有限温度でのグリーン関数

２点相関関数 (伝播関数) を扱っていくんですが、後で遅延や先進グリーン関数を作るので、ここではグリーン関数と呼びます。また、虚時間法で出てきた有限温度でのグリーン関数を温度グリーン関数 (松原グリーン関数とも呼ばれます) と呼ぶことにします。
やっていくことは、スペクトル関数を作りそれによってグリーン関数を表現することです。それによって温度グリーン関数と時間を変数に持つ先進、遅延グリーン関数との関係を見ます。また最後に、温度グリーン関数の時間成分のみをフーリエ変換したときの形を導きます。
ここでの $D^{<}(x,y)$ は場の量子論の「伝播関数について」での $\Delta^{(-)}(x,y)$ の符号を反転したものとして定義しているので対応させるときには注意してください。
遅延、先進グリーン関数の追加の話を「グリーン関数とスペクトル関数」でしています。

　最初にスペクトル関数を定義しておきます (実数スカラー場で話を進めていきます)。スペクトル関数を実時間によるグリーン関数を使って

$$\rho(k)=D^{>}(k)-D^{<}(k)$$

$$D^{>}(k)=\int dte^{ikx}D^{>}(x)\ ,\ D^{<}(k)=\int dte^{ikx}D^{<}(x)$$

このように定義します。$D^{>}(x),D^{<}(x)$ は

$$D^{>}(x,y)=Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta H}\phi(x)\phi(y))=\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_\beta$$

$$D^{<}(x,y)=\langle\phi(y)\phi(x)\rangle_\beta=D^{>}(y,x)$$

$\langle\ \rangle_\beta$ は熱的平均を表わしています。ここでは特に三次元成分を気にする必要がないので、無視していきます。なので、スペクトル関数を

$$\rho(k_0)=D^{>}(k_0)-D^{<}(k_0)$$

$$D^{>}(k_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0t}D^{>}(t)\ ,\ D^{<}(k_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0t}D^{<}(t)$$

このように書くことにします。スペクトル関数はボソンの場合では交換関係 $\rho(t)=\langle[\phi(t),\phi(0)\rangle_\beta$ によって定義されるものです。フェルミオンでは反交換関係になります。
　久保-Martin-Schwinger の関係

$$D^{<}(t)=D^{>}(t-i\beta)$$

から、$D^{<}(k_0)$ は

$$D^<(k_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0t}D^<(t)=\int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0t}D^>(t-i\beta)$$

そして、$D^>(t-i\beta)$ のフーリエ変換が

$$D^>(k_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0(t-i\beta)}D^>(t-i\beta)$$

となっていることを使えば

$$\begin{aligned}D^<(k_0)=\int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0t}D^>(t-i\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0t}e^{k_0\beta}e^{-k_0\beta}D^>(t-i\beta)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dte^{ik_0(t-i\beta)}e^{-k_0\beta}D^>(t-i\beta)\\ &= e^{-k_0\beta}D^>(k_0)\end{aligned} \tag{1}$$

という関係になっていることが分かります。後で出てきますが、フェルミオンだとマイナスの符号がつきます。

また、(1) とスペクトル関数の定義 $\rho(k_0)=D^>(k_0)-D^<(k_0)$ から

$$D^>(k_0)=\rho(k_0)+D^<(k_0)=\rho(k_0)+e^{-k_0\beta}D^>(k_0)$$

と書くことができ、まとめれば

$$D^>(k_0)=\frac{\rho(k_0)}{1-e^{-\beta k_0}}$$

同様に

$$D^<(k_0)=\frac{\rho(k_0)}{e^{\beta k_0}-1}$$

これらはボソンの分布関数

$$n_B(k_0)=\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}\ ,\ 1+n_B(k_0)=\frac{e^{\beta k_0}}{e^{\beta k_0}-1}=\frac{1}{1-e^{-\beta k_0}}$$

を使って

$$D^>(k_0)=(1+n_B(k_0))\rho(k_0)\ ,\ D^<(k_0)=n_B(k_0)\rho(k_0)$$

と書けます。

スペクトル関数の形を求めるために、「虚時間法」のところで出てきた

$$D^>(t)=Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}e^{i(E_n-E_m)t}|<n|\phi|m>|^2$$

これをフーリエ変換して代入します (4 次元でも構造は変わらない)。そうするとスペクトル関数は

$$\begin{aligned}
\rho(k_0) &= D^>(k_0) - D^<(k_0) \\
&= D^>(k_0) - e^{-\beta k_0} D^>(k_0) \\
&= (1 - e^{-\beta k_0}) D^>(k_0) \\
&= (1 - e^{-\beta k_0}) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} D^>(t) \\
&= (1 - e^{-\beta k_0}) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_n - E_m)t} | < n|\phi|m > |^2 \\
&= (1 - e^{-\beta k_0}) \sum_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} Z^{-1} e^{-\beta E_n} | < n|\phi|m > |^2 \\
&= 2\pi Z^{-1} (1 - e^{-\beta k_0}) \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} | < n|\phi|m > |^2 \delta(k_0 + E_n - E_m) \qquad (2)
\end{aligned}$$

このようになっていることが分かります。もしくは、$D^<(t)$ は単に $D^>(t)$ での時間の符号を反転させた形でかけるので

$$D^<(t) = Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{-i(E_n - E_m)t} | < n|\phi|m > |^2$$

これを使えば $\rho(k_0) = D^>(k_0) - D^<(k_0)$ は

$$\rho(k_0) = 2\pi Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} | < n|\phi|m > |^2 [\delta(k_0 + E_n - E_m) - \delta(k_0 - E_n + E_m)]$$

と書けることも分かります。この形から、$\rho(k_0)$ は実関数で奇関数 $\rho(k_0) = -\rho(-k_0)$ になっていることが分かります (4 次元では $\rho(k_0, \boldsymbol{k}) = -\rho(-k_0, \boldsymbol{k})$)。今の場合、実数場なので $| < n|\phi|m > |^2$ が変わらないので何も気にせずにできましたが、複素場では

$$\begin{aligned}
D^>(t) &= Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_n - E_m)t} < n|\phi|m >< m|\phi^\dagger|n > \\
&= Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_n - E_m)t} | < n|\phi|m > |^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^<(t) &= Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{-i(E_n - E_m)t} < n|\phi^\dagger|m >< m|\phi|n > \\
&= Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_m} e^{i(E_n - E_m)t} < m|\phi^\dagger|n >< n|\phi|m > \\
&= Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_m} e^{i(E_n - E_m)t} | < n|\phi|m > |^2
\end{aligned}$$

