

分散関係

光子と電子の自己エネルギーの HTL 近似の結果を使って分散関係 (dispersion relation) を求めます。分散関係は一般的に遅延グリーン関数の極として求められます。そのことを最初に簡単に見ておきます。

分散関係が遅延グリーン関数から求められることを見ていきます。そのために「線形応答理論」で示した関係

$$\delta\langle\phi(t, \mathbf{x})\rangle = - \int d^4x_1 D_R(t, \mathbf{x}; t_1, \mathbf{x}_1) J(t_1, \mathbf{x}_1)$$

を使います。ここで外場 $J(t, \mathbf{x})$ の形を

$$J(t, \mathbf{x}) = \delta(t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} J_0(\mathbf{p})$$

とします。これは系にパルス的な影響を与える摂動となります (デルタ関数があるから)。これを使うことで

$$\begin{aligned} \delta\langle\phi(t, \mathbf{x})\rangle &= - \int d^4x_1 D_R(t, \mathbf{x}; t_1, \mathbf{x}_1) J(t_1, \mathbf{x}_1) \\ &= - \int d^4x_1 D_R(t, \mathbf{x}; t_1, \mathbf{x}_1) \delta(t_1) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_1} J_0(\mathbf{q}) \\ &= - \int d^4x_1 \delta(t_1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x_1)} D_R(p_0, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_1} J_0(\mathbf{q}) \\ &= - \int d^4x_1 \delta(t_1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}_1} e^{-ip_0(t-t_1)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} D_R(p_0, \mathbf{p}) J_0(\mathbf{q}) \\ &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{p}) e^{-ip_0(t-t_1)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} D_R(p_0, \mathbf{p}) J_0(\mathbf{q}) \\ &= - \int \frac{dp_0}{(2\pi)} e^{-ip_0 t} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} D_R(p_0, \mathbf{q}) J_0(\mathbf{q}) \\ &= - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} J_0(\mathbf{q}) \int \frac{dq_0}{(2\pi)} e^{-iq_0 t} D_R(q_0, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

そして、遅延グリーン関数 $D_R(q_0, \mathbf{q})$ なんですが、 $q_0 = \omega(\mathbf{q}) - i\gamma(\mathbf{q})$ ($\gamma(\mathbf{p}) \geq 0$) で留数 $R(q_0, \mathbf{q})$ となる極を持つと仮定して近似的に

$$D_R(q_0, \mathbf{q}) \simeq \frac{iR(q_0, \mathbf{q})}{q_0 - \omega(\mathbf{q}) + i\gamma(\mathbf{q})}$$

とします。関数 $F(z)$ に対する留数 a は、 a が

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) F(z) = a$$

によって有限に求められるときです。また、積分による

$$e^{-iq_0 t} D_R(q_0, \mathbf{q})$$

部分が

$$\exp[-iq_0 t] = \exp[-i(\text{Re}q_0 + i\text{Im}q_0)t]$$

としたとき、 $\text{Im}q_0 < 0$ で急激に減少するために、実軸で極付近という制限がかかっています。これを入れることで

$$\begin{aligned} \delta\langle\phi(t, \mathbf{x})\rangle &= -e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} J_0(\mathbf{q}) \int \frac{dq_0}{(2\pi)} e^{-iq_0 t} \frac{iR(q_0, \mathbf{q})}{q_0 - \omega(\mathbf{q}) + i\gamma(\mathbf{q})} \\ &= -J_0(\mathbf{q}) R(q_0 = \omega(\mathbf{q}) - i\gamma(\mathbf{q}), \mathbf{q}) e^{-i(\omega(\mathbf{q}) - i\gamma(\mathbf{q}))t} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= -J_0(\mathbf{q}) R(\mathbf{q}) e^{i(-\omega(\mathbf{q})t + \mathbf{q}\cdot\mathbf{x})} e^{-\gamma(\mathbf{q})t} \end{aligned}$$

