ファインマン則〜虚時間法〜

今までに虚時間法を使った時のファインマン則はユークリッド空間でのゼロ温度の場の理論と同じだと言ってきましたが、ここでまとめておきます。注意として、ここで言うファインマン則というのは分配関数によるものだということです。

ファインマン則について触れる前に、ユークリッド空間での話を少ししておきます。人による話ですが、有限温度の理論では完全にユークリッド空間へ移したものが絶対に必要というわけではないです。今までの話を見てみれば分かるように、有限温度の理論は、本質的には時間を虚時間に移し、温度に周期的条件を課すというものです。つまり、座標のみがユークリッド空間化されています。このため、「虚時間法〜ディラック場〜」(他にも「$\log Z$ の摂動計算〜QED〜」とか) で行ったように、ガンマ行列やベクトルポテンシャルの代数をミンコフスキー空間と同じにすることができます。しかし、この場合、ミンコフスキー空間とユークリッド空間の性質が混ざってしまうために、混乱してしまう可能性があります。実際、ディラック方程式の形が見づらいと言えば、見づらい格好をしてしまいます。これを回避したい人は、完全にユークリッド空間へ移してしまいます。ここら辺は趣味なので、自分に合った方法を選べばいいです。

ミンコフスキー空間からユークリッド空間への置き換えの基本は、4 元ベクトルの時間成分を

$$x_0 = t \;\Rightarrow\; -ix_4 = -i\tau$$

のように虚軸へ解析接続 (ウィック回転) することです。ミンコフスキー空間での内積

$$x_\mu x^\mu = x_0^2 + x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 \quad (\boldsymbol{x} = (x, y, z))$$

は

$$x_\mu x^\mu \;\Rightarrow\; -x_4^2 - \boldsymbol{x}^2$$

このように置き換わります。このとき、ユークリッド空間での内積を

$$\sum_{\mu=1}^{4} a_\mu^E b_\mu^E = a_4b_4 + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

と定義し、ユークリッド空間での計量がクロネッカーデルタ $\delta_{\mu\nu}$ だとします (E はユークリッド空間のベクトルであることを表わしています)。ユークリッド化された 4 元ベクトルは $a_\mu^E = (a_4, \boldsymbol{a})$ と定義し、ユークリッド空間でも和のシグマ記号は省いて書きますが、添え字は $1 \sim 4$ だとします。ユークリッド空間では計量がクロネッカーデルタなので、添え字の上付き下付きの区別がなくなります。この定義のもとで、ミンコフスキー空間とユークリッド空間の内積の関係は

$$x_\mu x^\mu = -x_\mu^E x_\mu^E$$

となっています。

この変換を作用において実行してみます。例えば実数スカラー場でのミンコフスキー空間での作用は

$$iS_M = i\int d^4x\mathcal{L}_M = i\int d^4x\frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi)^2 - m^2\phi^2]$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

M はミンコフスキー空間を表わしています。これをユークリッド化するには

$$id^4x = idx_0d^3x \ \Rightarrow \ d^4x_E = dx_4d^3x$$

$$(\partial_\mu\phi)^2 = (\frac{\partial\phi}{\partial x_0})^2 - (\nabla\phi)^2 \ \Rightarrow \ -\partial_\mu^E\phi\partial_\mu^E\phi = -((\frac{\partial\phi}{\partial x_4})^2 + (\nabla\phi)^2) \quad (\frac{\partial}{\partial x_0} = i\frac{\partial}{\partial x_4})$$

という置き換えをすればいいので

$$S_E = -\int d^4x_E\mathcal{L}_E = -\int d^4x_E\frac{1}{2}[(\partial_\mu^E\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}[(\partial_\mu^E\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

$$\Big((\partial_\mu^E\phi)^2 = (\frac{\partial\phi}{\partial x_4})^2 + (\nabla\phi)^2\Big)$$

この関係から、当たり前ですが、作用のミンコフスキー空間とユークリッド空間との関係は

$$S_E = iS_M(x_0 \ \Rightarrow \ -ix_4)$$

となっていることが分かります。スカラー場では時間成分の置き換えだけですむんですが、ディラック場やゲージ場では他の置き換えも必要になります。

ディラック場では 4 元ベクトルとして、座標だけでなくガンマ行列が出てくるので、ガンマ行列を変更する必要があります (「虚時間法〜ディラック場〜」ではミンコフスキー空間の代数を使いたかったので変更しませんでした)。ディラック場の作用は

$$S_M = i\int d^4x\mathcal{L}_M = i\int d^4x\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

$$\mathcal{L}_M = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

これの微分部分をユークリッド化すると

$$i\gamma^\mu\partial_\mu = i\big(\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\big) \ \Rightarrow \ i\big(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_4} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\big) = -\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_4} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla$$