のようになっています。

　このスペクトル関数は実時間でのグリーン関数から導かれたものですが、実際にこれが温度グリーン関数をスペクトル表示にしたときに出てくることを見ていきます。実時間でのグリーン関数の

$$D^>(t) = \langle \phi(t)\phi(0) \rangle_\beta = Z^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_n-E_m)t} | < n|\phi|m > |^2$$

この表現は「虚時間法」で出てきたように

$$D_\beta(\tau) = D^>(-i\tau) \quad\ (0 \leq \tau \leq \beta)$$

と書けるので、そのまま虚時間 $(t = -i\tau)$ に持っていくことができます。なので、温度グリーン関数は

$$D_\beta(\tau) = \langle T[\phi(\tau)\phi(0)] \rangle_\beta = Z^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{(E_n-E_m)\tau} | < n|\phi|m > |^2$$

$$(0 \leq \tau \leq \beta)$$

と書けます (実時間の場合と同じようにやっていけば実際にこれを導けます)。後はこれをフーリエ変換すればよくて

$$\begin{aligned}
D_\beta(\omega_{n'}) &= \frac{1}{Z}\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_{n'}\tau} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{(E_n-E_m)\tau} | < n|\phi|m > |^2 \\
&= \frac{1}{Z}\int_0^\beta d\tau \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{(E_n-E_m+i\omega_{n'})\tau} | < n|\phi|m > |^2 \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \frac{e^{(E_n-E_m+i\omega_{n'})\tau}}{i\omega_{n'}+E_n-E_m}\Big|_0^\beta | < n|\phi|m > |^2 \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \frac{e^{(E_n-E_m+i\omega_{n'})\beta}-1}{i\omega_{n'}+E_n-E_m} | < n|\phi|m > |^2
\end{aligned}$$

今はボソンだとしているので、$\omega_{n'}\beta = 2\pi n'$ であるために $\exp[i2\pi n'] = 1$ となることから

$$D_\beta(\omega_{n'}) = \frac{1}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \frac{e^{(E_n-E_m)\beta}-1}{i\omega_{n'}+E_n-E_m} | < n|\phi|m > |^2$$

この時に、スペクトル関数 (2) を導入すれば

$$D_\beta(\omega_{n'}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(k_0)}{i\omega_{n'}-k_0} dk_0$$

$$\rho(k_0) = \frac{2\pi}{Z}\sum_{n,m} e^{-\beta E_n}(1-e^{-\beta k_0})\delta(k_0+E_n-E_m) | < n|\phi|m > |^2$$

と書けます。このようにスペクトル関数を使うことで温度グリーン関数を表現することができます。虚時間での温度グリーン関数を表現しているスペクトル関数が実時間で定義されていることには注意してください。スペクトル関数を使った話には 3 次元積分と絡む部分がないので (3 次元成分は通常通りフーリエ変換していればいい)、4 次元にするには、スペクトル関数を単に $\rho(k_0, \boldsymbol{k})$ とすればいいです。例えば、スペクトル関数の表示は

$$\rho(k_0,\boldsymbol{k})=\frac{(2\pi)^4}{Z}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}(1-e^{-\beta k_0})\delta(k_0+E_n-E_m)\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}_m)|<n|\phi|m>|^2$$

こうなるのは三次元を含めたとき

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}e^{iHt}\phi(0,0)e^{-iHt}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

となっていることと (H と $\boldsymbol{p}$ は可換)、$\boldsymbol{p}$ の固有値が

$$\boldsymbol{p}|n>=\boldsymbol{p}_n|n>$$

となっていることから分かります。

相互作用がないボソンの場合、温度グリーン関数は

$$\frac{1}{\omega_n^2+\omega^2}\quad(\omega^2=\boldsymbol{k}^2+m^2)$$

だということから、スペクトル関数は階段関数 $\theta(k_0)$ を使って

$$\rho_0(k_0,\boldsymbol{k})=2\pi\epsilon(k_0)\delta(k_0^2-\omega^2)\quad(\epsilon(k_0)=\theta(k_0)-\theta(-k_0))$$

このように書けて、これが相互作用なしでのスペクトル関数になります。実際に

$$\begin{aligned}
D_\beta(\omega_n)&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\epsilon(k_0)\delta(k_0^2-\omega^2)}{i\omega_n-k_0}dk_0\\
&=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2|\omega|}\frac{\epsilon(k_0)\delta(k_0-\omega)+\epsilon(k_0)\delta(k_0+\omega)}{i\omega_n-k_0}dk_0\\
&=-\frac{1}{2|\omega|}(\frac{1}{i\omega_n-\omega}+\frac{-1}{i\omega_n+\omega})\\
&=-\frac{1}{2|\omega|}(\frac{i\omega_n+\omega-i\omega_n+\omega}{-\omega_n^2-\omega^2})\\
&=\frac{1}{\omega_n^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

ちゃんと、相互作用なしのボソンの温度グリーン関数を導きます。

スペクトル関数の導入によって、遅延、先進グリーン関数との関係性を導けます。時間を変数に持つ遅延、先進グリーン関数は、階段関数 $\theta(x_0)$ を使って

$$G_R(x,y)=i\theta(x_0-y_0)(G^>(x,y)\mp G^<(x,y))$$

$$G_A(x,y)=-i\theta(y_0-x_0)(G^>(x,y)\mp G^<(x,y))$$

これで与えられます (ボソンがマイナス、フェルミオンがプラス。ボソンでの $G^>(x,y),G^<(x,y)$ は上での $D^>(x,y),D^<(x,y)$ と同じです。フェルミオンでは $G^>(x,y)=\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle_\beta,G^<(x,y)=\langle\overline{\psi}(y)\psi(x)\rangle_\beta$ です (下でのフェルミオンの伝

播関数の定義では $G^<(x,y)=-S^<(x,y)$)。x,y は 4 次元座標の 4 元ベクトルで、0 成分は実時間で、G_R が遅延 (retarded)、G_A が先進 (advanced) で、θ は階段関数です。この定義の仕方は場の量子論の「伝播関数について」での定義とは若干変えています。後の話を見ていけば分かりますが、このように定義したほうが有限温度では便利です。「伝播関数について」の定義にあわせるには i で割ればいいので、「伝播関数について」の i をはずしてマイナスにしたものになります (実時間も視野にいれるなら「実時間法〜伝播関数の性質〜」も見ておいてください)。この対応から、この定義における遅延、先進グリーン関数で i を外に出そうとすると $-i$ となって外に出てきます。