留数定理によって積分を実行しています (下半円によって極 $q_0 = \omega(\mathbf{q}) - i\gamma(\mathbf{q})$ を拾っています)。 $\delta\langle\phi(t, \mathbf{x})\rangle$ は外場の影響による変化を表わすので、部分から外場に対する応答は進行波 (traveling wave) として出てきていると考えられ、この進行波は分散関係 $\omega(\mathbf{q})$ と減衰率 $\gamma(\mathbf{q})$ を持っていることになります。ここで知りたいことは線形応答に関する細かい話ではなくて、分散関係 $\omega(\mathbf{q})$ と減衰率 $\gamma(\mathbf{q})$ が遅延グリーン関数の極として求められるという点なので、この話はここで終わりにします。

このことを光子の伝播関数に適用させて、光子に対する分散関係を求めます。光子の場合、縦波成分と横波成分があるので分けて考えます。

有限温度での光子の伝播関数 (温度グリーン関数) は

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{G - k^2} P_{\mu\nu}^T + \frac{1}{F - k^2} P_{\mu\nu}^L + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

と書けて、これを $k_0 = k'_0 + i\epsilon$ と解析接続すれば、遅延グリーン関数になるので、横波成分の極は

$$k^2 - G = 0$$

$$k_0^2 = |\mathbf{k}|^2 + G(k_0, \mathbf{k})$$

で求められます。で、 $k_0 = \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k})$ なので

$$k_0^2 = \omega^2(\mathbf{k}) - \gamma^2(\mathbf{k}) - 2i\omega(\mathbf{k})\gamma(\mathbf{k})$$

減衰率 $\gamma(\mathbf{k})$ は $\omega(\mathbf{k})$ に比べて小さいと仮定し、 $\gamma^2(\mathbf{k})$ を無視すれば、実部と虚部に分けることで

$$\omega_T^2(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2 + \text{Re}G(k_0 = \omega_T(\mathbf{k}), \mathbf{k})$$

$$\gamma_T(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} \text{Im}G(k_0 = \omega_T(\mathbf{k}), \mathbf{k})$$

ここでの添え字の T は横波成分であることを表わしています。 G に虚部がなければ減衰率は 0 になるということが、この式から分かります。しかし、「光子の自己エネルギー」では触れませんでした。光子の自己エネルギーにはちゃんと虚部が存在しています。

G は HTL 近似より

$$G = \frac{e^2 T^2}{6} \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0^2}{|\mathbf{k}|^2} \right) \log \frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} + \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} \right]$$

として求められていて、 $k_0 < |\mathbf{k}|$ 、つまり、 k^2 が空間的であるとき対数部分は複素数になります（「電子の自己エネルギー」と同じです）。対数 $\log z$ は、 $z = -x$ (x は $x > 0$ の実数) のとき

$$\log z = \log |z| + i\pi$$

と表わすことが出来るので

$$\log(k_0 - |\mathbf{k}|) = \log |k_0 - |\mathbf{k}|| + i\pi \quad (k^2 < 0)$$

このようにして虚部が現われます (k_0 と $|\mathbf{k}|$ は実数)。なので、減衰率は出てきます。ただし、 ω_T において、 $\omega_T > |\mathbf{k}|$ という性質があるために、結局横波成分においては減衰率は 0 になります。

ここでは分散関係を扱うので、減衰率のことは無視します。ちなみに、ゲージ場の自己エネルギーに現われる虚部は、プラズマ物理でランダウ減衰 (Landau damping) と呼ばれる現象と同じものを起こします。

縦成分に対しても同様にすれば分散関係は

$$\omega_L^2(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2 + \text{Re}F(k_0 = \omega_T(\mathbf{k}), \mathbf{k})$$

となります。

横波と縦波の分散関係の式に「光子の自己エネルギー」の結果を入れれば

$$\omega_T^2 = |\mathbf{k}|^2 + m_b^2 \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_T^2}{|\mathbf{k}|^2} \right) \log \left| \frac{\omega_T + |\mathbf{k}|}{\omega_T - |\mathbf{k}|} \right| + \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \right]$$

$$\omega_L^2 = |\mathbf{k}|^2 - 2m_b^2 \frac{\omega_L^2 - |\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}|^2} \left(1 - \frac{\omega_L}{2|\mathbf{k}|} \log \left| \frac{\omega_L + |\mathbf{k}|}{\omega_L - |\mathbf{k}|} \right| \right)$$

$$\left(m_b^2 = \frac{e^2 T^2}{6} \right)$$

これが解ければ分散関係は求まります。しかし、厳密に解くことはできません。なので、適当な極限を取ってみます。分散関係 $\omega_{T,L}(k)$ は $|\mathbf{k}|$ による変化をみるので、 $|\mathbf{k}|$ が大きい場合と小さい場合を考えます。

