rangle_\beta$$

フェルミオンでは

$$iG^>(x,y)=\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle_\beta\ ,\ iG^<(x,y)=-\langle\overline{\psi}(y)\psi(x)\rangle_\beta$$

と定義しています。また、実時間では遅延、先進グリーン関数を

$$iG'_R(x,y)=\theta(x_0-y_0)(iG^>(x,y)-iG^<(x,y))$$

$$iG'_A(x,y)=-\theta(y_0-x_0)(iG^>(x,y)-iG^<(x,y))$$

と定義するのが一般的で、$iG_{R,A}(x,y)=-iG'_{R,A}(x,y)$ となっています。実時間で使うときには i が入り込んでくるので、$G'_{R,A}$ では i を外に出すように定義しています。スペクトル関数は先進、遅延グリーン関数によって

$$\rho(p)=-i(G_R(p)-G_A(p))$$

と求められます。
温度グリーン関数との関係は

$$G_R(p_0,\boldsymbol{p})=G_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0+i\epsilon}$$

$$G_A(p_0,\boldsymbol{p})=G_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0-i\epsilon}$$

実時間伝播関数との関係は

$$G'_R(x,y)=G_{(11)}(x,y)-G_{(12)}(x,y)=G_{(21)}(x,y)-G_{(22)}(x,y)$$

$$G'_A(x,y) = G_{(11)}(x,y) - G_{(21)}(x,y) = G_{(12)}(x,y) - G_{(22)}(x,y)$$

$G_{(12)}, G_{(21)}$ は

$$iG_{(12)}(x,y) = iG^{<}(x,y)\ ,\ iG_{(21)}(x,y) = iG^{>}(x,y)$$

温度ファインマン伝播関数を

$$G_{Fey}(p_0,\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz^2 \frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0^2 - z^2 + i\epsilon}$$

と定義します。これと温度グリーン関数との関係は、スペクトル関数が奇関数のとき

$$G_{Fey}(p_0,\boldsymbol{p}) = -G_\beta(p_0 + ip_0\epsilon, \boldsymbol{p})$$

実時間伝播関数は温度ファインマン伝播関数によって

$$D(p) = V^{-1}\begin{pmatrix} D_{Fey}(p) & 0 \\ 0 & -D^*_{Fey}(p)\end{pmatrix}V^{-1}$$

$$S(p) = M^{-1}\begin{pmatrix} S_{Fey}(p) & 0 \\ 0 & -S^*_{Fey}(p)\end{pmatrix}M^{-1}$$

となり、相互作用ありでも成立しています。S^*_{Fey} はガンマ行列を除いた複素共役です。厳密な温度ファインマン関数は

$$D_{Fey}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p) + i\epsilon}\ ,\ S_{Fey}(p) = \frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - m - \Sigma(p) + i\epsilon}$$

このように書けます。
　実時間伝播関数を

$$G^{-1}_{(ab)}(p) = (G^0_{(ab)}(p))^{-1} - \Sigma_{(ab)}(p)$$

温度ファインマン伝播関数を

$$G_{Fey}(p) = G^0_{Fey}(p) + G^0_{Fey}(p)\Sigma_{Fey}(p)G_{Fey}(p)$$

としたとき、自己エネルギー $\Sigma_{(ab)}(p)$ は

$$\Sigma_{(ab)}(p) = U\begin{pmatrix} \Sigma_{Fey}(p) & 0 \\ 0 & -\Sigma^*_{Fey}(p)\end{pmatrix}U$$

$U = M, V$。自己エネルギーでもフェルミオンの場合は「$*$」はガンマ行列を除いて複素共役を取ります。$\Sigma_{(ab)}(p)$ の各成分の関係は $\sigma = 0$ のとき

- ボソン

$$\Sigma_{(11)}(p) = -\Sigma^*_{(22)}(p)$$

$$\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p) = \mathrm{Re}\Sigma_{Fey}(p)$$

$$\mathrm{Im}\Sigma_{Fey}(p) = \epsilon(p_0)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = e^{-\beta(p_0-\mu)}\Sigma_{(21)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = -2in_B(p_0-\mu)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

- フェルミオン（「$*$」はガンマ行列を除いた複素共役）

$$\Sigma_{(11)}(p) = -\Sigma^*_{(22)}(p)$$

$$\mathrm{Re}\Sigma_{(11)}(p) = \mathrm{Re}\Sigma_{Fey}(p)$$

$$\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p) = \epsilon(p_0)(1-2n_F(p_0-\mu))\mathrm{Im}\Sigma_{Fey}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = -e^{-\beta(p_0-\mu)}\Sigma_{(21)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = 2in_F(p_0-\mu)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

$\sigma=\beta/2$ では変換行列 U の中の三角関数、双曲線関数の外にいる $e^{\beta p_0}$ が消えるので

$$\Sigma_{(12)}(p) = \pm e^{\beta\mu}\Sigma_{(21)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = -2ie^{\beta p_0/2}n_B(p_0-\mu)\tanh\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

$$\Sigma_{(12)}(p) = 2ie^{\beta p_0/2}n_F(p_0-\mu)\coth\frac{\beta(p_0-\mu)}{2}\mathrm{Im}\Sigma_{(11)}(p)$$

となります。どちらも H の形式です。

光子の実時間伝播関数に関する注意をしておきます。光子の実時間伝播関数は、形を見てみると質量を 0 としたボソン伝播関数 $D_{(ab)}(k;m=0)$ を使うことで

$$D^{\mu\nu}_{(ab)}(k) = -\big(g^{\mu\nu}+(\xi-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\big)D_{(ab)}(k;m=0)$$

と書けますが、注意があります。デルタ関数のためにボソンの伝播関数は意味を変えずに $|k_0|=\omega_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+m^2}$ と置き換えることができます。つまり

$$D_{(ab)}(n_B(|k_0|)) \ \Leftrightarrow\ D_{(ab)}(n_B(\omega_{\boldsymbol{k}}))$$

と置き換えられます。なので、$|\boldsymbol{k}|^2$ による微分が $n_B(\omega_{\boldsymbol{k}}=|\boldsymbol{k}|)$ にかかるように見えてしまいます。しかし、$n_B(\omega_{\boldsymbol{k}})$ と $n_B(|k_0|)$ の置き換えは微分演算が $n_B(\omega_{\boldsymbol{k}})\delta(k^2)$ に作用している場合

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}(n_B(\omega_{\boldsymbol{k}})\delta(k^2)) &= \frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|}(n_B(|\boldsymbol{k}|)\delta(k^2)) \\
&= n_B(|k_0|)\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\frac{\partial\delta(k^2)}{\partial|\boldsymbol{k}|} \\
&= n_B(|k_0|)\frac{\partial\delta(k^2)}{\partial|\boldsymbol{k}|^2} = -n_B(|k_0|)\frac{\partial\delta(k^2)}{\partial k^2}
\end{aligned}
$$

となることを要求できます。また、もし $|k_0|$ が $\sqrt{k^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2}$ みたいになっているとき、k^2 で微分すると $n_B(|k_0|)$ に作用してしまうので、$D_{(ab)}(k;m=0)$ の分布関数を $n_B(|k_0|)$ としたときに

$$
D^{\mu\nu}_{(ab)}(k) = -\big(g^{\mu\nu}-(\xi-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial k^2}\big)D_{(ab)}(k;m=0,n_B(|k_0|))
$$

と書いてしまうのは厳密には正しくないです。