有限密度でのフェルミオン

フェルミオンを使うときには粒子数が重要になってくることが多いので、有限密度に拡張したときの関係を見ていきます。経路積分表示での定式化は「虚時間法〜ディラック場〜」で見たように通常の経路積分と同じようにできるので飛ばします。
前半は性質について見ていきますが、後半は和の計算をしているだけです。

密度ありでの分配関数 (大分配関数) は、「虚時間法〜ディラック場〜」の最初に触れたように

$$Z = \mathrm{tr}e^{-\beta K} \quad (K = H - \mu N))$$

これは単純に経路積分の形式では

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi\frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi,\phi) + \mu\mathcal{N}(\pi,\phi)\right)\right] \quad (1)$$

$$N = \int d^3x\mathcal{N}$$

となっていることを意味します。N は粒子数演算子で、ネーターカレント J_μ の保存量 J_0 に相当します。ディラック場では

$$\begin{aligned}
Z = & \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \ \left(\overline{\psi}(\tau,\boldsymbol{x})(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m + \gamma_0\mu)\psi(\tau,\boldsymbol{x})\right)\right] \\
= & \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \ \left(\overline{\psi}(\tau,\boldsymbol{x})(-\gamma_0(\frac{\partial}{\partial\tau} - \mu) + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi(\tau,\boldsymbol{x})\right)\right] \quad (2)
\end{aligned}$$

場の周期的条件は

$$\psi(\tau,\boldsymbol{x}) = -\psi(\tau-\beta,\boldsymbol{x})$$

なので、場のフーリエ変換

$$\psi(\tau,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\psi_n(\boldsymbol{p})e^{-i\omega_n\tau + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad (\omega_n = 2\pi T(n+\frac{1}{2}))$$

によって exp 部分は

$$-\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\overline{\psi}_n(\boldsymbol{p})(-(i\omega_n+\mu)\gamma_0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)\psi_n(\boldsymbol{p}) \quad (3)$$

となっています。これより、密度ありでのフェルミオンの温度グリーン関数は

$$S_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p}) = \frac{-1}{(i\omega_n+\mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m}$$

これは密度なしの場合から $i\omega_n \to i\omega_n + \mu$ と置き換えられただけです。なので、摂動展開は単純にフェルミオンの温度グリーン関数を $p_0 = i\omega_n + \mu$ に置き換えればいいだけになります。

有限温度・密度でのグリーン関数の関係を調べていきます。そのために実時間に変更して演算子形式に移ります。実時間での 2 点関数を

$$S^>_{ab}(x,y) = \langle\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)\rangle_\beta \ , \ S^<_{ab}(x,y) = -\langle\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)\rangle_\beta$$

と定義します。a, b はスピノール成分です。当然ここでの熱平均は μ を含んだ分配関数によるものです。場 $\psi(x)$ の時間発展はハミルトニアン単体でなく

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = e^{iKt}\psi(t=0,\boldsymbol{x})e^{-iKt} \quad (K = H - \mu N)$$

で表現します (「有限密度でのフェルミオン～別形式～」も見てください)。久保-Martin-Schwinger の関係は

$$\begin{aligned}
S^>(t) &= Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta K}\psi(t)\overline{\psi}(0)) \\
&= Z^{-1}\mathrm{tr}(\overline{\psi}(0)e^{-\beta K}\psi(t)e^{\beta K}e^{-\beta K}) \\
&= Z^{-1}\mathrm{tr}(\overline{\psi}(0)e^{iK(i\beta)}\psi(t)e^{-iK(i\beta)}e^{-\beta K}) \\
&= Z^{-1}\mathrm{tr}(\overline{\psi}(0)\psi(t+i\beta)e^{-\beta K}) \\
&= -S^<(t+i\beta)
\end{aligned}$$

このように化学ポテンシャルなしと同じ反周期性を持ちます。運動量表示では

$$\begin{aligned}
S^>(p_0) = \int dte^{ip_0t}S^>(t) &= -\int dte^{ip_0t}S^<(t+i\beta) \\
&= -\int dte^{ip_0t}S^<(t+i\beta) \\
&= -\int dte^{ip_0t}e^{p_0\beta}e^{-p_0\beta}S^<(t+i\beta) \\
&= -e^{p_0\beta}\int dte^{ip_0(t+i\beta)}S^<(t+i\beta) \\
&= -e^{\beta p_0}S^<(p_0)
\end{aligned}$$

となって、これも化学ポテンシャルなしと同じです。よってスペクトル関数を

$$\rho(p_0) = S^>(p_0) - S^<(p_0)$$

と定義すれば

$$S^>(p_0) = (1 - n_F(p_0))\rho(p_0) \ , \ S^<(p_0) = n_F(p_0)\rho(p_0)$$

フェルミオンの分布関数 $n_F(p_0)$ は

$$n_F(p_0)=\frac{1}{e^{\beta p_0}+1}$$

という化学ポテンシャルなしのものです。化学ポテンシャルが入っている場合での分布関数は

$$n_F^+(p_0)=n_F(p_0+\mu)=\frac{1}{e^{\beta(p_0+\mu)}+1}\ ,\ n_F^-(p_0)=n_F(p_0-\mu)=\frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1}$$

と書くことにします。おそらく $\pm$ 符号の対応の仕方をこのように書いているのはあまりないと思います (大抵は粒子の方をプラス、反粒子の方をマイナスにしているので、逆になっています)。しかし、計算途中でいちいち対応する符号が反転していると考えるのも面倒なので、このように定義してしまいます。

密度ありでのスペクトル関数がどうなっているのかを調べます。$S^>(t)$ は固有値によって展開すると

$$\begin{aligned}
S^>(t)&=Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta K}\psi(t)\overline{\psi}(0))\\
&=Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta K}e^{iKt}\psi(0)e^{-iKt}\overline{\psi}(0))\\
&=Z^{-1}\sum_{n,m}<n|e^{-\beta K_n}e^{iK_nt}\psi e^{-iK_mt}|m><m|\overline{\psi}|n>\\
&=Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta K_n}e^{i(K_n-K_m)t}|<n|\psi|m>|^2\qquad(|<n|\psi|m>|^2=<n|\psi|m><m|\overline{\psi}|n>)
\end{aligned}$$

簡単のために絶対値の形で書いていますが、ここでの $|\ |$ は $\overline{\psi}$ と ψ によるものです。なので、スピノール成分は潰れないですし (スピノール成分を書けば左辺は $S^>_{ab}$)、実数になるとは限らないです。K の演算子としての作用の仕方は

$$K|n>=K_n|n>=(E_n-\mu N_n)|n>$$

同様に $S^<(t)$ では

$$\begin{aligned}
S^<(t)&=-Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta K}\overline{\psi}(0)\psi(t))\\
&=-Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta K}\overline{\psi}(0)e^{iKt}\psi(0)e^{-iKt})\\
&=-Z^{-1}\sum_{n,m}<n|e^{-\beta K}\overline{\psi}(0)e^{iKt}|m><m|\psi e^{-iKt}|n>\\
&=-Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta K_n}e^{i(K_m-K_n)t}<n|\overline{\psi}|m><m|\psi|n>\\
&=-Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta K_m}e^{i(K_n-K_m)t}|<n|\psi|m>|^2
\end{aligned}$$