これを同じようにスペクトル表示に持って行きます。といっても $D^>(x_0,y_0)$ の表示は分かっており、$D^<(x_0,y_0)$ はそれの時間を逆にすればいいだけなので

$$D^>(x_0,y_0)=Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}e^{i(E_n-E_m)(x_0-y_0)}|<n|\phi|m>|^2$$

$$D^<(x_0,y_0)=Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}e^{i(E_n-E_m)(y_0-x_0)}|<n|\phi|m>|^2$$

これらを代入すると ($x_0-y_0=t$ として)

$$D_R(t)=i\theta(t)Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}[e^{i(E_n-E_m)t}-e^{-i(E_n-E_m)t}]|<n|\phi|m>|^2$$

これをフーリエ変換します。第一項だけでみてみると

$$Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}\int_0^\infty dte^{i(p_0+E_n-E_m)t}e^{-\beta E_n}|<n|\phi|m>|^2$$

今の場合では階段関数 $\theta(t)$ がいるので、積分範囲が 0 から ∞ になっています。この積分はこのままだと実行しきれないので (上限の無限大でおかしくなるので収束因子が必要)、微小量 $\epsilon>0$ を導入し、積分後に $\epsilon\to 0$ にもっていくことにします。これによって

$$\int_0^\infty dte^{i(p_0+E_n-E_m)t-\epsilon t}=\frac{e^{i(p_0+E_n-E_m)t-\epsilon t}}{-\epsilon+i(p_0+E_n-E_m)}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\epsilon-i(p_0+E_n-E_m)}$$

これを D_R に入れれば

$$\begin{aligned}D_R(p_0)&=iZ^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}\Big[\frac{1}{\epsilon-i(p_0+E_n-E_m)}-\frac{1}{\epsilon-i(p_0-E_n+E_m)}\Big]|<n|\phi|m>|^2\\&=-Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}\Big[\frac{1}{(p_0+E_n-E_m)+i\epsilon}-\frac{1}{(p_0-E_n+E_m)+i\epsilon}\Big]|<n|\phi|m>|^2\end{aligned}$$

そうすると、スペクトル関数を使って

$$D_R(p_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dk_0\frac{\rho(k_0)}{p_0-k_0+i\epsilon}$$

$$\rho(k_0)=2\pi Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}|<n|\phi|m>|^2[\delta(k_0+E_n-E_m)-\delta(k_0-E_n+E_m)]$$

と書くことができます。なので、遅延グリーン関数は全く同じスペクトル関数を使って書けるという事が分かります。先進でも同様で

$$
\begin{aligned}
D_A(t) =& -i\theta(-t)Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}[e^{i(E_n-E_m)t}-e^{-i(E_n-E_m)t}]|<n|\phi|m>|^2 \\
D_A(p_0) =& -iZ^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}\int_{-\infty}^{0}dt[e^{i(p_0+E_n-E_m)t}-e^{-i(-p_0+E_n-E_m)t}]|<n|\phi|m>|^2 \\
=& -iZ^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}\int_{0}^{\infty}dt[e^{-i(p_0+E_n-E_m)t}-e^{i(-p_0+E_n-E_m)t}]|<n|\phi|m>|^2 \\
=& -iZ^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}\int_{0}^{\infty}dt[e^{-i(p_0+E_n-E_m)t-\epsilon t}-e^{i(-p_0+E_n-E_m)t-\epsilon t}]|<n|\phi|m>|^2 \\
=& -iZ^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}[\frac{-1}{-i(p_0+E_n-E_m)-\epsilon}-\frac{-1}{i(-p_0+E_n-E_m)-\epsilon}]|<n|\phi|m>|^2 \\
=& -iZ^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}[\frac{-i}{(p_0+E_n-E_m)-i\epsilon}-\frac{-i}{-(-p_0+E_n-E_m)-i\epsilon}]|<n|\phi|m>|^2 \\
=& -Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}[\frac{1}{(p_0+E_n-E_m)-i\epsilon}-\frac{1}{(p_0-E_n+E_m)-i\epsilon}]|<n|\phi|m>|^2
\end{aligned}
$$

よって同じスペクトル関数によって

$$
D_A(p_0) = -\frac{1}{2\pi}\int dk_0\frac{\rho(k_0)}{p_0-k_0-i\epsilon}
$$

となります。これらを 4 次元にするにはスペクトル関数を単に 4 次元の $\rho(k_0\boldsymbol{k})$ に置き換えればいいだけです。
　複素場にしたときでは

$$
\begin{aligned}
D^{>}(t)-D^{<}(t) &= Z^{-1}\sum_{n,m}[e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}]e^{i(E_n-E_m)t}|<n|\phi|m>|^2 \\
&= Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}[1-e^{\beta(E_n-E_m)}]|<n|\phi|m>|^2
\end{aligned}
$$

となることに注意してください。
　この結果から分かるさらに重要なことは、$D_{R,A}(p_0)$ は温度グリーン関数 $G_\beta(i\omega_n)$ と

$$
D_R(p_0,\boldsymbol{p}) = D_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0+i\epsilon}
$$

$$
D_A(p_0,\boldsymbol{p}) = D_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0-i\epsilon}
$$

このような関係になっているということです (最終的には $\epsilon\to 0$ にする)。つまり、温度グリーン関数が求まってしまえば遅延と先進グリーン関数は求めることが出来ます。

　また、遅延、先進グリーン関数を利用することで、スペクトル関数を求められます。これは遅延、先進グリーン関数の差が

$$
\begin{aligned}
D_R(x,y)-D_A(x,y) &= i\theta(x_0-y_0)(D^>(x,y)-D^<(x,y))+i\theta(y_0-x_0)(D^>(x,y)-D^<(x,y)) \\
&= iD^>(x,y)-iD^<(x,y)
\end{aligned}
$$

