補足：実時間の伝播関数

実時間の場の演算子を使った時の 2 点相関関数 (ここでは伝播関数と呼ぶことにします) を求めます。ゼロ温度から有限温度へ拡張されたときにどんな項が新しく現われるのかが、この伝播関数からだと見やすいので少し触れておきます。
より詳細な実時間の扱いは実時間法として定式化されています (詳しい話は「実時間法」を見てください)。ここでの実時間の扱いだけでは正確な摂動論が作れません (相対論的、非相対論的両方の場合で)。
経路積分の形式で行っても演算子の形にすることになるので、最初から演算子形式で行います。

統計力学での熱的平均は、ハイゼンベルグ描像で

$$\langle A_H(t)B_H(t')\rangle_\beta = \frac{\mathrm{tr}(e^{-\beta H}A_H(t)B_H(t'))}{Z}$$

と書けます。この式は手っ取り早く言えば、実現可能な状態の平均を取ったものです。では、このとき生成・消滅演算子による粒子数演算子の熱的平均を取るとどうなるのか見てみます。ここでは相互作用のない実数スカラー場だとします。
生成、消滅演算子 $a^\dagger, a$ を使った熱的平均

$$\langle a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})\rangle_\beta = \frac{\mathrm{tr}(e^{-\beta H}a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}))}{Z}$$

$$\big([a(\boldsymbol{p}_i), a^\dagger(\boldsymbol{p}_j)] = \delta_{ij}\ ,\ [a(\boldsymbol{p}_i), a(\boldsymbol{p}_j)] = [a^\dagger(\boldsymbol{p}_i), a^\dagger(\boldsymbol{p}_j)] = 0\big)$$

を考えます。計算しやすくするために離散的に扱っていきます。相互作用なしでの実数スカラー場のハミルトニアンは、真空のエネルギーを抜いて

$$H = \sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)a(\boldsymbol{k}_i)$$

となっています。$a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ は粒子数演算子なので、粒子数の固有状態 $|n_i>$ で展開できます。よって、トレースは粒子数 n_i の和となって、$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)a(\boldsymbol{k}_i)$ は対応する粒子数 $n_{\boldsymbol{k}_i}$ になり

$$Z = \mathrm{tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{\infty} < n_1, n_2, \ldots |e^{-\beta H}|n_1, n_2, \ldots >= \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty}(e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{k}_i}n_i}) = \prod_i \frac{1}{1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{k}_i}}}$$

$$\big(\sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)a(\boldsymbol{k}_i) = \sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} n_{\boldsymbol{k}_i}\big)$$

n_i は粒子数なので和は全ての整数に対して行います。これは統計力学でよく出てくる変形

$$\exp[-\beta\sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} n_{\boldsymbol{k}_i}] = \prod_i \exp[-\beta\omega_{\boldsymbol{k}_i} n_{\boldsymbol{k}_i}]$$

を使っているだけです。そして

$$\exp[-\beta\sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} n_{\boldsymbol{k}_i}] = \exp[-\beta\omega_{\boldsymbol{k}_1} n_{\boldsymbol{k}_1} - \beta\omega_{\boldsymbol{k}_2} n_{\boldsymbol{k}_2} - \cdots - \beta\omega_{\boldsymbol{p}} n_{\boldsymbol{p}} - \cdots]$$

となっているので

$$\frac{d}{d(\beta\omega_{\boldsymbol{p}})}\exp[-\beta\sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} n_{\boldsymbol{k}_i}] = -n_{\boldsymbol{p}}\exp[-\beta\sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} n_{\boldsymbol{k}_i}]$$