最後に n,m をひっくり返しています。ここでスペクトル関数

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= S^{>}(t) - S^{<}(t) \\
&= Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta K}\psi(t)\overline{\psi}(0)) - Z^{-1}\mathrm{tr}(e^{-\beta K}\overline{\psi}(0)\psi(t)) \\
&= Z^{-1}\mathrm{tr}[e^{-\beta K}(\psi(t)\overline{\psi}(0) - \overline{\psi}(0)\psi(t))] \\
&= Z^{-1}\mathrm{tr}[e^{-\beta K}\{\psi(t), \overline{\psi}(0)\}] \\
&= Z^{-1}\sum_n e^{-\beta K_n}\langle n|\{\psi(t), \overline{\psi}(0)\}|n\rangle
\end{aligned}
$$

を定義します。スペクトル関数のエルミート共役は

$$
\begin{aligned}
&(\psi_a(t)\overline{\psi}_b(0))^\dagger = (\psi_a(t)\psi_i^\dagger(0)(\gamma_0)_{ib})^\dagger = (\gamma_0\psi(0))_b\psi_a^\dagger(t) \\
&(\overline{\psi}_b(0)\psi_a(t))^\dagger = (\psi_i^\dagger(0)(\gamma_0)_{ib}\psi_a(t))^\dagger = \psi_a^\dagger(t)(\gamma_0\psi(0))_b
\end{aligned}
$$

これらから

$$
(\rho_{ab})^\dagger \sim \{\psi_a(t), \overline{\psi}_b(0)\}^\dagger = (\gamma_0\psi(0))_b\psi_a^\dagger(t) - \psi_a^\dagger(t)(\gamma_0\psi(0))_b
$$

「～」は反交換関係部分だけをとっていることを表しています。最右辺を γ_0 で挟むと

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_0)_{ib}(\gamma_0\psi(0))_b\psi_a^\dagger(t)(\gamma_0)_{aj} - (\gamma_0)_{ib}\psi_a^\dagger(t)(\gamma_0\psi(0))_b(\gamma_0)_{aj} \\
&\qquad = \psi_i(0)(\psi^\dagger(t)\gamma_0)_j - \psi_a^\dagger(t)(\gamma_0)_{aj}(\gamma_0\psi(0))_b(\gamma_0)_{ib} \\
&\qquad = \psi_i(0)(\psi^\dagger(t)\gamma_0)_j - (\psi^\dagger(t)\gamma_0)_j\psi(0)_i \\
&\qquad = \{\psi_i(0), \overline{\psi}_j(t)\}
\end{aligned}
$$

これは $\rho(-t)$ の反交換関係部分です。つまり、

$$
\gamma_0\rho^\dagger(t)\gamma_0 = \rho(-t)
$$

という関係になっていることが分かります。4 次元でも同じように成立し

$$
\gamma_0\rho^\dagger(x)\gamma_0 = \rho(-x) \tag{4}
$$

$S^{>}(t) - S^{<}(t)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
S^{>}(t) - S^{<}(t) &= Z^{-1}\sum_{n,m}(e^{-\beta K_n} + e^{-\beta K_m})e^{i(K_n-K_m)t}|<n|\psi|m>|^2 \\
&= Z^{-1}\sum_{n,m}e^{-\beta K_n}(1 + e^{\beta(K_n-K_m)})e^{i(K_n-K_m)t}|<n|\psi|m>|^2
\end{aligned}
$$

このとき、$|<n|\psi|m>|^2$ の部分は、$\overline{\psi}$ が生成演算子であることを踏まえれば、$N_m = N_n + 1$ でないと 0 になってしまいます。なので、$N_m - N_n = 1$ を使うことで K_n, K_m は

$$S^{>}(t) - S^{<}(t) = Z^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta K_n}(1+e^{\beta(E_n-E_m+\mu)})e^{i(E_n-E_m+\mu)t}|<n|\psi|m>|^2$$

となります。スペクトル関数は運動量表示では $\rho(p_0)=S^{>}(p_0)-S^{<}(p_0)$ と定義するので

$$\begin{aligned}\rho(p_0) &= Z^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta K_n}(1+e^{\beta(K_n-K_m)})|<n|\psi|m>|^2\int_{-\infty}^{\infty}dt\ e^{i(K_n-K_m)t}e^{ip_0t}\\ &= 2\pi Z^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta K_n}(1+e^{\beta(K_n-K_m)})|<n|\psi|m>|^2\delta(p_0+K_n-K_m) \qquad (5)\end{aligned}$$

となって、デルタ関数の中に化学ポテンシャルが入ってきます (3 次元成分は化学ポテンシャルなしと同じ)。スペクトル関数 $\rho(p)$ は実数だとは言えなく (表記的に絶対値と同じものを使っているだけ)、奇関数でもないです。そしてスピノール成分を持った行列です。

今度は遅延グリーン関数 S_R を見てみます。定義から

$$\begin{aligned}S_R(x,y) &= i\theta(x_0-y_0)(S^{>}(x,y)-S^{<}(x,y))\\ &= i\theta(x_0-y_0)Z^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta K_n}(1+e^{\beta(K_n-K_m)})e^{i(K_n-K_m)(x_0-y_0)}|<n|\psi|m>|^2\end{aligned}$$

$t=x_0-y_0$ として、をフーリエ変換してみると、階段関数から $t>0$ なので

$$S_R(p_0) = iZ^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta K_n}(1+e^{\beta(K_n-K_m)})|<n|\psi|m>|^2\int_0^{\infty}dt\ e^{i(K_n-K_m)t}e^{ip_0t}$$

これの積分は「有限温度でのグリーン関数」での場合と同じで収束因子 ϵ をつけて

$$\int_0^{\infty}dte^{i(p_0+K_n-K_m)t}e^{-\epsilon t} = \frac{1}{\epsilon - i(p_0+K_n-K_m)}$$

となります。よって、スペクトル関数を使うことで

$$\begin{aligned}S_R(p_0) &= iZ^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta K_n}(1+e^{\beta(K_n-K_m)})|<n|\psi|m>|^2\frac{1}{\epsilon - i(p_0+K_n-K_m)}\\ &= -Z^{-1}\sum_{n,m} e^{-\beta K_n}(1+e^{\beta(K_n-K_m)})|<n|\psi|m>|^2\frac{1}{p_0+K_n-K_m+i\epsilon}\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\rho(z)}{p_0-z+i\epsilon}\end{aligned}$$

となって、化学ポテンシャルなしと同じ式になります。4 次元では

$$S_R(p_0,\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z+i\epsilon}$$

となるだけです。化学ポテンシャルなしとの違いはスペクトル関数に押し込められています。

虚時間で行っても明らかに同じことになるので、フェルミオンの温度グリーン関数 S_β はスペクトル関数によって

$$S_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\rho(z,\boldsymbol{p})}{i\omega_n-z}$$

で与えられます。なので、

$$S_R(p_0,\boldsymbol{p})=S_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0+i\epsilon}$$

$$S_A(p_0,\boldsymbol{p})=S_\beta(i\omega_n,\boldsymbol{p})|_{i\omega_n=p_0-i\epsilon}$$

の関係を持っています。

遅延と先進はエルミート共役で繋げることができます。スペクトル関数の性質 (4) から

$$\begin{aligned}\rho(p)&=\int d^4x\rho(x)e^{ipx}\\ \rho^\dagger(p)&=\int d^4x\rho^\dagger(x)e^{-ipx}\\ &=\gamma_0\int d^4x\rho(-x)e^{-ipx}\gamma_0\\ &=\gamma_0\int d^4x\rho(x)e^{ipx}\gamma_0\\ &=\gamma_0\rho(p)\gamma_0\end{aligned}$$

となっているので、遅延グリーン関数のエルミート共役は

$$S_R^\dagger(p_0,\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\rho^\dagger(z,\boldsymbol{p})}{p_0-z-i\epsilon}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{\gamma_0\rho(z,\boldsymbol{p})\gamma_0}{p_0-z-i\epsilon}$$