となることからすぐに分かって、これはフーリエ変換すればスペクトル関数 $\rho(k)$ の定義に対応しています。よって運動量表示で

$$
\rho(k)=-i(D_R(k)-D_A(k))
$$

このような関係になります。つまり、温度グリーン関数が分かれば、遅延か先進グリーン関数を経由することでスペクトル関数が求まります。これを使えば、スカラー場では

$$
\begin{aligned}
D_R(k)-D_A(k) &= \left.\frac{1}{-(iw_n)^2+\omega^2}\right|_{iw_n=k_0+i\epsilon}-\left.\frac{1}{-(iw_n)^2+\omega^2}\right|_{iw_n=k_0-i\epsilon} \\
&= \frac{1}{-(k_0+i\epsilon)^2+\omega^2}-\frac{1}{-(k_0-i\epsilon)^2+\omega^2} \\
&= \frac{1}{-k_0^2+\omega^2-2ik_0\epsilon}-\frac{1}{-k_0^2+\omega^2+2ik_0\epsilon} \\
&= -\frac{1}{k_0^2-\omega^2+ik_0\epsilon}+\frac{1}{k_0^2-\omega^2-ik_0\epsilon}
\end{aligned}
$$

2ϵ を ϵ とおき直しています。ここでデルタ関数の性質

$$
2\pi i\delta(x)=\frac{1}{x-i\epsilon}-\frac{1}{x+i\epsilon}
$$

を使うことで求まる関係式

$$
\left(\begin{array}{ll}
\dfrac{1}{k_0^2-\omega^2+ik_0\epsilon}=\dfrac{\theta(k_0)}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon} & k_0>0 \\
\dfrac{1}{k_0^2-\omega^2+ik_0\epsilon}=\dfrac{\theta(-k_0)}{k_0^2-\omega^2-i\epsilon}=\dfrac{\theta(-k_0)}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon}+2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(-k_0) & k_0<0
\end{array}\right.
$$

$$
\Rightarrow \frac{1}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon}+2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(-k_0)
$$

$$
\left(\begin{array}{ll}
\dfrac{1}{k_0^2-\omega^2-ik_0\epsilon}=\dfrac{\theta(k_0)}{k_0^2-\omega^2-i\epsilon}=\dfrac{\theta(k_0)}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon}+2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(k_0) & k_0>0 \\
\dfrac{1}{k_0^2-\omega^2-ik_0\epsilon}=\dfrac{\theta(-k_0)}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon} & k_0<0
\end{array}\right.
$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon}+2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(k_0)$$

を使うことで

$$\begin{aligned}D_R(k)-D_A(k)=&-\frac{1}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon}-2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(-k_0)+\frac{1}{k_0^2-\omega^2+i\epsilon}+2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(k_0)\\=&-2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(-k_0)+2\pi i\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(k_0)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\rho(k)=&-i(D_R(k)-D_A(k))=2\pi\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(k_0)-2\pi\delta(k_0^2-\omega^2)\theta(-k_0)\\&=2\pi\epsilon(k_0)\delta(k_0^2-\omega^2)\end{aligned}$$

と求まります。この自由粒子での形からスペクトル関数は励起エネルギーのスペクトルになっていることが分かります。しかもデルタ関数のために唐突に幅なしで出てきています。これはゼロ温度での自由粒子は質量殻上 $p^2=m^2$ にいることに対応しています。

次に後々使うことになるので、ちょっとした変換と計算方法を見ていきます。ボソンの温度グリーン関数 $D_\beta(\tau,\boldsymbol{k})$ の時間成分のみの変換というのを考えます。これは単純に

$$D_\beta(\tau,\boldsymbol{k})=T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}D_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k})$$

ここで和の計算を実行します。そのために和の計算で標準的に用いられる小細工をします。今の場合松原振動数があるために

$$\omega_n=2n\pi T\quad(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

という離散的な値を変数に持っており、それに対して和をとらなければいけないようになっています。この状況を読み替えて、離散的な値の和は留数の和になっているのだろうと考えます。つまり、n によって極を持つような関数に置き換えてしまえば、和を複素積分に変えることができます。具体的には

$$\sum_n e^{-i\omega_n\tau}D_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k})\ \Rightarrow\ -\frac{1}{T}\int_C\frac{dk_0}{2\pi i}\frac{e^{-k_0\tau}}{e^{-\beta k_0}-1}D_\beta(k_0,\boldsymbol{k})$$

こんなかんじで置き換えます (C は複素平面上の経路)。この積分は分母の $e^{-\beta k_0}-1$ が $k_0=i\omega_n$ のときに極を持っていることが分かると思います (極の点が k_0 の複素平面上での虚軸上に並んでいて、それらを左回りに囲んでいる)。なので、留数の和という形にすることで元の形に戻ります。また、T で割っているのは、留数に出てくる T を消すためです。$1/(e^{-\beta k_0}-1)$ の留数を求めるために、$\beta z=0$ 周りで展開してみれば

$$e^{-\beta z}-1=1-\beta z+(\beta z)^2\cdots-1=-\beta z+\frac{1}{2}(\beta z)^2\cdots$$

展開係数と留数の関係からこれの第一項の係数が留数になるために(正確にはこれの逆数ですが係数は変わりません)、$-1/\beta$ が出てくることになるので、それを消すために $-T$ で割っています。

具体的に見ていく前にちゃんと成り立っているのか見ておきます。大抵 D_β として使うものは

$$\frac{1}{z-E}$$

みたいな形をしているので

$$I=\int_C \frac{dz}{2\pi i}f(z)\frac{e^{\alpha z}}{z-E}$$

という積分を考えます。このとき、$f(z)$ は $z=i\omega_n(n=0,\pm1,\cdots)$ で極を持っており(極を左周りに囲んでいるとします)、留数として T を持っているとします。なので、今の場合の極は $i\omega_n$ と E です。そうすると、留数定理よりこの積分は

$$I=T\sum_n \frac{e^{i\alpha\omega_n}}{i\omega_n-E}+f(E)e^{\alpha E}$$

となります。次に、これとは別の方向からこの積分を調べてみます。経路は極を含んでいればいいので、積分経路は複素平面上で原点を中心にする半径 r の大きな円だと考えます。なので積分を極座標で書くと

$$I=\int_C \frac{dz}{2\pi i}f(z)\frac{e^{\alpha z}}{z-E}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta f(z)\frac{\exp[\alpha re^{i\theta}]}{re^{i\theta}-E}re^{i\theta}\qquad (z=re^{i\theta})$$

で、$r\to\infty$ とし、$f(z)=1/(e^{\beta z}-1)$ だとすれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta f(z)\frac{\exp[\alpha re^{i\theta}]}{re^{i\theta}-E}re^{i\theta} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{\exp[\alpha re^{i\theta}]}{\exp[\beta re^{i\theta}]-1}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{\exp[\alpha r(\cos\theta+i\sin\theta)]}{\exp[\beta r(\cos\theta+i\sin\theta)]-1}\end{aligned}$$