まず $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ の場合を考えます。対数部分の展開は

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

を使って、 $|\mathbf{k}|^2$ まで捨てるようにして

$$\begin{aligned}
\omega_T^2 &= |\mathbf{k}|^2 + m_b^2 \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_T^2}{|\mathbf{k}|^2} \right) \log \left| \frac{\omega_T + |\mathbf{k}|}{\omega_T - |\mathbf{k}|} \right| + \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \right] \\
&= |\mathbf{k}|^2 + m_b^2 \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \left[\left(1 - \frac{\omega_T^2}{|\mathbf{k}|^2} \right) \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_T} + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{k}|^3}{\omega_T^3} + \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^5}{\omega_T^5} \right) + \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \right] \\
&= |\mathbf{k}|^2 + m_b^2 \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_T} + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{k}|^3}{\omega_T^3} - \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_T} - \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^3}{\omega_T^3} \right) \\
&= |\mathbf{k}|^2 + m_b^2 \frac{\omega_T}{|\mathbf{k}|} \left(\frac{2}{3} \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_T} + \frac{2}{15} \frac{|\mathbf{k}|^3}{\omega_T^3} \right) \\
&= \frac{2}{3} m_b^2 + \frac{2}{15} m_b^2 \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} + |\mathbf{k}|^2 \\
&= \frac{2}{3} m_b^2 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} \right) + |\mathbf{k}|^2 \\
\omega_T^2 \left(1 - \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} \right) &= \frac{2}{3} m_b^2 + |\mathbf{k}|^2 \left(1 - \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} \right) \\
\omega_T^2 &= \frac{2}{3} m_b^2 + \frac{6}{5} |\mathbf{k}|^2 \\
&= m_P^2 + \frac{6}{5} |\mathbf{k}|^2 \quad \left(m_P^2 = \frac{2}{3} m_b^2 = \frac{e^2 T^2}{9} \right)
\end{aligned}$$

同様にしていけば ω_L^2 は

$$\begin{aligned}
\omega_L^2 &= |\mathbf{k}|^2 - 2m_b^2 \frac{\omega_L^2 - |\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}|^2} \left(1 - \frac{\omega_L}{2|\mathbf{k}|} \log \left| \frac{\omega_L + |\mathbf{k}|}{\omega_L - |\mathbf{k}|} \right| \right) \\
&= |\mathbf{k}|^2 - 2m_b^2 \frac{\omega_L^2 - |\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}|^2} \left(1 - \frac{\omega_L}{|\mathbf{k}|} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_T} + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{k}|^3}{\omega_T^3} + \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^5}{\omega_T^5} \right) \right) \\
&= |\mathbf{k}|^2 - 2m_b^2 \frac{\omega_L^2 - |\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}|^2} \left(1 - 1 - \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} - \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^4}{\omega_T^4} \right) \\
&= |\mathbf{k}|^2 + 2m_b^2 (\omega_L^2 - |\mathbf{k}|^2) \left(\frac{1}{3} \frac{1}{\omega_T^2} + \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^4} \right) \\
&= |\mathbf{k}|^2 + 2m_b^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} - \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} \right) \\
&= |\mathbf{k}|^2 + \frac{2}{3} m_b^2 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} \right) \\
\omega_L^2 \left(1 + \frac{2}{5} \frac{|\mathbf{k}|^2}{\omega_T^2} \right) &= \frac{2}{3} m_b^2 + |\mathbf{k}|^2 \\
\omega_L^2 &= m_P^2 + \frac{3}{5} |\mathbf{k}|^2
\end{aligned}$$