よって、遅延と先進はエルミート共役によって

$$S_A(p_0,\boldsymbol{p})=\gamma_0S_R^\dagger(p_0,\boldsymbol{p})\gamma_0$$

という関係を持っています。ちなみに、この性質を使って $\rho(p)\gamma_0$ を変形して

$$\rho(p)\gamma_0=-i(S_R(p)-S_A(p))\gamma_0=-i(S_R-\gamma_0S_R^\dagger\gamma_0)\gamma_0=-i(S_R\gamma_0-\gamma_0S_R^\dagger)$$

エルミート共役を取ると

$$\begin{aligned}\gamma_0\rho^\dagger&=i(\gamma_0S_R^\dagger-S_R\gamma_0)\\ \rho\gamma_0&=-i(S_R\gamma_0-\gamma_0S_R^\dagger)\end{aligned}$$

となって、元に戻るので $\rho\gamma_0$ はエルミートです。なので、$\rho\gamma_0$ の固有値は実数であるために、スピノール成分に対するトレースを取れば

$$\rho'(p) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}[\rho(p)\gamma_0] > 0$$

となって正の値に制限されます (1/4 はスピノール成分による 4×4 行列に対応して出しているだけです)。

ちなみに、物性 (非相対論的な場合) でのフェルミオンのスペクトル関数ではガンマ行列が出てこないためにこんな面倒なことになっていなく、$\rho(p)$ がそのまま正の値になっています。

化学ポテンシャルありでの温度グリーン関数は、上で求めたように

$$S_\beta(i\omega_n, \boldsymbol{p}) = \frac{-1}{(i\omega_n + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m} = -\frac{(i\omega_n + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(i\omega_n + \mu)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 - m^2} = \frac{(i\omega_n + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(\omega_n^2 - i\mu)^2 + E^2}$$

これから遅延、先進グリーン関数に解析接続して、最低次のスペクトル関数を求めてみます。定義から

$$\begin{aligned}
\rho(p) =& -i(S_R(p) - S_A(p)) \\
=& -i(\frac{-1}{(p_0 + i\epsilon + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m} - \frac{-1}{(p_0 - i\epsilon + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m}) \\
=& -i(-\frac{(p_0 + \mu + i\epsilon)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(p_0 + \mu + i\epsilon)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 - m^2} + \frac{(p_0 + \mu - i\epsilon)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(p_0 + \mu - i\epsilon)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 - m^2}) \\
=& -i(-\frac{(p_0 + \mu + i\epsilon)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(p_0 + \mu)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 - m^2 + 2i(p_0 + \mu)\epsilon} + \frac{(p_0 + \mu - i\epsilon)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(p_0 + \mu)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 - m^2 - 2i(p_0 + \mu)\epsilon}) \\
=& -i(-\frac{(p_0 + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(p_0 + \mu)^2 - E^2 + i(p_0 + \mu)\epsilon} + \frac{(p_0 + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{(p_0 + \mu)^2 - E^2 - i(p_0 + \mu)\epsilon})
\end{aligned}$$

分母の形は $p'_0 = p_0 + \mu$ とすればボソンのときと同じなので「有限温度でのグリーン関数」での結果を流用して、$\theta(x)$ は階段関数とし

$$\begin{aligned}
\rho(p) =& -i(p'_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)[-\frac{1}{p'^2_0 - E^2 + i\epsilon} - 2\pi i\delta(p'^2_0 - E^2)\theta(-p'_0) + \frac{1}{p'^2_0 - E^2 + i\epsilon} + 2\pi i\delta(p'^2_0 - E^2)\theta(p'_0)] \\
=& -i(p'_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)[-2\pi i\delta(p'^2_0 - E^2)\theta(-p'_0) + 2\pi i\delta(p'^2_0 - E^2)\theta(p'_0)] \\
=& (p'_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)[-2\pi\delta(p'^2_0 - E^2)\theta(-p'_0) + 2\pi\delta(p'^2_0 - E^2)\theta(p'_0)] \\
=& 2\pi(p'_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m)\epsilon(p'_0)\delta(p'^2_0 - E^2)
\end{aligned} \tag{6}$$

$\epsilon(p'_0)$ は符号関数 $\epsilon(p'_0) = \theta(p'_0) - \theta(-p'_0)$ です。これを見ると、$p'_0 = p_0 + \mu$ を p_0 に置き換えれば、化学ポテンシャルなしの場合に一致することが分かります。このことはスペクトル関数の形 (5) からも予想できるものです。これを利用すれば

$$S_\beta(i\omega_n, \boldsymbol{p}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho(z, \boldsymbol{p})}{i\omega_n - z} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho(z', \boldsymbol{p})}{i\omega_n + \mu - z'} \tag{7}$$

のようにすることもできます。こうすれば $\rho(z, \boldsymbol{p})$ が $z + \mu$ の関数になっている限り、$\rho(z', \boldsymbol{p})$ には化学ポテンシャルがいないことになります。つまり、化学ポテンシャルのない場合でのスペクトル関数が使えます。

密度があるときの松原振動数に対する和は「和の計算」で示した積分に変えることで実行できます。そして、Saclay 法でも密度がある場合を計算できるのでそれを示しておきます。フェルミオンの温度グリーン関数の分子部分を無視した

$$S(\omega_n,\boldsymbol{p})=\frac{1}{-(i\omega_n+\mu)^2+E^2}$$

を考えます。時間成分をフーリエ変換するには、「温度グリーン関数」で示した計算と同じようにすればよくて (C は右半円、左半円どちらも時計まわり)

$$\begin{aligned}
S(\tau,\boldsymbol{p})&=T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}S(\omega_n,\boldsymbol{p})\\
&=\int_C\frac{dp_0}{2\pi i}\frac{e^{-p_0\tau}}{e^{-\beta p_0}+1}\frac{-1}{(p_0+\mu)^2-E^2}\\
&=-\int_C\frac{dp_0}{2\pi i}\frac{e^{-p_0\tau}}{e^{-\beta p_0}+1}\frac{1}{p_0+(E+\mu)}\frac{1}{p_0-(E-\mu)}\\
&=\frac{e^{-(E-\mu)\tau}}{e^{-\beta(E-\mu)}+1}\frac{1}{2E}+\frac{e^{-(-E-\mu)\tau}}{e^{-\beta(-E-\mu)}+1}\frac{1}{-2E}\\
&=e^{-(E-\mu)\tau}\frac{e^{\beta(E-\mu)}}{e^{\beta(E-\mu)}+1}\frac{1}{2E}-e^{(E+\mu)\tau}\frac{1}{e^{\beta(E+\mu)}+1}\frac{1}{2E}\\
&=\frac{1}{2E}[e^{-(E-\mu)\tau}(1-n_F(E-\mu))-e^{(E+\mu)\tau}n_F(E+\mu)]\\
&=\frac{1}{2E}e^{\mu\tau}[e^{-E\tau}(1-n_F(E-\mu))-e^{E\tau}n_F(E+\mu)] \qquad (8)
\end{aligned}$$