このとき、r を無限大に持っていったときに効いてくるのは実数を返す $\cos\theta$ の項です。そうすると、0 から π の範囲では、cos が正の値なので

$$\frac{\exp[\alpha r\cos\theta]}{\exp[\beta r\cos\theta]}$$

より、$(\alpha-\beta)$ が負になっていれば r が無限大で 0 になります。で、今は α は β より小さいと思うことにします(ここでの場合 α は τ に対応するので、β より小さい。$0\leq\tau\leq\beta$)。π から 2π では今度は逆で $\cos\theta$ は負になり、分母の exp は 0 に近づいていき、分子も 0 に近づいていくので、結局 0 です。というわけで、積分 S は 0 になっていることが分かります。なので

$$T\sum_n \frac{e^{i\alpha\omega_n}}{i\omega_n-E}=-f(E)e^{\alpha E}$$

ということになっていることが分かり、置き換えても平気になっています。もしくは、積分経路をとった時、円の円周からの寄与がないということを見ればいいです (ジョルダンの補題)。

　また、非相対論的な場合に重要なことですが、$e^{i\alpha\omega_n}$ は収束因子になっています。そのため、α は計算の最後で 0 にもっていくことになります。相対論的な場合はこの収束因子は必要ないです (反粒子の存在のため)。なので、$\alpha=\tau$ として扱ってしまいます。

　実際に温度グリーン関数を計算してみます。相互作用のない場合を見たいので

$$D_\beta(k_0,\boldsymbol{k})=\frac{1}{E^2-k_0^2}\qquad(D_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k})=\frac{1}{E^2+\omega_n^2})$$

を使います ($E=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$)。そうすると時間成分の変換は

$$D_\beta(\tau,\boldsymbol{k})=T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}D_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k})=T\sum_n\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{E^2+\omega_n^2}$$

そして、この和を複素積分に変えます。そうすると、極が虚軸上にいるのでそこを避けるような経路を選びます。なので、虚軸上にいる極を避けるように、虚軸の右側 (微小に $+\epsilon$ だけずらして) に $-i\infty$ から $+i\infty$、左側では ($-\epsilon$ だけずらして)$+i\infty$ から $-i\infty$ にいくような積分経路になります。そして、今は自由なグリーン関数での極 $k_0=\pm E$ もあります。なので、積分経路を変更することで、この極を持たせます。そのために、$+E$ を含むように右側を半円 (時計回り) に、左側は $-E$ を含むように半円 (時計回り) を作って囲みます。で、半円の円周から寄与はこないので、$D_\beta(\tau,\boldsymbol{k})$ の積分は留数定理によって

$$\begin{aligned}
D_\beta(\tau,\boldsymbol{k})=-T\int_C\frac{dk_0}{2\pi iT}\frac{e^{-k_0\tau}}{e^{-\beta k_0}-1}D_\beta(k_0,\boldsymbol{k})&=-T\int_C\frac{dk_0}{2\pi iT}\frac{e^{-k_0\tau}}{e^{-\beta k_0}-1}\frac{1}{E^2-k_0^2}\\
&=-\int_C\frac{dk_0}{2\pi i}\frac{e^{-k_0\tau}}{e^{-\beta k_0}-1}\frac{-1}{(k_0+E)(k_0-E)}\\
&=\frac{e^{-E\tau}}{e^{-\beta E}-1}\frac{-1}{2E}+\frac{e^{E\tau}}{e^{\beta E}-1}\frac{-1}{-2E}\\
&=-\frac{e^{-E\tau}}{e^{-\beta E}-1}\frac{1}{2E}+\frac{1}{2E}\frac{e^{E\tau}}{e^{\beta E}-1}\\
&=\frac{1}{2E}(-\frac{e^{-E\tau}}{e^{-\beta E}-1}+\frac{e^{E\tau}}{e^{\beta E}-1})
\end{aligned}$$

ここで、ボソンの分布関数

$$n_B(E)=\frac{1}{e^{\beta E}-1}$$

を導入すると

$$1+n_B(E)=\frac{1}{1-e^{-\beta E}}$$

なので

$$D_\beta(\tau,\boldsymbol{k})=\frac{1}{2E}((1+n_B(E))e^{-E\tau}+n_B(E)e^{E\tau})$$

となります。

いろいろと見てきましたが、ここでの話はフェルミオンでも同じです。気をつける点はボソンと違いフェルミオンでは反周期性を持っているということです。そのために、久保-Martin-Schwinger の関係はマイナスがつきます。また、$\omega_n = 2\pi T(n+1/2)$ なので

$$\exp[\beta(E+\omega_n)] = \exp[\beta E + 2\pi(n+\frac{1}{2})] = -\exp[\beta E]$$

となります。さらに詳しいことは「有限密度でのフェルミオン」を見てください。

フェルミオンでは 2 点相関関数は

$$S_{ab}(x,y) = \theta(x_0-y_0)S^>_{ab}(x,y) + \theta(y_0-x_0)S^<_{ab}(x,y)$$

$$S^>_{ab}(x,y) = \langle\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)\rangle_\beta\ ,\ S^<_{ab}(x,y) = -\langle\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)\rangle_\beta$$

a,b はスピノール成分に対するものです。これに対して、$D^>(k_0), D^<(k_0)$ と同じように変形すると $S^<(k_0)$ と $S^>(k_0)$ の関係は

$$S^<(k_0) = -e^{-k_0\beta}S^>(k_0)$$

そして、フェルミオンのスペクトル関数 $\rho_F(k_0)$ を

$$\rho_F(k_0) = S^>(k_0) - S^<(k_0)$$

と定義します (スペクトル関数をこの形で書くために $S^<(x,y) = -\langle\overline{\psi}(y)\psi(x)\rangle_\beta$ と定義している)。スピノール成分による行列になっていることに気を付けてください。一般形は

$$\rho_F(k) = \gamma_0\rho_0(k) + \gamma_i\rho^i_V(k) + \gamma_S(k) = \gamma_0\rho_0(k) + \gamma_i k^i\rho_V(k) + \gamma_S(k)$$