と出来ることから、

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})\rangle_\beta &= \frac{\mathrm{tr}(e^{-\beta H}a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}))}{Z} \\
&= \frac{1}{Z}\mathrm{tr}(-\frac{d}{d(\beta\omega_{\boldsymbol{p}})}\exp[\sum_i \omega_{\boldsymbol{k}_i} a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)a(\boldsymbol{k}_i)]) \quad (\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}_i) \\
&= -\frac{d}{d(\beta\omega_{\boldsymbol{p}})}\log Z \\
&= -\frac{d}{d(\beta\omega_{\boldsymbol{p}})}\log[\frac{1}{1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}}] \quad (\log[AB\cdots] = \log A + \log B + \cdots) \\
&= \frac{d}{d(\beta\omega_{\boldsymbol{p}})}\log[1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}] \\
&= \frac{e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}}{1-e^{-\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}} \\
&= \frac{1}{e^{\beta\omega_{\boldsymbol{p}}}-1} \\
&= n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})
\end{aligned}$$

つまり、粒子数演算子の熱的平均は分布関数になるということが分かります (この話は統計力学で普通に出てくるものです)。また、生成、消滅演算子の交換関係から

$$\langle a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})\rangle_\beta = 1 + n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})$$

そして、$\langle a^\dagger(\boldsymbol{p}_i)a(\boldsymbol{p}_j)\rangle_\beta$ は $\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{p}_j$ のときには 0 になり、$\langle a(\boldsymbol{p}_i)a(\boldsymbol{p}_j)\rangle_\beta$ や $\langle a^\dagger(\boldsymbol{p}_i)a^\dagger(\boldsymbol{p}_j)\rangle_\beta$ も 0 になるので、運動量を区別して書けば

$$\langle a^\dagger(\boldsymbol{p}_i)a(\boldsymbol{p}_j)\rangle_\beta = n_B(\omega_{\boldsymbol{p}_i})\delta_{ij}$$

$$\langle a(\boldsymbol{p}_i)a^\dagger(\boldsymbol{p}_j)\rangle_\beta = (1 + n_B(\omega_{\boldsymbol{p}_i}))\delta_{ij}$$

$$\langle a(\boldsymbol{p}_i)a(\boldsymbol{p}_j)\rangle_\beta = \langle a^\dagger(\boldsymbol{p}_i)a^\dagger(\boldsymbol{p}_j)\rangle_\beta = 0$$

連続的な場合では

$$\langle a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{k})\rangle_\beta = n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})$$

$$\langle a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k})\rangle_\beta = (1+n_B(\omega_{\boldsymbol{p}}))(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})$$

$$\langle a(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{k})\rangle_\beta = \langle a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k})\rangle_\beta = 0$$

0 になるのは、ゼロ温度のときのこれらの真空期待値が 0 になるために、それの熱的平均を取っても 0 になるということから分かります (粒子数が変化するからという理由が直接的です)。

この結果を場の演算子

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{+ipx})$$

$$(px = p_0x_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} = \omega_{\boldsymbol{p}}t_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})$$

に使って伝播関数を計算すると、場の量子論の「伝播関数について」と同じようにすることで

$$\begin{aligned}
\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta =& \langle\int\frac{d^3pd^3q}{(2\boldsymbol{\pi})^6}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{q}}}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{ipx})(a_{\boldsymbol{q}}e^{-iqy} + a^\dagger_{\boldsymbol{q}}e^{iqy})\rangle_\beta \\
=& \langle\int\frac{d^3pd^3q}{(2\boldsymbol{\pi})^6}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{q}}}}(a_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}e^{-ipx}e^{-iqy} + a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}e^{-ipx}e^{iqy} \\
&\qquad + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}e^{ipx}e^{-iqy} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}e^{ipx}e^{iqy})\rangle_\beta \\
=& \langle\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{q}}}}(a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}e^{-ipx}e^{iqy} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}e^{ipx}e^{-iqy})\rangle_\beta \\
=& \int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}[(1+n_B(\omega_{\boldsymbol{p}}))e^{-ip(x-y)} + n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})e^{ip(x-y)})]
\end{aligned}$$