分布関数内が絶対値になっていないことに注意してください。この計算については最後に補足を載せています。また、フェルミオンの温度グリーン関数の分子を無視しないで全成分フーリエ変換するなら

$$\begin{aligned}
S(\tau,\boldsymbol{x})&=T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}S(\omega_n,\boldsymbol{p})\\
&=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int_C\frac{dp_0}{2\pi i}\frac{e^{-p_0\tau}}{e^{-\beta p_0}+1}\frac{(p_0+\mu)\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{(p_0+\mu)^2-E^2}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int_C\frac{dp_0}{2\pi i}\frac{e^{-p_0\tau}}{e^{-\beta p_0}+1}\frac{1}{p_0+\mu+E}\frac{1}{p_0+\mu-E}\big[(p_0+\mu)\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m\big]e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[\frac{e^{-(E-\mu)\tau}}{e^{-\beta(E-\mu)}+1}\frac{(E-\mu+\mu)\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{2E}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+\frac{e^{-(-E-\mu)\tau}}{e^{-\beta(-E-\mu)}+1}\frac{(-E-\mu+\mu)\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{-2E}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\Big]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[e^{-(E-\mu)\tau}\frac{e^{\beta(E-\mu)}}{e^{\beta(E-\mu)}+1}\frac{E\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{2E}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}-e^{(E+\mu)\tau}\frac{1}{e^{\beta(E+\mu)}+1}\frac{-E\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{2E}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\Big]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}\big[(E\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)e^{-(E-\mu)\tau}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}(1-n_F(E-\mu))-(-E\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)e^{(E+\mu)\tau}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}n_F(E+\mu)\big]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}\big[(E\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)e^{-(E-\mu)\tau}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}(1-n_F(E-\mu))-(-E\gamma_0+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)e^{(E+\mu)\tau}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}n_F(E+\mu)\big]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}\big(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\mu\gamma_0+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m)e^{-(E-\mu)\tau}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}(1-n_F(E-\mu))\\
&\qquad\qquad -(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\mu\gamma_0+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m)e^{(E+\mu)\tau}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}n_F(E+\mu)\big] \qquad (9)
\end{aligned}$$

となるだけです。
　フェルミオン-フェルミオンに対する Saclay 法での和の計算方法を示します。和の形としては

$$I_{FF}(\omega_n)=T\sum_m S(\omega_n-\omega_m,E_2)S(\omega_m,E_1)$$

$$S(\omega_m,E_1)=\frac{1}{-(i\omega_m+\mu)^2+E_1^2}$$

$$S(\omega_n-\omega_m,E_2)=\frac{1}{-(i\omega_n-(i\omega_m+\mu))^2+E_2^2}$$

というものです $(E_1,E_2>0)$。ω_n はボソンの松原振動数だとします。ボソンの松原振動数だとするのは、光子の自己エネルギーを考えると、ボソンの $i\omega_n$ が外線として入ってき、ループ部分でフェルミオンの内線 1 本が $i\omega_m+\mu$ として出てくるので、もう 1 本のフェルミオン内線が運動量保存から $i\omega_n-(i\omega_m+\mu)$ になるからです。これを計算していきますが、μ がいるせいで面倒になります。
　時間成分をフーリエ変換して

$$\begin{aligned}
I_{FF}(\omega_n)&=T\sum_m S(\omega_m,E_1)S(\omega_n-\omega_m,E_2)\\
&=T\sum_m\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_m\tau}e^{i(\omega_n-\omega_m)\tau'}S(\tau,E_1)S(\tau',E_2)\\
&=\int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n-\omega_m+\omega_m)\tau}S(\tau,E_1)S(\tau,E_2)\\
&=\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}S(\tau,E_1)S(\tau,E_2)
\end{aligned}$$

この $S(\tau,E_1)$ と $S(\tau,E_2)$ を運動量表示に戻すので、実時間でのフーリエ変換

$$S^>(t,\boldsymbol{k})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}S^>(k_0,\boldsymbol{k})e^{-ik_0t}$$

を今の場合に対応させて

$$S(\tau,E_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{-k_0\tau}S^>(k_0,E_1)\ ,\ S(\tau,E_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}e^{-p_0\tau}S^>(p_0,E_2)$$

と変換します。そして、スペクトル関数による表現は

$$S^>(k_0,E_1)=(1-n_F(k_0))\rho_0^+(k_0,E_1)$$

$$S^>(p_0,E_2)=(1-n_F(p_0))\rho_0^-(p_0,E_2)$$

として、$\rho_0^\pm$ は温度グリーン関数における μ の符号で区別していて

$$\rho_0^+(k_0,E_1)=2\pi\epsilon(k_0+\mu)\delta((k_0+\mu)^2-E_1^2)$$

$$\rho_0^-(p_0,E_2)=2\pi\epsilon(p_0-\mu)\delta((p_0-\mu)^2-E_2^2)$$

このように定義しています ((6) の $(p_0'\gamma_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)$ がないものを ρ_0 としています)。このスペクトル関数によって

$$\begin{aligned}
I_{FF}(\omega_n)=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}S(k_0,E_1)S(p_0,E_2)e^{-p_0\tau}e^{-k_0\tau}\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n-p_0-k_0)\tau}(1-n_F(k_0))(1-n_F(p_0))\rho_0^+(k_0,E_1)\rho_0^-(p_0,E_2)
\end{aligned}$$

スペクトル関数以外は化学ポテンシャルなしと同じなので

$$\begin{aligned}
I_{FF}(\omega_n)=&-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0dk_0}{(2\pi)^2}\frac{1-n_F(p_0)-n_F(k_0)}{i\omega_n-p_0-k_0}\rho_0^-(p_0,E_1)\rho_0^+(k_0,E_2)\\
=&-\int_{-\infty}^{\infty}dp_0dk_0\frac{\epsilon(p_0-\mu)\epsilon(k_0+\mu)}{i\omega_n-p_0-k_0}[1-n_F(p_0)-n_F(k_0)]\delta((p_0-\mu)^2-E_1^2)\delta((k_0+\mu)^2-E_2^2)
\end{aligned}$$

符号関数から化学ポテンシャルをなくしたほうが計算しやすいので、$p_0'=p_0-\mu$、$k_0'=k_0+\mu$ として

$$I_{FF}(\omega_n)=-\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'dk_0'\frac{\epsilon(p_0')\epsilon(k_0')}{i\omega_n-p_0-q_0}[1-n_F(p_0'+\mu)-n_F(k_0'-\mu)]\delta(p_0'^2-E_1^2)\delta(k_0'^2-E_2^2)$$

これは分布関数に $\pm\mu$ がいるだけで他は化学ポテンシャルなしと同じなので

$$\begin{aligned}
I_{FF}(\omega_n)=&-\Big[\frac{1}{4E_1E_2}\frac{1-n_F(-E_1-\mu)-n_F(-E_2+\mu)}{i\omega_n+E_1+E_2}+\frac{-1}{4E_1E_2}\frac{1-n_F(E_1-\mu)-n_F(-E_2+\mu)}{i\omega_n-E_1+E_2}\\
&+\frac{-1}{4E_1E_2}\frac{1-n_F(-E_1-\mu)-n_F(E_2+\mu)}{i\omega_n+E_1-E_2}+\frac{1}{4E_1E_2}\frac{1-n_F(E_1-\mu)-n_F(E_2+\mu)}{i\omega_n-E_1-E_2}\Big]
\end{aligned}$$

化学ポテンシャルありでのフェルミオンの分布関数の関係

$$n_F(-(E\pm\mu))=\frac{1}{e^{-\beta(E\pm\mu)}+1}=\frac{e^{\beta(E\pm\mu)}}{e^{\beta(E\pm\mu)}+1}=1-\frac{1}{e^{\beta(E\pm\mu)}+1}=1-n_F(E\pm\mu)$$