のように書けます。また、$\rho_F(k)$ は奇関数になっていませんし、ガンマ行列がいることから分かるように正の値に制限されていません。スペクトル関数との関係は

$$\begin{aligned} S^>(k_0) &= \rho_F(k_0) + S^<(k_0) \\ &= \rho_F(k_0) - e^{-k_0\beta}S^>(k_0) \end{aligned}$$

となるので

$$S^>(k_0) = \frac{\rho_F(k_0)}{1+e^{-\beta k_0}} = \frac{e^{\beta k_0}}{e^{\beta k_0}+1}\rho_F(k_0)$$

$S^<(k_0)$ は

$$S^<(k_0) = -\frac{\rho_F(k_0)}{e^{\beta k_0}+1}$$

なので、フェルミオンの分布関数

$$n_F(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0}+1}\ ,\ 1-n_F(k_0) = 1-\frac{1}{e^{\beta k_0}+1} = \frac{e^{\beta k_0}}{e^{\beta k_0}+1}$$

によって

$$S^>(k_0) = (1-n_F(k_0))\rho_F(k_0)\ ,\ S^<(k_0) = -n_F(k_0)\rho_F(k_0)$$

フェルミオンでもこのスペクトル関数によって、遅延、先進グリーン関数と温度グリーン関数はボソンのとき上と同じ解析接続によってつながっていることが分かります。

また、和を複素積分に変えるときに今度は

$$\omega_n = 2\pi T(n+\frac{1}{2})\quad (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

という極が必要であるために、上での exp にマイナスが付くということから極を持たせる関数は

$$\frac{1}{e^{\beta z}+1}$$

のような形をしているものになります。これで分かるように、和を積分に変えるときには、ボソンではボソンの分布関数、フェルミオンではフェルミオンの分布関数を使えばいいということです。さらに気をつけることは、4 成分スピノールの存在です。これが効いてこない非相対論的な場合はボソンの場合での $(1-e^{\beta k_0})$ が $(1+e^{\beta k_0})$ になるぐらいしか変更点は出てこないんですが、相対論的ではさらに余計なものがくっつきます。これを簡単に見るために、相互作用なしでのフェルミオンのスペクトル関数を出してみます。

スペクトル関数の定義がボソンと変わっていないので、フェルミオンでもスペクトル関数を使った表現は変わりません（「有限密度でのフェルミオン」参照）。このため、

$$S_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_F(k_0,\boldsymbol{k})}{i\omega_n-k_0}dk_0$$

この $\rho_F(k_0,\boldsymbol{k})$ が

$$\rho_F(k_0,\boldsymbol{k}) = 2\pi\epsilon(k_0)(\not{k}+m)\delta(k^2-m^2)$$

となっていれば

$$
\begin{aligned}
S_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k}) &= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon(k_0)(\not{k}+m)\delta(k^2-m^2)}{i\omega_n-k_0}dk_0 \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon(k_0)(\not{k}+m)\delta(k_0^2-E^2)}{i\omega_n-k_0}dk_0 \quad (E=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2|E|}\frac{(\not{k}+m)(\epsilon(k_0)\delta(k_0-E)+\epsilon(k_0)\delta(k_0+E))}{i\omega_n-k_0}dk_0 \\
&= -\frac{1}{2|E|}\Big[\frac{E_0\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{i\omega_n-E}-\frac{-E_0\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{i\omega_n+E}\Big] \\
&= -\frac{1}{2|E|}\Big[\frac{(E_0\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)(i\omega_n+E)+(E_0\gamma_0+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}-m)(i\omega_n-E)}{-\omega_n^2-E^2}\Big] \\
&= -\frac{1}{2|E|}\Big[\frac{2i\omega_nE\gamma_0+E(E_0\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m-E_0\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)}{-\omega_n^2-E^2}\Big] \\
&= -\frac{1}{2|E|}\Big[\frac{2i\omega_nE\gamma_0+2E(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)}{-\omega_n^2-E^2}\Big] \\
&= \frac{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{\omega_n^2+E^2}
\end{aligned}
$$

これは虚時間法で出てきたフェルミオンの温度グリーン関数

$$
S_\beta(\omega_n,\boldsymbol{p})=\frac{-1}{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}=\frac{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2}
$$

と一致しています。というわけで、分かったようにスペクトル関数に $(\not{k}+m)$ というのがくっついてきますし、奇関数にはなっていません。

ここまでの話から予想できるように、スペクトル関数を使った温度、遅延、先進グリーン関数の関係は

$$
\begin{aligned}
&S_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_F(k_0,\boldsymbol{k})}{i\omega_n-k_0}dk_0 \\
&S_R(p_0,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_F(k_0,\boldsymbol{k})}{p_0-k_0+i\epsilon}dk_0=S_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0+i\epsilon} \\
&S_A(p_0,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_F(k_0,\boldsymbol{k})}{p_0-k_0-i\epsilon}dk_0=S_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0-i\epsilon}
\end{aligned}
$$

となり、見た目はスカラー場と同じです (「有限密度でのフェルミオン」参照)。相互作用のない場合で計算してみればそれぞれのグリーン関数が実際に求められます。しかし、ρ_F は実数となっていないので、遅延、先進の関係が異なっています。例えば、スカラー場で成立している遅延と先進の複素共役の関係 $D_R=D_A^*$ は ρ_F が実数でないと成立しなく (ρ_F にはガンマ行列がいる)、$S_R(p_0,\boldsymbol{p})=\gamma_0S_A^\dagger(p_0,\boldsymbol{p})\gamma_0$ となっています (「有限密度でのフェルミオン」参照)。

しかし、ガンマ行列の複素共役を取らないとすれば同じ関係を作れます。フェルミオンのグリーン関数 S は一般的に

$$
S(p)=\gamma_0A(p)+\gamma_iA^i(p)+B(p)
$$

という形で書けます (条件を変えると他の形で書くこともできる)。A, A^i, B はスピノール成分を持たない複素関数です。そうすると、$\gamma_0\gamma_0=1,\ \gamma^\mu=\gamma_0\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0$ から

$$S^\dagger = \gamma_0^\dagger A^* + \gamma_i^\dagger A^{i*} + B^*$$

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = \gamma_0\gamma_0^\dagger\gamma_0 A^* + \gamma_0\gamma_i^\dagger\gamma_0 A^{i*} + \gamma_0\gamma_0 B^*$$

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 A^* + \gamma_i A^{i*} + B^*$$