となります。この段階ではまだユークリッド空間の内積の格好になっていないので、ガンマ行列を

$$\gamma_0 \ \Rightarrow \ \gamma_4 \ , \ \boldsymbol{\gamma} \ \Rightarrow \ i\boldsymbol{\gamma}$$

と置き換えます。そうすると

$$i\gamma^\mu \partial_\mu = i\big(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\big) \ \Rightarrow \ -\gamma^E_\mu \partial^E_\mu = -\big(\gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\big)$$

となり、ユークリッド空間の内積になります。このときガンマ行列は

$$\{\gamma^E_\mu, \gamma^E_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

という代数に従います。このことはミンコフスキー空間での代数

$$\{\gamma^M_\mu, \gamma^M_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

において、上の置き換えを行うことで空間成分が -1 倍されることから簡単に分かります。また、ミンコフスキー空間では γ_0 がエルミートで、γ_i は反エルミートでしたが、ユークリッド空間では全ての成分がエルミート $\gamma_\mu = \gamma^\dagger_\mu$ になります。

　この置き換えによって、ユークリッド空間でのディラック場の作用は

$$S_E = -\int d^4x \mathcal{L}_E = -\int d^4x \overline{\psi}(\gamma^E_\mu \partial^E_\mu + m)\psi$$

$$\mathcal{L}_E = \overline{\psi}(\gamma^E_\mu \partial^E_\mu + m)\psi$$

$$\Big(\gamma^E_\mu \partial^E_\mu = \gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\Big)$$

　ゲージ場の例として電磁場を使います (非可換ゲージ場では項が増えるだけで基本的に同じ)。ゲージ場が 4 元ベクトルを構成しているので、ゲージ場を変更します。ミンコフスキー空間でのゲージ固定項を含めた電磁場の作用は

$$iS_M = i\int d^4x\big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2\big)$$

ゴースト項は無視しています。このままだと見づらいので、$F_{\mu\nu}$ を展開します

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} =&(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
=&\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \\
=&2(\partial_0 A_0 \partial_0 A_0 + \partial_0 A_i \partial_0 A^i + \partial_i A_0 \partial^i A_0 + \partial_i A_j \partial^i A^j) \\
&- 2(\partial_0 A_0 \partial_0 A_0 + \partial_0 A_i \partial^i A_0 + \partial_i A_0 \partial_0 A^i + \partial_i A_j \partial^j A^i) \\
=&2(\partial_0 A_0 \partial_0 A_0 - (\partial_0 \boldsymbol{A})^2 - (\nabla A_0)^2 + \partial_i A_j \partial^i A^j) \\
&- 2(\partial_0 A_0 \partial_0 A_0 + (\partial_0 \boldsymbol{A}) \cdot (\nabla A_0) + (\nabla A_0) \cdot (\partial_0 \boldsymbol{A}) + \partial_i A_j \partial^j A^i)
\end{aligned}
$$

空間成分は $A_iA^i = -\boldsymbol{A}^2$, $\partial_i A^i = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$, $\partial_i \partial^i = -\nabla^2$ のように書いています。時間微分をユークリッド空間にもっていくと

$$
\begin{aligned}
&2\big(- \frac{\partial A_0}{\partial x_4}\frac{\partial A_0}{\partial x_4} + (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_4})^2 - (\nabla A_0)^2 + \partial_i A_j \partial^i A^j \big) \\
&- 2\big(- \frac{\partial A_0}{\partial x_4}\frac{\partial A_0}{\partial x_4} + i\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_4} \cdot \nabla A_0 + i\nabla A_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_4} + \partial_i A_j \partial^j A^i \big)
\end{aligned}
$$

このときに、$A_0 \;\Rightarrow\; -iA_4$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&2\big(\frac{\partial A_4}{\partial x_4}\frac{\partial A_4}{\partial x_4} + (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_4})^2 + (\nabla A_4)^2 + \partial_i A_j \partial_i A_j \big) - 2\big(\frac{\partial A_4}{\partial x_4}\frac{\partial A_4}{\partial x_4} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_4} \cdot \nabla A_4 + \nabla A_4 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_4} + \partial_i A_j \partial_j A_i \big) \\
&= 2\partial^E_\mu A^E_\nu \partial^E_\mu A^E_\nu - 2\partial^E_\mu A^E_\nu \partial^E_\nu A^E_\mu \\
&= (\partial^E_\mu A^E_\nu - \partial^E_\nu A^E_\mu)(\partial^E_\mu A^E_\nu - \partial^E_\nu A^E_\mu) \\
&= F^E_{\mu\nu} F^E_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

となります。ゲージ固定項は

$$
(\partial^\mu A_\mu)^2 = (\partial_0 A_0 + \nabla \cdot \boldsymbol{A})^2 \;\Rightarrow\; (\partial^E_\mu A^E_\mu)^2 = \big(\frac{\partial A_4}{\partial x_4} + \nabla \cdot \boldsymbol{A}\big)^2
$$