を使えば

$$\begin{aligned}
I_{FF}(\omega_n)=&-\frac{1}{4E_1E_2}\Big[\frac{-1+n_F(E_1+\mu)+n_F(E_2-\mu)}{i\omega_n+E_1+E_2}-\frac{-n_F(E_1-\mu)+n_F(E_2-\mu)}{i\omega_n-E_1+E_2}\\
&-\frac{n_F(E_1+\mu)-n_F(E_2+\mu)}{i\omega_n+E_1-E_2}+\frac{1-n_F(E_1-\mu)-n_F(E_2+\mu)}{i\omega_n-E_1-E_2}\Big]\\
=&-\frac{1}{4E_1E_2}\Big[-\frac{1-n_F(E_1+\mu)-n_F(E_2-\mu)}{i\omega_n+E_1+E_2}+\frac{1-n_F(E_1-\mu)-n_F(E_2+\mu)}{i\omega_n-E_1-E_2}\\
&+\frac{n_F(E_1-\mu)-n_F(E_2-\mu)}{i\omega_n-E_1+E_2}-\frac{n_F(E_1+\mu)-n_F(E_2+\mu)}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big]
\end{aligned}$$

(8) を使って計算しても同じ結果が導けます。この場合では $S(i\omega_m - (i\omega_n + \mu))$ での μ の符号が (8) の反対になりますが、明らかに (8) の μ の符号を反転させればいいだけです。というわけで

$$\begin{aligned}
&\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} S(\tau, E_1) S(\tau, E_2) \\
&= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \frac{1}{2E_1}[e^{-E\tau}(1 - n_F^-(E_1)) - e^{E\tau} n_F^+(E_1)] \frac{1}{2E_2}[e^{-E\tau}(1 - n_F^+(E_2)) - e^{E\tau} n_F^-(E_2)] \\
&= \frac{1}{4E_1E_2}\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\big[e^{-E_1\tau}(1 - n_F^-(E_1)) - e^{E_1\tau} n_F^+(E_1)][e^{-E_2\tau}(1 - n_F^+(E_2)) - e^{E_2\tau} n_F^-(E_2)\big] \\
&= \frac{1}{4E_1E_2}\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\big[e^{-(E_1+E_2)\tau}(1 - n_F^-(E_1))(1 - n_F^+(E_2)) + e^{(E_1+E_2)\tau} n_F^+(E_1) n_F^-(E_2) \\
&\qquad\qquad - e^{(E_1-E_2)\tau} n_F^+(E_1)(1 - n_F^+(E_2)) - e^{(-E_1+E_2)\tau} n_F^-(E_2)(1 - n_F^-(E_1))\big] \\
&= \frac{1}{4E_1E_2}\int_0^\beta d\tau \big[e^{(i\omega_n-E_1-E_2)\tau}(1 - n_F^-(E_1))(1 - n_F^+(E_2)) + e^{(i\omega_n+E_1+E_2)\tau} n_F^+(E_1) n_F^-(E_2) \\
&\qquad\qquad - e^{(i\omega_n+E_1-E_2)\tau} n_F^+(E_1)(1 - n_F^+(E_2)) - e^{(i\omega_n-E_1+E_2)\tau} n_F^-(E_2)(1 - n_F^-(E_1))\big] \\
&= \frac{1}{4E_1E_2}\big[\frac{1}{i\omega_n - E_1 - E_2}(e^{(-E_1-E_2)\beta} - 1)(1 - n_F^-(E_1))(1 - n_F^+(E_2)) \\
&\qquad + \frac{1}{i\omega_n + E_1 + E_2}(e^{(E_1+E_2)\beta} - 1) n_F^+(E_1) n_F^-(E_2) \\
&\qquad - \frac{1}{i\omega_n + E_1 - E_2}(e^{(E_1-E_2)\beta} - 1) n_F^+(E_1)(1 - n_F^+(E_2)) \\
&\qquad - \frac{1}{i\omega_n - E_1 + E_2}(e^{(-E_1+E_2)\beta} - 1) n_F^-(E_2)(1 - n_F^-(E_1))\big]
\end{aligned}$$

使う関係式は

$$e^{-\beta(E\pm\mu)} = \frac{n_F^\pm(E)}{1 - n_F^\pm(E)}\ ,\ e^{\beta(E\pm\mu)} = \frac{1 - n_F^\pm(E)}{n_F^\pm(E)}$$

これらによって、第一項では

$$\begin{aligned}
(e^{(-E_1-E_2)\beta} - 1)(1 - n_F^-(E_1))(1 - n_F^+(E_2)) &= (e^{-(E_1-\mu+E_2+\mu)\beta} - 1)(1 - n_F^-(E_1))(1 - n_F^+(E_2)) \\
&= \big(\frac{n_F^-(E_1)}{1 - n_F^-(E_1)}\frac{n_F^+(E_1)}{1 - n_F^+(E_1)} - 1\big)(1 - n_F^-(E_1))(1 - n_F^+(E_2)) \\
&= n_F^-(E_1) n_F^+(E_1) - (1 - n_F^-(E_1))(1 - n_F^+(E_2)) \\
&= -(1 - n_F^-(E_1) - n_F^+(E_2))
\end{aligned}$$

第二項は

$$
\begin{aligned}
(e^{(E_1+E_2)\beta}-1)n_F^+(E_1)n_F^-(E_2) &= (e^{(E_1+\mu+E_2-\mu)\beta}-1)n_F^+(E_1)n_F^-(E_2)\\
&= \frac{1-n_F^+(E_1)}{n_F^+(E_1)}\frac{1-n_F^-(E_2)}{n_F^-(E_2)}n_F^+(E_1)n_F^-(E_2)-n_F^+(E_1)n_F^-(E_2)\\
&= 1-n_F^-(E_2)-n_F^+(E_1)+n_F^+(E_1)n_F^-(E_2)-n_F^+(E_1)n_F^-(E_2)\\
&= 1-n_F^-(E_2)-n_F^+(E_1)
\end{aligned}
$$

第三項は

$$
\begin{aligned}
(e^{(E_1-E_2)\beta}-1)n_F^+(E_1)(1-n_F^+(E_2)) &= (e^{(E_1+\mu-E_2-\mu)\beta}-1)n_F^+(E_1)(1-n_F^+(E_2))\\
&= \Big(\frac{1-n_F^+(E_1)}{n_F^+(E_1)}\frac{n_F^+(E_2)}{1-n_F^+(E_2)}-1\Big)n_F^+(E_1)(1-n_F^+(E_2))\\
&= (1-n_F^+(E_1))n_F^+(E_2)-n_F^+(E_1)(1-n_F^+(E_2))\\
&= -n_F^+(E_1)+n_F^+(E_2)
\end{aligned}
$$

第四項は

$$
\begin{aligned}
(e^{(-E_1+E_2)\beta}-1)n_F^-(E)(1-n_F^-(E_1)) &= (e^{(-E_1+\mu+E_2-\mu)\beta}-1)n_F^-(E_2)(1-n_F^-(E_1))\\
&= \Big(\frac{n_F^-(E_1)}{1-n_F^-(E_1)}\frac{1-n_F^-(E_2)}{n_F^-(E_2)}-1\Big)n_F^-(E_2)(1-n_F^-(E_1))\\
&= n_F^-(E_1)(1-n_F^-(E_2))-n_F^-(E_2)(1-n_F^-(E_1))\\
&= n_F^-(E_1)-n_F^-(E_2)
\end{aligned}
$$

よって

$$
I_{FF}(\omega_n)=\frac{1}{4E_1E_2}\Big[-\frac{1-n_F^-(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n-E_1-E_2}+\frac{1-n_F^+(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n+E_1+E_2}+\frac{n_F^+(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n+E_1-E_2}-\frac{n_F^-(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n-E_1+E_2}\Big]
$$

となって同じ結果になります。

松原振動数が分子にいる場合もやってみます。I_{FF} にフェルミオンの松原振動数 ω_m をつければいいので

$$
I'_{FF}(\omega_n)=T\sum_m \omega_m S(\omega_m,E_1)S(\omega_n-\omega_m,E_2)
$$

この場合では

$$
S(i\omega_m,\boldsymbol{p})=\int_0^\beta d\tau S(\tau,\boldsymbol{p})e^{i\omega_m\tau}
$$