よって、ガンマ行列の複素共役を取らないと決めれば

$$\gamma_0 S^\dagger \gamma_0 = S^*$$

となり、$S_R = S_A^*$ と書けます。

相互作用がないときで具体的に見ておきます。相互作用がないときの遅延、先進グリーン関数 S_R, S_A は

$$S_R(p) = \frac{p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{-(p_0+i\epsilon)^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2} = -\frac{p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 + i\epsilon p_0} = (p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)D_R(p)$$

$$S_A(p) = \frac{p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{-(p_0-i\epsilon)^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2} = -\frac{p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 - i\epsilon p_0} = (p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)D_A(p)$$

となり、ガンマ行列部分とスカラー場の遅延、先進グリーン関数 $D_R(p), D_A(p)$ に分離させて書けます。スカラー場では $D_R^*(p) = D_A(p)$ です。これから、ガンマ行列を無視して S_R の複素共役を取るとすれば (m は実数)

$$S_R^*(p) = (p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)D_R^*(p) = (p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)D_A(p) = S_A(p)$$

となり、スカラー場と同じ遅延と先進の関係を表記上は書けます (「∗」の意味がフェルミオンとスカラー場で変わっている)。

この表記で相互作用のないスペクトル関数もスカラー場と同じ形で書けます。D_R を主値 P を使って実部と虚部に分ければ

$$D_R(p) \ \Rightarrow\ -\frac{\theta(p_0)}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 + i\epsilon} = -\theta(p_0)(P\frac{1}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} - i\pi\delta(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2)) \quad (p_0 > 0)$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\theta(-p_0)}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 - i\epsilon} = -\theta(-p_0)(P\frac{1}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} + i\pi\delta(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2)) \quad (p_0 < 0)$$

$D_A(p)$ はこれの複素共役を取ったものです。そうすると、スカラー場でのスペクトル関数は

$$\rho_B = -i(D_R(p) - D_A(p)) = -i(D_R(p) - D_R^*(p)) = -2i\mathrm{Im}D_R(p)$$

左から 2 番目は $p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m$ を掛ければ $-i(S_R - S_A)$ になることから、

$$-i(S_R - S_A) = -i(p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)(D_R(p) - D_R^*(p)) = -2i(p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)\mathrm{Im}D_R(p)$$

$\mathrm{Im}D_R(p)$ を入れれば

$$
\begin{aligned}
-2i(p_0\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)\mathrm{Im}D_R(p) &= 2\pi(p_0\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)(\theta(p_0)-\theta(-p_0))\delta(p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2)\\
&= 2\pi(p_0\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)\epsilon(p_0)\delta(p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m^2)
\end{aligned}
$$

これは相互作用のないスペクトル関数 ρ_F になっています。よって、ガンマ行列を無視して S_R の複素共役を取るとすれば、スペクトル関数は

$$
\rho_F(p)=-i(S_R(p)-S_A(p))=-i(S_R(p)-S_R^*(p))=-2i\mathrm{Im}S_R(p)
$$

と書けます。

次に時間成分のみの変換をフェルミオンでも行います。といっても出発点は

$$
S(\tau,\boldsymbol{k})=T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}S(\omega_n,\boldsymbol{k})=T\sum_n\frac{e^{-i\omega_n\tau}}{E^2+\omega_n^2}
$$

という形で行います。ボソンと違うところは ω_n が

$$
\omega_n=2\pi T(n+\frac{1}{2})
$$

となっている点だけです。この形からはじめる理由は簡単で、フェルミオンでも結局分母はこの形になるからというだけです。ここからは和をボソンと同じように積分に変えます。フェルミオンの場合では極が β になるので符合が反転して (積分経路は変更されない)

$$
\begin{aligned}
S(\tau,\boldsymbol{k}) &= \int_C\frac{dk_0}{2\pi i}\frac{e^{-k_0\tau}}{e^{-\beta k_0}+1}\frac{1}{E^2-k_0^2}\\
&= \int_C\frac{dk_0}{2\pi i}\frac{e^{-k_0\tau}}{e^{-\beta k_0}+1}\frac{-1}{(k_0+E)(k_0-E)}\\
&= -\frac{e^{-E\tau}}{e^{-\beta E}+1}\frac{-1}{2E}-\frac{e^{E\tau}}{e^{\beta E}+1}\frac{-1}{-2E}\\
&= \frac{1}{2E}(\frac{e^{\beta E}e^{-E\tau}}{e^{\beta E}+1}-\frac{e^{E\tau}}{e^{\beta E}+1})\\
&= \frac{1}{2E}((1-n_F(E))e^{-E\tau}-n_F(E)e^{E\tau})
\end{aligned}
$$

ここでは、フェルミオンの分布関数

$$
n_F(E)=\frac{1}{e^{\beta E}+1}\quad 1-n_F(E)=\frac{e^{\beta E}}{e^{\beta E}+1}
$$

を使っています。

ついでにゲージボソンのスペクトル関数も出しておきます。これはボソンのスペクトル関数から簡単に求められます。ゲージボソン (光子) のゼロ温度での伝播関数は

$$
D_{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\big(g_{\mu\nu}+(\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\epsilon}\big)
$$

温度グリーン関数へはボソンやフェルミオンと同じ手続きでいけるので、ω_n をボソンの松原振動数だとして

$$D_\beta^{\mu\nu}(k)=\frac{1}{k^2}\big(g^{\mu\nu}+(\alpha-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\big)\quad(k_\mu=(i\omega_n,k_i))$$

相互作用がないときのスペクトル関数は、これを遅延、先進グリーン関数に解析接続して、その差を計算すれば出てきます。しかし、まともに計算しなくても簡単に求められます。ゲージ固定項を微分の形にして

$$D_\beta^{\mu\nu}(k)=\big(-g^{\mu\nu}-(\alpha-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\big)\frac{-1}{k^2}$$

としてしまえば、質量 0 のボソンの温度グリーン関数に解析接続と無関係な $-g^{\mu\nu}-(\alpha-1)k^\mu k^\nu\partial/\partial|\boldsymbol{k}|^2$ がかかっているだけになります ($k_0\pm i\epsilon,\epsilon\to 0$ なので、極と無関係なところでは $\epsilon=0$)。なので、ボソンのスペクトル関数にそれがくっついた

$$\rho_{photon}^{\mu\nu}(k)=2\pi\epsilon(k_0)\big(-g^{\mu\nu}-(\alpha-1)k^\mu k^\nu\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\big)\delta(k^2)$$