となります。最後の行へは $a^\dagger(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{k})$ に関する熱的平均と、それのデルタ関数によって $\omega_{\boldsymbol{p}} = \omega_{\boldsymbol{q}}$(つまり $p_0 = q_0$) となることを使っています (詳しくは場の量子論の「伝播関数について」参照)。これはゼロ温度の場合と $n_B(\omega_{\boldsymbol{p}}) = 0$ で一致します。$n_B(\omega_{\boldsymbol{p}}) = 0$ は $T = 0$ の極限なので、ちゃんと対応が取れています。

場の演算子の並びを逆にした場合は、$x - y$ の符号が反転するだけなので

$$\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta = \int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}[n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})e^{-ip(x-y)} + (1+n_B(\omega_{\boldsymbol{p}}))e^{ip(x-y)}]$$

というわけで、伝播関数は

$$
\begin{aligned}
\Delta_F(x,y) =&\theta(x_0-y_0)\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta + \theta(y_0-x_0)\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta \\
=&\theta(x_0-y_0)\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\big[(1+n_B(\omega_{\boldsymbol{p}}))e^{-ip(x-y)}+n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})e^{ip(x-y)})\big] \\
&+\theta(y_0-x_0)\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\big[n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})e^{-ip(x-y)}+(1+n_B(\omega_{\boldsymbol{p}}))e^{ip(x-y)}\big] \\
=&\theta(x_0-y_0)\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}e^{-ip(x-y)}+\theta(y_0-x_0)\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}e^{ip(x-y)} \\
&+\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})[e^{-ip(x-y)}+e^{ip(x-y)}]
\end{aligned}
$$

と書けます (θ は階段関数)。最後へは $\theta(x_0-y_0)+\theta(y_0-x_0)=1$ となることを使っています。これと場の量子論の「伝播関数について」での $\Delta_F(x,y)$ と見比べると、階段関数がいる項は明らかに同じです。なので、階段関数の項は

$$
\begin{aligned}
&\theta(x_0-y_0)\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}e^{-ip(x-y)}+\theta(y_0-x_0)\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}e^{ip(x-y)} \\
&=\int\frac{d^4p}{(2\boldsymbol{\pi})^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}
$$

となります。$n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})$ の項は

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})[e^{-ip(x-y)}+e^{ip(x-y)}] \\
&=\int dp_0\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}\big(\delta(p_0-\omega_{\boldsymbol{p}})+\delta(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}})\big)e^{-ip(x-y)} \\
&=\int\frac{d^4p}{(2\boldsymbol{\pi})^4}2\pi n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})\delta(p^2-m^2)e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}
$$

二行目にいけることは「伝播関数について」の真ん中辺りに載っている $\Delta(x,y)=\Delta^{(+)}(x,y)+\Delta^{(-)}(x,y)$ の計算を見てください。

よって、有限温度における伝播関数は

$$
\Delta_F(x,y)=\int\frac{d^4p}{(2\boldsymbol{\pi})^4}\Big(\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}+2\pi n_B(\omega_{\boldsymbol{p}})\delta(p^2-m^2)\Big)e^{-ip(x-y)} \tag{1}
$$

となります。ゼロ温度との差は、分布関数による項がいることです。

ゼロ温度での伝播関数とはなんだったのかを踏まえることで第二項の解釈を与えることが出来ます。ゼロ温度での伝播関数は、ある点 A にいた粒子が別の点 B で観測に引っかかる確率 (遷移振幅) に対応します。そして、これを統計力学に持ち上げているのが今の状況です。つまり、ある状態の粒子が単発で点 B で観測に引っかかるという状況でなく、分布関数に従う他の状態の粒子も点 B で観測に引っかかれるということです。このような分布関数による粒子の存在が新しい項として出てきたのだと解釈してしまえます。この解釈は、伝播関数が粒子数演