の微分によって ω_m を前に落とすので、微分して部分積分したときの関係

$$
\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \frac{dS(\tau,\boldsymbol{p})}{d\tau} e^{i\omega_m\tau} &= [S(\tau,\boldsymbol{p})e^{i\omega_m\tau}]_0^\beta - i\omega_m \int_0^\beta d\tau S(\tau,\boldsymbol{p})e^{i\omega_m\tau} \\
&= -S(\beta,\boldsymbol{p}) - S(0,\boldsymbol{p}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より

$$
i\int_0^\beta d\tau \frac{dS(\tau,\boldsymbol{p})}{d\tau} e^{i\omega_m\tau} = \omega_m \int_0^\beta d\tau S(\tau,\boldsymbol{p})e^{i\omega_m\tau}
$$

これを使って

$$
\begin{aligned}
I'_{FF}(\omega_n) &= iT\sum_m \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' \frac{dS(\tau,E_1)}{d\tau} S(\tau',E_2) e^{i\omega_m\tau} e^{i(\omega_n-\omega_m)p_0\tau'} \\
&= i\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \frac{dS(\tau,E_1)}{d\tau} S(\tau,E_2) \\
&= i\int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \frac{d}{d\tau}(e^{-k_0\tau}S^>(k_0,E_1))S^>(p_0,E_2)e^{-p_0\tau} \\
&= i\int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi} \int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n-k_0-p_0)\tau}(-k_0)S^>(k_0,E_1)S^>(p_0,E_2) \\
&= -i\int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi} \int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n-k_0-p_0)\tau} k_0(1-n_F(k_0))(1-n_F(p_0))\rho_0^+(k_0,E_1)\rho_0^-(p_0,E_1) \\
&= -i\int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi} \int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n-k_0-p_0)\tau} k_0(1-n_F(k_0))(1-n_F(p_0))\rho_0^+(k_0,E_1)\rho_0^-(p_0,E_1) \\
&= i\int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \frac{1-n_F(p_0)-n_F(k_0)}{i\omega_n - p_0 - k_0} \rho_0^+(k_0,E_1)\rho_0^-(p_0,E_2)
\end{aligned}
$$

となります。最後まで計算すれば

$$
\begin{aligned}
I'_{FF}(\omega_n) &= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}k_0\frac{\epsilon(p_0-\mu)\epsilon(k_0+\mu)}{i\omega_n-p_0-k_0}[1-n_F(p_0)-n_F(k_0)]\delta((k_0+\mu)^2-E_1^2)\delta((p_0-\mu)^2-E_2^2) \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}dp_0dk_0(k_0-\mu)\frac{\epsilon(p_0)\epsilon(k_0)}{i\omega_n-p_0-k_0}[1-n_F(p_0+\mu)-n_F(k_0-\mu)]\delta(k_0^2-E_1^2)\delta(p_0^2-E_2^2) \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}dp_0dk_0(k_0-\mu)\frac{\epsilon(p_0)\epsilon(k_0)}{i\omega_n-p_0-k_0}\frac{1}{4|E_1||E_2|}[1-n_F(p_0+\mu)-n_F(k_0-\mu)] \\
&\qquad\qquad \times[\delta(k_0+E_1)+\delta(k_0-E_1)][\delta(p_0+E_2)+\delta(p_0-E_2)] \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}dp_0dk_0(k_0-\mu)\frac{\epsilon(p_0)\epsilon(k_0)}{i\omega_n-p_0-k_0}\frac{1}{4|E_1||E_2|}[1-n_F(p_0+\mu)-n_F(k_0-\mu)] \\
&\qquad\quad \times[\delta(k_0+E_1)\delta(p_0+E_2)+\delta(k_0-E_1)\delta(p_0+E_2)+\delta(k_0+E_1)\delta(p_0-E_2)+\delta(k_0-E_1)\delta(p_0-E_2] \\
&= i(-E_1-\mu)\frac{1}{i\omega_n+E_2+E_1}\frac{1}{4E_1E_2}[1-n_F(-E_2+\mu)-n_F(-E_1-\mu)] \\
&\quad + i(E_1-\mu)\frac{-1}{i\omega_n+E_2-E_1}\frac{1}{4E_1E_2}[1-n_F(-E_2+\mu)-n_F(E_1-\mu)] \\
&\quad + i(-E_1-\mu)\frac{-1}{i\omega_n-E_2+E_1}\frac{1}{4E_1E_2}[1-n_F(E_2+\mu)-n_F(-E_1-\mu)] \\
&\quad + i(E_1-\mu)\frac{1}{i\omega_n-E_2-E_1}\frac{1}{4E_1E_2}[1-n_F(E_2+\mu)-n_F(E_1-\mu)] \\
&= \frac{-i(E_1+\mu)}{4E_1E_2}\Big[\frac{1-n_F(-E_2+\mu)-n_F(-E_1-\mu)}{i\omega_n+E_1+E_2}-\frac{1-n_F(E_2+\mu)-n_F(-E_1-\mu)}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big] \\
&\quad + \frac{i(E_1-\mu)}{4E_1E_2}\Big[-\frac{1-n_F(-E_2+\mu)-n_F(E_1-\mu)}{i\omega_n-E_1+E_2}+\frac{1-n_F(E_2+\mu)-n_F(E_1-\mu)}{i\omega_n-E_1-E_2}\Big] \\
&= \frac{-i(E_1+\mu)}{4E_1E_2}\Big[\frac{1-(1-n_F^-(E_2))-(1-n_F^+(E_1))}{i\omega_n+E_1+E_2}-\frac{1-n_F^+(E_2)-(1-n_F^+(E_1))}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big] \\
&\quad + \frac{i(E_1-\mu)}{4E_1E_2}\Big[-\frac{1-(1-n_F^-(E_2))-n_F^-(E_1)}{i\omega_n-E_1+E_2}+\frac{1-n_F^+(E_2)-n_F^-(E_1)}{i\omega_n-E_1-E_2}\Big] \\
&= \frac{-i(E_1+\mu)}{4E_1E_2}\Big[-\frac{1-n_F^+(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n+E_1+E_2}-\frac{n_F^+(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big] \\
&\quad + \frac{i(E_1-\mu)}{4E_1E_2}\Big[-\frac{n_F^-(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n-E_1+E_2}+\frac{1-n_F^-(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n-E_1-E_2}\Big]
\end{aligned}
$$

フェルミオン-ボソンでは

$$I_{FB}(\omega_n) = T\sum_m D(\omega_m,E_1)S(\omega_n-\omega_m,E_2)$$

$$D(\omega_m,k_1) = \frac{1}{-(i\omega_m)^2+E_1^2}$$

$$S(\omega_n-\omega_m,E_2) = \frac{1}{-(i\omega_n+\mu-i\omega_m)^2+E_2^2}$$

こんなのを考えます。今度は ω_n をフェルミオン、ω_m をボソンの松原振動数にしています。同じ手続きによって

$$\begin{aligned}
I_{FB}(\omega_n) &= T\sum_m D(\omega_m, E_1)S(\omega_n-\omega_m, E_2)\\
&= T\sum_m \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_m\tau}e^{i(\omega_n-\omega_m)p_0\tau'}D^>(\tau, E_1)S^>(\tau', E_2)\\
&= \int_0^\beta d\tau e^{(k_0+p_0)\tau}D^>(\tau, E_1)S^>(\tau, E_2)\\
&= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}D^>(\tau, E_1)S^>(\tau, E_2)
\end{aligned}$$