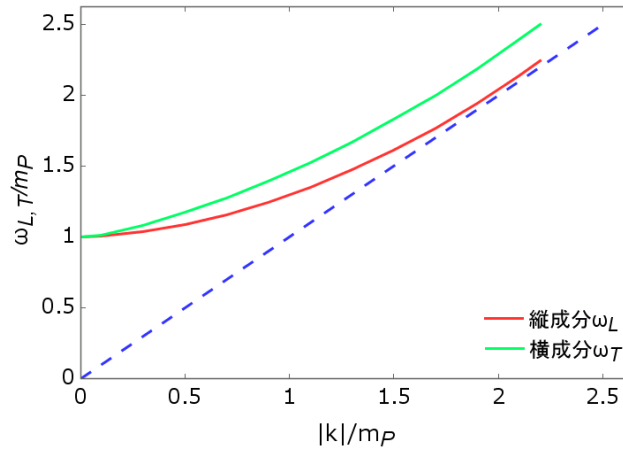
となります。特に、 $|\mathbf{k}| = 0$ で $\omega_T = \omega_L = m_P$ なので、横成分と縦成分が一致することが分かります。
次に $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ の場合ですが、この場合は単純に

$$\omega_T^2 = |\mathbf{k}|^2$$

$$\omega_L^2 = |\mathbf{k}|^2$$

これで十分です。もう一段近似をよくすることもできますが、それは省略します。数値計算を用いて近似なしに解いた結果からは、 ω_T では ω_L に比べて $\omega_T = |\mathbf{k}|$ に近づくのが遅いことが分かります。これは近似を上げることで分かることですが、 ω_T は $\omega_T^2 = |\mathbf{k}|^2 + m_b^2$ となっているために、 $|\mathbf{k}|^2 \gg m_b^2$ でないと $\omega_T = |\mathbf{k}|$ と近似しきれないからです (HTL 近似を取っていることを踏まえると、 $|\mathbf{k}|$ の大きさは $eT \ll |\mathbf{k}| < T$ の範囲だと考えられる)。

数値的に求めた結果を載せておきます。 $\omega_{T,L}, |\mathbf{k}|$ は m_P によって規格化しています。



点線は $\omega_{T,L} = |\mathbf{k}|$ の線を表わしています。見て分かるように、 $|\mathbf{k}|$ の極限を取った時の結果と一致しています。 ω_T に関しては上で言った近似の結果と同じで、 $\omega_T = |\mathbf{k}|$ には ω_L ほど近づきません。

次に電子の自己エネルギーの場合も求めてやります。電子の場合では、今度は横縦成分がない代わりに、plasmino があります。

電子の遅延グリーン関数の極は、「電子の自己エネルギー」ですすでに求めています

$$0 = A_0 \pm A_S p_0 \pm |\mathbf{p}| - \frac{m_f^2}{|\mathbf{p}|} \left[\left(1 \pm \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}\right) Q\left(\frac{p_0}{|\mathbf{p}|}\right) \mp 1 \right]$$

$$\left(Q\left(\frac{p_0}{|\mathbf{p}|}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{p_0 + |\mathbf{p}|}{p_0 - |\mathbf{p}|}, m_f^2 = \frac{e^2 T^2}{8} \right)$$

これが0になるときの p_0 が $\omega_{\pm}(\mathbf{p})$ となります。なので、これを計算してやればいいです。ここでも厳密に解けないので、近似を取ります。 $A_0 - A_S$ のときが ω_+ で、 $A_0 + A_S$ のときが ω_- です (正エネルギーの方だけを見ます)。

$|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ の場合は、 $|\mathbf{p}|$ の一次までを拾うようにして