となるだけなので、ユークリッド空間での作用は、ゲージ場の置き換え $A_0 \Rightarrow -iA_4$ を加えることで

$$
S_E = -\int d^4x_E \mathcal{L}_E = -\int d^4x_E \big(\frac{1}{4}F^E_{\mu\nu}F^E_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(\partial^E_\mu A^E_\mu)^2\big)
$$

$$
\mathcal{L}_E = \frac{1}{4}F^E_{\mu\nu}F^E_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(\partial^E_\mu A^E_\mu)^2
$$

ここでは「空洞放射」のときとは符号を反転して置き換えていますが、この符号でないとユークリッド空間の内積になりません。「空洞放射」では内積の性質を特に気にするような状況ではなかったというだけです。

ディラック場とゲージ場のユークリッド化に関して注意があります (特に複数の本を使って勉強するときに)。ここではガンマ行列の空間成分を変更しましたが、時間成分を変更する場合もあります。そのときは $i\gamma_0=\gamma_4$ とします。この場合では

$$i\gamma^\mu\partial_\mu \ \Rightarrow\ i\big(\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\big)$$

となります。一方で、ゲージ場では空間成分を変更するというのではなく、符号を反転させて定義します。つまり、$A_0=iA_4$ とします。この場合では、共変微分が変更されないという利点があります。ミンコフスキー空間での共変微分を

$$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu$$

と定義したとき、$A_0=-iA_4$ では

$$D_\mu=(\partial_0-igA_0,\partial_i-igA_i)\ \Rightarrow\ D^E_\mu=(i\partial_4-gA_4,\partial_i-igA_i)=(i(\partial_4+igA_4),\partial_i-igA_i)$$

$A_0=iA_4$ では

$$D_\mu=(\partial_0-igA_0,\partial_i-igA_i)\ \Rightarrow\ D^{E\prime}_\mu=(i\partial_4+gA_4,\partial_i-igA_i)=(i(\partial_4-igA_4),\partial_i-igA_i)$$

なので、$A_0=iA_4$ とすれば i がつきますが、D_0 の符号が変更されません。

最初に示した $\gamma^i=i\gamma^i, A_0=-iA_4$ での $i\gamma^\mu D_\mu$ は

$$\begin{aligned}i\gamma^\mu D_\mu&=i\gamma_0(\partial_0-igA_0)+i\gamma^i(\partial_i-igA_i)=i\gamma_0(\partial_0-igA_0)+i\boldsymbol{\gamma}\cdot(\nabla+ig\boldsymbol{A})\\&\Rightarrow\ i\gamma_4 i(\partial_4+igA_4)+ii\boldsymbol{\gamma}\cdot(\nabla+ig\boldsymbol{A})=-\gamma_4(\partial_4+igA_4)-\boldsymbol{\gamma}\cdot(\nabla+ig\boldsymbol{A})=-\gamma^E_\mu(\partial^E_\mu+igA^E_\mu)\end{aligned}$$

となり式の形が少し変わります。対して、$i\gamma_0=\gamma_4, A_0=iA_4$ とした場合では

$$i\gamma^\mu D_\mu\ \Rightarrow\ i(-i\gamma_4 i(\partial_4-igA_4)+\gamma^i D_i)=i(\gamma_4(\partial_4-igA_4)+\gamma^i D_i)=i\gamma^E_\mu D^{E\prime}_\mu$$

となって、式の形が変わりません。このことから分かるように、ガンマ行列とゲージ場のユークリッド化の定義をこのようにすれば単純な置き換えでユークリッド空間に変更できます (どちらにしろ符号を変更すればいいだけですが)。ただ、この場合では有限温度との対応を取るには若干不便です。

求められた状況をまとめておきます。実数スカラー場、ディラック場、電磁場それぞれのユークリッド空間での作用は

- 実数スカラー場 ($x_0\ \Rightarrow\ -ix_4$)

$$S_E=-\int d^4x_E\mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}[(\partial_\mu^E \phi)^2 + m^2\phi^2] \quad , \quad (\partial_\mu^E \phi)^2 = (\frac{\partial \phi}{\partial x_4})^2 + (\nabla \phi)^2$$

- ディラック場 ($x_0 \ \Rightarrow \ -ix_4$, $\gamma_0 \ \Rightarrow \ \gamma_4$, $\boldsymbol{\gamma} \ \Rightarrow \ i\boldsymbol{\gamma}$)

$$S_E = -\int d^4x \mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \overline{\psi}(\gamma_\mu^E \partial_\mu^E + m)\psi \quad , \quad \gamma_\mu^E \partial_\mu^E = \gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla$$