フーリエ変換は

$$D^>(\tau, E_1) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi}e^{-k_0\tau}D^>(k_0, E_1)\ ,\ S^>(\tau, E_2) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi}e^{-p_0\tau}S^>(p_0, E_2)$$

とします。そして、スペクトル関数による表現は

$$D^>(k_0, E_1) = (1+n_B(k_0))\rho_B(k_0, E_1)$$

$$S^>(p_0, E_2) = (1-n_F(p_0))\rho_F^+(p_0, E_2)$$

ρ_B はボソンの相互作用なしスペクトル関数、ρ_F^+ は ρ_0^+ と同じフェルミオンのスペクトル関数です。そうすると

$$\begin{aligned}
I_{FB}(\omega_n) =& \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}D^>(\tau, E_1)S^>(\tau, E_2)e^{-k_0\tau}e^{-p_0\tau}\\
=& \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n-k_0-p_0)\tau}(1+n_B(k_0))(1-n_F(p_0))\rho_B(k_0, E_1)\rho_F^+(p_0, E_2)
\end{aligned}$$

$\rho_F^+(p_0, E_2)$ では $p_0+\mu$ になっているので、$p_0+\mu\to p_0$ と変数変換して

$$\begin{aligned}
I_{FB}(\omega_n) =& \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n-k_0-p_0+\mu)\tau}(1+n_B(k_0))(1-n_F(p_0-\mu))\rho_B(k_0, E_1)\rho_F(p_0, E_2)\\
=& \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi}\frac{-e^{-(k_0+p_0')\beta}-1}{i\omega_n-k_0-p_0'}(1+n_B(k_0))(1-n_F(p_0'))\rho_B(k_0, E_1)\rho_F(p_0, E_2)\\
=& -\int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp_0}{2\pi}\frac{1}{i\omega_n-k_0-p_0'}\big(1+n_B(k_0)-n_F(p_0')\big)\rho_B(k_0, E_1)\rho_F(p_0, E_2)
\end{aligned}$$

$p_0' = p_0-\mu$ としています。ばらせば

$$
\begin{aligned}
I_{FB}(\omega_n) =& -\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 dp_0 \frac{1}{4E_1E_2}\frac{\epsilon(k_0)\epsilon(p_0)}{i\omega_n - k_0 - p_0'}\big(1 + n_B(k_0) - n_F(p_0')\big) \\
&\times \big[\delta(k_0 - E_1)\delta(p_0 + E_2) + \delta(k_0 + E_1)\delta(p_0 + E_2) + \delta(k_0 - E_1)\delta(p_0 - E_2) + \delta(k_0 + E_1)\delta(p_0 - E_2)\big] \\
=& -\frac{1}{4E_1E_2}\Big(-\frac{1 + n_B(E_1) - n_F(-E_2 - \mu)}{i\omega_n - E_1 - (-E_2 - \mu)} + \frac{1 + n_B(-E_1) - n_F(-E_2 - \mu)}{i\omega_n + E_1 - (-E_2 - \mu)} \\
&+ \frac{1 + n_B(E_1) - n_F(E_2 - \mu)}{i\omega_n - E_1 - (E_2 - \mu)} - \frac{1 + n_B(-E_1) - n_F(E_2 - \mu)}{i\omega_n + E_1 - (E_2 - \mu)}\Big) \\
=& -\frac{1}{4E_1E_2}\Big(-\frac{1 + n_B(E_1) - (1 - n_F(E_2 + \mu))}{i\omega_n + \mu - E_1 + E_2} + \frac{1 - (1 + n_B(E_1)) - (1 - n_F(E_2 + \mu)}{i\omega_n + \mu + E_1 + E_2} \\
&+ \frac{1 + n_B(E_1) - n_F(E_2 - \mu)}{i\omega_n + \mu - E_1 - E_2} - \frac{1 - (1 + n_B(E_1)) - n_F(E_2 - \mu)}{i\omega_n + \mu + E_1 - E_2}\Big) \\
=& -\frac{1}{4E_1E_2}\Big(\frac{n_B(E_1) + n_F^-(E_2)}{i\omega_n + \mu + E_1 - E_2} - \frac{n_B(E_1) + n_F^+(E_2)}{i\omega_n + \mu - E_1 + E_2} \\
&\qquad + \frac{1 + n_B(E_1) - n_F^-(E_2)}{i\omega_n + \mu - E_1 - E_2} - \frac{1 + n_B(E_1) - n_F^+(E_2)}{i\omega_n + \mu + E_1 + E_2}\Big)
\end{aligned}
$$

ω_m が前にいる

$$
I'_{FB}(\omega_n) = T\sum_m \omega_m D(\omega_m, E_1)S(\omega_n - \omega_m, E_2)
$$

では

$$
\begin{aligned}
I'_{FB}(\omega_n) &= iT\sum_m S(\omega_n - \omega_m, E_2)\int_0^\beta d\tau \frac{dD(\tau, E_1)}{d\tau}e^{i\omega_m\tau} \\
&= iT\sum_m \int d\tau S(\tau, E_2)e^{i(\omega_n - \omega_m)\tau}\int_0^\beta d\tau' \frac{dD(\tau', E_1)}{d\tau}e^{i\omega_m\tau'} \\
&= i\int_0^\beta d\tau S(\tau, E_2)\frac{dD(\tau, E_1)}{d\tau}e^{i\omega_n\tau} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau S(p_0, E_2)e^{i\omega_n\tau}e^{-p_0\tau}\frac{d}{d\tau}(D(k_0, E_1)e^{-k_0\tau}) \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau(-k_0)S(p_0, E_2)D(k_0, E_1)e^{i\omega_n\tau}e^{-p_0\tau}e^{-k_0\tau} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_0^\beta d\tau(-k_0)S(p_0, E_2)D(k_0, E_1)e^{(i\omega_n - p_0 - k_0)\tau} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}(-k_0)S(p_0, E_2)D(k_0, E_1)\frac{e^{(i\omega_n - p_0 - k_0)\beta} - 1}{i\omega_n - p_0 - k_0} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}(-k_0)S(p_0, E_2)D(k_0, E_1)\frac{-e^{(-p_0 - k_0)\beta} - 1}{i\omega_n - p_0 - k_0}
\end{aligned}
$$

ω_n はボソンなので $e^{i\omega_n\beta} = -1$ です。スペクトル関数を使って

$$
\begin{aligned}
I'_{FB}(\omega_n) =& -i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0dp_0}{(2\pi)^2}k_0\frac{-e^{(-p_0-k_0)\beta}-1}{i\omega_n-p_0-k_0}(1-n_F(p_0))(1+n_B(k_0))\rho_F(p_0,E_2)\rho_B(k_0,E_1)\\
=& i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0dp_0}{(2\pi)^2}k_0\frac{1+n_B(k_0)-n_F(p_0)}{i\omega_n-p_0-k_0}\rho_F(p_0,E_2)\rho_B(k_0,E_1)\\
=& i\int_{-\infty}^{\infty}dk_0dp_0\frac{k_0\epsilon(k_0)\epsilon(p_0+\mu)}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n-p_0-k_0}(1+n_B(k_0)-n_F(p_0))\\
&\times[\delta(p_0+\mu+E_2)\delta(k_0-E_1)+\delta(p_0+\mu+E_2)\delta(k_0+E_1)\\
&+\delta(p_0+\mu-E_2)\delta(k_0-E_1)+\delta(p_0+\mu-E_2)\delta(k_0+E_1)]\\
=& i\int_{-\infty}^{\infty}dk_0dp_0\frac{k_0\epsilon(k_0)\epsilon(p_0)}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n+\mu-p_0-k_0}(1+n_B(k_0)-n_F(p_0-\mu))\\
&\times[\delta(p_0+E_2)\delta(k_0-E_1)+\delta(p_0+E_2)\delta(k_0+E_1)+\delta(p_0-E_2)\delta(k_0-E_1)+\delta(p_0-E_2)\delta(k_0+E_1)]
\end{aligned}
$$