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_{\mp} \pm |\mathbf{p}| - \frac{m_f^2}{|\mathbf{p}|} \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\omega_{\mp}}{|\mathbf{p}|} \right) \log \frac{\omega_{\mp} + |\mathbf{p}|}{\omega_{\mp} - |\mathbf{p}|} \mp 1 \right] \\
&= \omega_{\mp} \pm |\mathbf{p}| - \frac{m_f^2}{|\mathbf{p}|} \left[\left(1 \pm \frac{\omega_{\mp}}{|\mathbf{p}|} \right) \left(\frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mp}} + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^3}{\omega_{\mp}^3} \right) \mp 1 \right] \\
&= \omega_{\mp} \pm |\mathbf{p}| - \frac{m_f^2}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mp}} \pm 1 + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^3}{\omega_{\mp}^3} \pm \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^2}{\omega_{\mp}^2} \mp 1 \right) \\
&= \omega_{\mp} \pm |\mathbf{p}| - \frac{m_f^2}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mp}} \pm \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^2}{\omega_{\mp}^2} + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^3}{\omega_{\mp}^3} \right) \\
&= \omega_{\mp} \pm |\mathbf{p}| - \frac{m_f^2}{\omega_{\mp}} \mp \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}| m_f^2}{\omega_{\mp}^2} - \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^2 m_f^2}{\omega_{\mp}^3} \\
\omega_{\mp} &= \mp |\mathbf{p}| + \frac{m_f^2}{\omega_{\mp}} \pm \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}| m_f^2}{\omega_{\mp}^2} + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^2 m_f^2}{\omega_{\mp}^3} \\
&= \mp |\mathbf{p}| + \frac{m_f^2}{\omega_{\mp}} \left(1 \pm \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mp}} + \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^2}{\omega_{\mp}^2} \right) \\
\omega_{\mp} \left(1 \mp \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|}{\omega_{\mp}} - \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{p}|^2}{\omega_{\mp}^2} \right) &= \mp |\mathbf{p}| + \frac{m_f^2}{\omega_{\mp}} \\
\omega_{\mp} &= \mp |\mathbf{p}| \pm \frac{1}{3} |\mathbf{p}| + \frac{m_f^2}{\omega_{\mp}} \\
&= \mp \frac{2}{3} |\mathbf{p}| + \frac{m_f^2}{\omega_{\mp}} \\
\omega_{\mp}^2 \pm \frac{2}{3} |\mathbf{p}| \omega_{\mp} - m_f^2 &= 0
\end{aligned}$$

解の公式を使うことで

$$\omega_{\mp} = \frac{\mp \frac{2}{3} |\mathbf{p}| + \sqrt{\frac{4}{9} |\mathbf{p}|^2 + 4 m_f^2}}{2} = m_f \mp \frac{1}{3} |\mathbf{p}|$$

解の公式においてルートの前の符号は±ですが、プラスの方の解（正エネルギー解）だけを取り出せばいいということでプラスだけにしています。電子の場合でも、 $|\mathbf{p}| = 0$ で $\omega_+(0) = \omega_-(0)$ となっています。これはヘリシティが $|\mathbf{p}| = 0$ では定義できないことを考えれば、当然の結果です。

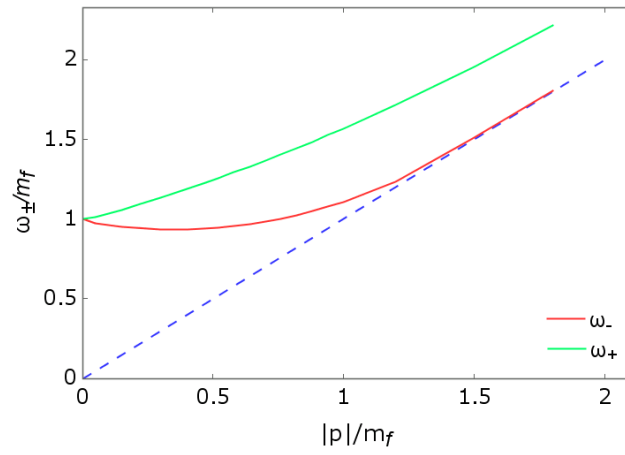
$\omega_- = m_f - |\mathbf{p}|/3$ となっていることから、plasmino に対する一つの解釈が出てきます。それは、 $m_f = 0$ のとき、負のエネルギー状態に対応していることから、plasmino の起源は負エネルギー状態にあるというものです。つまり、ゼロ温度の負エネルギー $-|\mathbf{p}|$ の状態から、正エネルギーの状態 ω_- へ移行したという考えです。

$|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ は光子の場合と同じように、大雑把には

$$\omega_{\pm} = |\mathbf{p}|$$

と近似できます。電子の場合では ω_+ の方が ω_- に比べて $|\mathbf{p}|$ にあまり近づきません。これも光子の場合と同じで、近似を上げた時に $\omega_+ = |\mathbf{p}| + m_f^2/|\mathbf{p}|$ のような格好をするためです。

電子の場合での数値的な結果を載せておきます。



ω_{\pm} と $|p|$ は m_f によって規格化しています。これも $|p|$ の極限に対する振る舞いを再現しています。