というのが相互作用なしでの光子のスペクトル関数です。微分演算がデルタ関数に作用していますが、これはちゃんと数学的に定義されています。この形を含んでいる計算の例としては、そうそう見かけることはないと思いますが

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{1-e^{-\beta k_0}}\epsilon(k_0)\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\delta(k_0^2-\boldsymbol{k}^2)$$
$$=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{e^{-ik_0x_0}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{1-e^{-\beta k_0}}\epsilon(k_0)\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\delta(k_0^2-\boldsymbol{k}^2)$$
$$=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{e^{-ik_0x_0}e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|\cos\theta}}{1-e^{-\beta k_0}}\epsilon(k_0)\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\delta(k_0^2-\boldsymbol{k}^2)$$
$$=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|^2\frac{\sin\theta}{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|\sin\theta}\int_{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}dz\frac{e^{-ik_0x_0}e^{iz}}{1-e^{-\beta k_0}}\epsilon(k_0)\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\delta(k_0^2-\boldsymbol{k}^2)$$
$$=\frac{-2\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|^2\frac{1}{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}\frac{1}{i}\frac{e^{-ik_0x_0}(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}-e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})}{1-e^{-\beta k_0}}\epsilon(k_0)\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|}\delta(k_0^2-\boldsymbol{k}^2)$$
$$=\frac{-2\pi}{2(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{i}\frac{e^{-ik_0x_0}(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}-e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})}{1-e^{-\beta k_0}}\epsilon(k_0)\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|}(\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}(\delta(k_0-|\boldsymbol{k}|)+\delta(k_0+|\boldsymbol{k}|)))$$
$$=\frac{-2\pi}{2(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|}[\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{i}\frac{e^{-ik_0x_0}(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}-e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})}{1-e^{-\beta k_0}}\epsilon(k_0)\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}(\delta(k_0-|\boldsymbol{k}|)+\delta(k_0+|\boldsymbol{k}|))]$$
$$-\frac{-2\pi}{2(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{i}\frac{e^{-ik_0x_0}}{1-e^{-\beta k_0}}\frac{\partial(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}-e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})}{\partial|\boldsymbol{k}|}\epsilon(k_0)\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}(\delta(k_0-|\boldsymbol{k}|)+\delta(k_0+|\boldsymbol{k}|))$$
$$=\frac{-2\pi}{2(2\pi)^3}\frac{1}{i}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\Big[\frac{e^{-i|\boldsymbol{k}|x_0}(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}-e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})}{1-e^{-\beta|\boldsymbol{k}|}}\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}-\frac{e^{i|\boldsymbol{k}|x_0}(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}-e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})}{1-e^{\beta|\boldsymbol{k}|}}\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\Big]_0^\infty$$
$$-\frac{-2\pi}{2(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\frac{1}{i}\frac{e^{-ik_0x_0}}{1-e^{-\beta k_0}}(-i|\boldsymbol{x}|e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}-i|\boldsymbol{x}|e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})\epsilon(k_0)\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}(\delta(k_0-|\boldsymbol{k}|)+\delta(k_0+|\boldsymbol{k}|))$$
$$=\frac{-2\pi}{4(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{e^{-ik_0x_0}}{1-e^{-\beta k_0}}(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}+e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})\epsilon(k_0)\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}(\delta(k_0-|\boldsymbol{k}|)+\delta(k_0+|\boldsymbol{k}|))$$
$$=\frac{-1}{16\pi^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}(\frac{e^{-i|\boldsymbol{k}|x_0}}{1-e^{-\beta|\boldsymbol{k}|}}-\frac{e^{i|\boldsymbol{k}|x_0}}{1-e^{\beta|\boldsymbol{k}|}})(e^{-i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|}+e^{i|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{x}|})$$

このようなのがあります。デルタ関数は直接微分せずに部分積分でなくしています。

いろいろと見てきましたが、他のところでも出てくる関係を並べておきます
・温度グリーン関数 G_β のスペクトル関数 ρ による表現

$$G_\beta(\omega_n,\boldsymbol{k})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(k_0,\boldsymbol{k})}{i\omega_n-k_0}dk_0$$

・遅延、先進グリーン関数 G_R, G_A との関係

$$G_R(p_0,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(k_0,\boldsymbol{k})}{p_0-k_0+i\epsilon}dk_0=G_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0+i\epsilon}$$
$$G_A(p_0,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(k_0,\boldsymbol{k})}{p_0-k_0-i\epsilon}dk_0=G_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0-i\epsilon}$$

遅延、先進グリーン関数の定義は

$$G_R(x,y) = i\theta(x_0 - y_0)(G^{>}(x,y) \mp G^{<}(x,y))$$

$$G_A(x,y) = -i\theta(y_0 - x_0)(G^{>}(x,y) \mp G^{<}(x,y))$$

ボソンがマイナス、フェルミオンがプラスで、フェルミオン場に対して $G^{>}(x,y) = \langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle_\beta, G^{<}(x,y) = \langle\overline{\psi}(y)\psi(x)\rangle_\beta$ としています (ボソン場では ψ が ϕ、$\overline{\psi}$ が $\phi^\dagger$)。

・スペクトル関数の関係

$$\rho(p_0, \boldsymbol{p}) = -i(G_R(p_0, \boldsymbol{p}) - G_A(p_0, \boldsymbol{p}))$$

・相互作用なしでのスペクトル関数 ($\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$, $\epsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0)$)

$$\text{ボソン：}\quad \rho_B(k_0, \boldsymbol{k}) = 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k_0^2 - \omega^2)$$

$$\text{フェルミオン：}\quad \rho_F(k_0, \boldsymbol{k}) = 2\pi\epsilon(k_0)(\not{k} + m)\delta(k_0^2 - \omega^2)$$

$$\text{光子：}\quad \rho^{\mu\nu}_{photon}(k_0, \boldsymbol{k}) = 2\pi\epsilon(k_0)\big(-g^{\mu\nu} - (\alpha - 1)k^\mu k^\nu \frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|^2}\big)\delta(k^2)$$

・温度グリーン関数の時間成分の変換 ($\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$)

- ボソン

$$G_\beta(\tau, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\omega}((1 + n_B(\omega))e^{-\omega\tau} + n_B(\omega)e^{\omega\tau})$$

$$n_B(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$$

- フェルミオン

$$S(\tau, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\omega}((1 - n_F(\omega))e^{-\omega\tau} - n_F(\omega)e^{\omega\tau})$$

$$n_F(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}$$