- 電磁場 ($x_0 \ \Rightarrow \ -ix_4$, $A_0 \ \Rightarrow \ -iA_4$)

$$S_E = -\int d^4x_E \mathcal{L}_E$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^E F_{\mu\nu}^E + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu^E A_\mu^E)^2 \quad , \quad \partial_\mu^E A_\mu^E = \frac{\partial A_4}{\partial x_4} + \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

作用の段階での話はこれで終わりにします。後はこれを経路積分

$$Z_E = \int \mathcal{D}\phi \exp[S_E] = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[-\int d^4x_E \mathcal{L}_E\Big]$$

$$\Big(Z_M = \int \mathcal{D}\phi \exp[iS_M]\Big)$$

に乗せて、ゼロ温度と同じように計算していくことで、ファインマン則は求まります。

表記上の注意をしておきます。ここではユークリッド空間での作用を $-\mathcal{L}_E$ の 4 次元積分として定義していますが、通常の作用の定義はラグランジアン密度の 4 次元積分です。しかし、ここではミンコフスキー空間からの置き換えを見やすくするために、マイナスがついた定義をそのまま使いました。なので、作用の通常の定義を使うために、マイナスを外すように作用を定義して

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp[-S_E]$$

$$S_E = \int d^4x_E \mathcal{L}_E$$

のようにしている場合の方が多いと思います (この場合では $S_E = -S_M(x_0 = -ix_4)$)。

次に、ミンコフスキー空間からユークリッド空間へうつされた時のファインマン則を先に示しておきます。まともにやるのは面倒だし、なんとなく予想できると思うので結果だけを示します。伝播関数、頂点は場の量子論で定義しているものを指します (伝播関数の定義に i を含める)。

- 伝播関数

  手続きは、ミンコフスキー空間での運動量 $p_\mu = (p_0, \boldsymbol{p})$ をユークリッド化 $p_4 = -ip_0$ して、i を取って符号を反転させるだけです (ゲージ場も同様)。例えばボソンでは

$$\frac{i}{p^2 - m^2} = \frac{i}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} \ \Rightarrow \ \frac{-1}{-p_4^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} = \frac{1}{p_4^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

- 頂点

  単純に i で割ればいいだけで

$$-ig \ \Rightarrow \ -g$$

- ループ積分

  ミンコフスキー空間での 4 次元積分をユークリッド空間へ移せばいいだけなので

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \ \Rightarrow \ \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4}$$

  E はユークリッドを表わします。

ユークリッド空間に移すと i が減るというのは、ユークリッド化することで経路積分の作用に掛かっていた i がなくなることから予想できる結果だと思います。

また、n 点相関関数では

$$G^{(n)}(p_1, \cdots p_n) \ \Rightarrow \ i(-i)^n G_E^{(n)}(p_{E1}, \cdots p_{En})$$

となります。

次に有限温度へ移します。といってもこれも簡単にすみます。まず、伝播関数において、p_4 を松原振動数 ω_n に変えればいいです。頂点は何も変更されませんが、細かいことを言うと運動量保存の部分が

$$\delta^4(p - k) \ \Rightarrow \ \beta \delta_{n,m} \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})$$

のように変更されます。そして、ループ積分は時間成分の積分を和に変えて T をつければいいだけです。
というわけで、有限温度での場合をまとめると

- 伝播関数

  - ボソン

$$\frac{1}{\omega_n^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2} = \frac{-1}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} \qquad (p_0 = i\omega_n \ , \ \omega_n = 2\pi nT)$$

○ 光子

$$\frac{1}{p^2}\left(g_{\mu\nu}+(\alpha-1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\quad (p_0=i\omega_n\ ,\ \omega_n=2\pi nT)$$

○ 電子

$$\frac{-1}{i\omega_n\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}=\frac{-1}{p_0\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m}\quad (p_0=i\omega_n\ ,\ \omega_n=2\pi T(n+\frac{1}{2}))$$

- 頂点

ゼロ温度の場合から i を取る (例えば $ig\ \Rightarrow\ g$)　(運動量保存：$(2\pi)^3\beta\delta_{n,m}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})$)

- ループ積分

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

これが有限温度 (虚時間法) のファインマン則になります。また、ゲージ場での伝播関数も同様の手続きで有限温度まで持っていけます。

また、ミンコフスキー空間でのゼロ温度の場合と比較をすれば、伝播関数、運動量保存 (頂点)、ループ積分は

$$G(p)\ \Rightarrow\ G(p_0=i\omega_n,\boldsymbol{p})$$

$$i(2\pi)^4\delta^4(p-k)\ \Rightarrow\ (2\pi)^3\beta\delta_{n,m}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})$$

$$\frac{1}{i}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \Rightarrow\ T\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

という置き換えをすることでも、有限温度へ移されることが分かりますが、基本的には上で示したファインマン則を使うことにします。