最後に $p_0+\mu\to p_0$ と変数変換しています。後はばらすことで

$$
\begin{aligned}
I'_{FB}(\omega_n) =& i\Big[\frac{-E_1}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n+\mu+E_2-E_1}(1+n_B(E_1)-n_F(-E_2-\mu))\\
&+\frac{-E_1}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n+\mu+E_2+E_1}(1+n_B(-E_1)-n_F(-E_2-\mu))\\
&+\frac{E_1}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n+\mu-E_2-E_1}(1+n_B(E_1)-n_F(E_2-\mu))\\
&+\frac{E_1}{4E_1E_2}\frac{1}{i\omega_n+\mu-E_2+E_1}(1+n_B(-E_1)-n_F(E_2-\mu))\Big]\\
=& i\frac{1}{4E_2}\Big[\frac{-1}{i\omega_n+\mu+E_2-E_1}(1+n_B(E_1)-1+n_F(E_2+\mu))\\
&+\frac{-1}{i\omega_n+\mu+E_2+E_1}(1-1-n_B(E_1)-1+n_F(E_2+\mu))\\
&+\frac{1}{i\omega_n+\mu-E_2-E_1}(1+n_B(E_1)-n_F(E_2-\mu))\\
&+\frac{1}{i\omega_n+\mu-E_2+E_1}(1-1-n_B(E_1)-n_F(E_2-\mu))\Big]\\
=& \frac{i}{4E_2}\Big[\frac{-1}{i\omega_n+\mu-E_1+E_2}(n_B(E_1)+n_F(E_2+\mu))+\frac{1}{i\omega_n+\mu+E_1+E_2}(1+n_B(E_1)-n_F(E_2+\mu))\\
&+\frac{1}{i\omega_n+\mu-E_1-E_2}(1+n_B(E_1)-n_F(E_2-\mu))+\frac{-1}{i\omega_n+\mu+E_1-E_2}(n_B(E_1)+n_F(E_2-\mu))\Big]
\end{aligned}
$$

となります。

化学ポテンシャルありでの和の計算の結果をまとめておきます。

$$
n_F^+(E)=n_F(E+\mu)=\frac{1}{e^{\beta(E+\mu)}+1}\ ,\ n_F^-(p_0)=n_F(E-\mu)=\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}
$$

・フェルミオン-フェルミオン (ω_m はフェルミオン、ω_n はボソン)

$$
\begin{aligned}
I_{FF}(\omega_n) &= T\sum_m S(\omega_n-\omega_m,E_2)S(\omega_m,E_1)\\
&= -\frac{1}{4E_1E_2}\Big(-\frac{1-n_F^+(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n+E_1+E_2}+\frac{1-n_F^-(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n-E_1-E_2}\\
&\qquad +\frac{n_F^-(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n-E_1+E_2}-\frac{n_F^+(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I'_{FF}(\omega_n) &= T\sum_m \omega_m S(\omega_m,E_1)S(\omega_n-\omega_m,E_2)\\
&= \frac{-i(E_1+\mu)}{4E_1E_2}\Big(-\frac{1-n_F^+(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n+E_1+E_2}-\frac{n_F^+(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n+E_1-E_2}\Big)\\
&\quad +\frac{i(E_1-\mu)}{4E_1E_2}\Big(-\frac{n_F^-(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n-E_1+E_2}+\frac{1-n_F^-(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n-E_1-E_2}\Big)
\end{aligned}
$$

・フェルミオン-ボソン (ω_n はフェルミオン、ω_m はボソン)

$$
\begin{aligned}
I_{FB}(\omega_n) &= T\sum_m D(\omega_m,E_1)S(\omega_n-\omega_m,E_2)\\
&= -\frac{1}{4E_1E_2}\Big(\frac{n_B(E_1)+n_F^-(E_2)}{i\omega_n+\mu+E_1-E_2}-\frac{n_B(E_1)+n_F^+(E_2)}{i\omega_n+\mu-E_1+E_2}\\
&\qquad +\frac{1+n_B(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n+\mu-E_1-E_2}-\frac{1+n_B(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n+\mu+E_1+E_2}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I'_{FB}(\omega_n) &= T\sum_m \omega_m D(\omega_m,E_1)S(\omega_n-\omega_m,E_2)\\
&= \frac{i}{4E_2}\Big(-\frac{n_B(E_1)+n_F^-(E_2)}{i\omega_n+\mu+E_1-E_2}-\frac{n_B(E_1)+n_F^+(E_2)}{i\omega_n+\mu-E_1+E_2}\\
&\qquad +\frac{1+n_B(E_1)-n_F^-(E_2)}{i\omega_n+\mu-E_1-E_2}+\frac{1+n_B(E_1)-n_F^+(E_2)}{i\omega_n+\mu+E_1+E_2}\Big)
\end{aligned}
$$

・補足

和の計算での補足をします。上では $E>\mu$ としているように計算していましたが、絶対値がついていないことから分かるように、$E<\mu$ の場合も含んでいます。$E<\mu$ だとして計算してみると

$$
\begin{aligned}
S(\tau,\boldsymbol{p}) &= T\sum_n e^{-i\omega_n\tau}S(\omega_n,\boldsymbol{p})\\
&= \int_C \frac{dp_0}{2\pi i}\frac{e^{-p_0\tau}}{e^{-\beta p_0}+1}\frac{-1}{(p_0+\mu)^2-E^2}\\
&= -\int_C \frac{dp_0}{2\pi i}\frac{e^{-p_0\tau}}{e^{-\beta p_0}+1}\frac{1}{p_0+(E+\mu)}\frac{1}{p_0-(E-\mu)}\\
&= -\int_C \frac{dp_0}{2\pi i}\frac{e^{-p_0\tau}}{e^{-\beta p_0}+1}\frac{1}{p_0+|E+\mu|}\frac{1}{p_0+|E-\mu|}\\
&= \frac{e^{|E-\mu|\tau}}{e^{\beta|E-\mu|}+1}\frac{1}{2E}+\frac{e^{-(-|E+\mu|)\tau}}{e^{-\beta(-|E+\mu|)}+1}\frac{1}{-2E}\\
&= \frac{e^{|E-\mu|\tau}}{e^{\beta|E-\mu|}+1}\frac{1}{2E}-\frac{e^{|E+\mu|\tau}}{e^{\beta|E+\mu|}+1}\frac{1}{2E}
\end{aligned}
$$

これと上の結果において $E<\mu$ とした形

$$
\begin{aligned}
S(\tau,\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2E}e^{\mu\tau}[e^{-E\tau}(1-n_F(E-\mu))-e^{E\tau}n_F(E+\mu)]\\
&= \frac{1}{2E}[e^{|E-\mu|\tau}(1-n_F(-|E-\mu|))-e^{(E+\mu)\tau}n_F(|E+\mu|)]\\
&= \frac{1}{2E}[e^{|E-\mu|\tau}n_F(|E-\mu|)-e^{(E+\mu)\tau}n_F(|E+\mu|)]
\end{aligned}
$$

を見てみると一致していることが分かります。$S(\omega_n,\boldsymbol{p})$ は 1 位の極しか持っていないために単純な留数の足し合わせになっているのと、$E>\mu$ でも同じ形になることから、上でのようなやり方で E と μ の大小に関係のない結果が導けていただけです。