算子 (生成・消滅演算子) の熱的平均と関係して求められたものであることを踏まえると、当たり前のように思えます (個人的にはよくここまでゼロ温度と温度部分が綺麗に分離しているものだと思いますが)。そして、第一項はゼロ温度の伝播関数なので、第二項はゼロ温度伝播関数に対する背景 (background) からの寄与だと言うこともできます。例えば自己エネルギーで出てくる温度依存項などは、このような背景からの寄与 (背景との相互作用による結果) だということになります。

また、温度グリーン関数を $i\omega_n \to p_0$ と置き換えるだけでは、有限温度におけるファインマンの伝播関数にはならないことも分かります。

最後にちょっと変な状況になっていることを説明しておきます。位置表示でのスカラー場の伝播関数は

$$D_F(x,y) = \theta(x_0 - y_0)D^>(x,y) + \theta(y_0 - x_0)D^<(x,y)$$

と定義され、これを

$$D_F(x,y) = \theta(x_0 - y_0)(D^>(x,y) - D^<(x,y)) + D^<(x,y)$$

と書き換えておきます。$t - t' > 0$ のときでは第一項が消えずに残りますが、$D^<(x,y)$ が第二項と打ち消し合うので元の式になり、$t - t' < 0$ では第二項しか生き残らないので元の式に対応します。運動量表示にしてスペクトル関数 $\rho(p) = D^>(p) - D^<(p)$ を使えば

$$\begin{aligned}
D_F(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}[\theta(x_0 - y_0)(D^>(p) - D^<(p)) + D^<(p)] \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}[\theta(x_0 - y_0)\rho(p) + \frac{\rho(p)}{e^{\beta p_0} - 1}] \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}\rho(p)[\theta(x_0 - y_0) + n_B(p_0)]
\end{aligned}$$

となります。これは出発点はファインマン伝播関数の定義なので、クライン・ゴルドン方程式

$$(\Box + m^2)D_F(x - y) = -i\delta^4(x - y)$$

を当然満たします。なので、これが (1) の位置表示での表現です。また、$D^>(x,y)$ と $D^<(x,y)$ の関係式は久保-Martin-Schwinger の関係によるものなので、周期的条件もちゃんと入っています。

これを虚時間 $\tau = it$ に解析接続すれば、「虚時間法〜クライン・ゴルドン場〜」の補足 2 で示したものと一致して

$$\Delta(\tau, \boldsymbol{x}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-p_0\tau} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\rho(p)[\theta(\tau) + n_B(p_0)]$$

運動量表示では

$$\Delta(\omega_n, \boldsymbol{p}) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{i\omega_n - p_0}\rho(p_0, \boldsymbol{p})$$

なので、(1) を虚時間に解析接続すれば温度グリーン関数になります。

なんの問題もない話をしてきているように思えますが、一時期これによって混乱が生じていたようです。実時間法を知っていること前提で話を進めてしまいますが、実時間法での 4 つの伝播関数のうちの $D_{11}(p)$ は (1) と同じ形をしています。そのため、温度グリーン関数は実時間法での $D_{11}(p)$ を虚時間に解析接続した先だと解釈され、$D_{11}(p)$ だけを使えば虚時間法の結果を再現できるだろうと思われていました。しかし、そんなに甘い話になっていなく、途中計算がうまくできないとか、結果が一致しないなどの問題がすぐに出てきました (場合によってはうまくいくときもある)。そのため、結局実時間法での 4 つの伝播関数と 2 つの頂点をちゃんと含めるように計算しなくてはならないということに落ち着きました。こういった経緯もあるように、虚時間と実時間との間の関係性については注意が必要です。

もう一つ注意として、時間を解析接続すれば実時間と虚時間のファインマン伝播関数は繋がりますが、上でも言ったように運動量のゼロ成分 (離散的な松原振動数 ω_n と連続的な p_0) を解析接続しても繋がりません。繋がっているのは遅延、先進グリーン関数とです。