カラー超伝導

クォーク・グルオンプラズマと並んで、有限温度・密度 QCD における重要な相であるカラー超伝導 (color Superconductivity) について説明します。
ここでは具体的な計算はせずに、群論による解析から分かる範囲内の形式的な段階での話をします。
BCS 理論についてのお話レベルでの知識はあることを前提に書いています。

最初にちょっとしたカラー超伝導の歴史と致命的な問題について触れておきます。カラー超伝導は物性の BCS(Bardeen-Cooper-Schrieffer) 理論をそのまま QCD に適用させようというものです。この発想は 1980 年代には出てきていたというわりと古いものです。しかし、当時はあまり興味を持たれず、1999 年付近まで無視されてきたという経緯があります。これはクォークに現れるエネルギーギャップ (BCS 理論では電子にエネルギーギャップが現れる) が無視できるほど小さかったためです。しかし、1999 年ぐらいに改めて計算してみたら実は無視できるほど小さくないんじゃないかという結果がでてきました。これは hard dense loop 近似 (HTL 近似の密度版) を取り入れた計算結果です。このため、急激に興味を引かれたのか、2000 年頃にカラー超伝導に関する論文が一気に出ました。カラー超伝導はこのような経緯をたどって現在に至っているようです。

このように 2000 年頃から急激に発展している分野なんですが、致命的な問題が 2 つあります。1 つは実験結果がほぼないということです。加速器実験は高温を目指しているために低温高密度をターゲットにしているものがありません (SPS、RHIC、ALICE と高温になっていく)。というより、地上実験で低温高密度が実現できるのかという初期段階での問題を抱えています。そのため、唯一の実験というより観測対象となっているのが、中性子星以上の高密度星です。しかし、これは中性子星の冷却過程自体がまだ正確に判明していないとか、観測の限界とかに阻まれて詳細に分かる段階ではないようです。というわけで、理論を実験で実証する、もしくは実験結果を説明するという物理の基本的な姿勢が使えない、理論上だけの話にしかなっていません。

2 つ目の問題は格子場の理論による数値シミュレーション (lattice シミュレーションと呼ぶことにします) が使えないという点です。この方法は第一原理から余計なことをせずに計算するために非常に信頼度が高いです。クォーク・グルーオンプラズマは lattice シミュレーションが完全に先行していて、他の方法がこれを追従しているような状況です。そんな魅力的な方法がカラー超伝導に対しては使えません。理由は有限密度に拡張すると虚部が出てきてしまって数値計算できなくなるためです。これに対しては一応対応策があって、$\mu/T < 1$ までなら使えるだろうと言われています。しかし、これではまだ低温高密度の領域に辿りつけていません。つまり、実際の実験ができないだけでなく、数値的な実験と言えるような lattice シミュレーションさえもまだ使えないという状況です。

というわけで、理論を裏付ける明確な存在がないのが現状 (2000 年〜2010 年ぐらいでの) です。そんなカラー超伝導について理論的な組み立てを行っていきます。

カラー超伝導は大きく分けて、2SC と CFL というのに分けられます。これらは単にフレーバの数によって違いが起きている状態です。2SC は 2 flavor superconductivity、CFL は color flavor locking の略です。2SC は直訳すれば、2 フレーバ超伝導となりますが、CFL は上手な訳を誰かが作らないとカタカナ表記にでもなりそうです。この二つについて説明していきます。

まず、カラー超伝導の基本的な性質を見ていきます。超伝導とついていることから、物性での超伝導を元にしていることは予想できると思います。そのため、必要となるのはクーパー対 (cooper pair) です。超伝導に対する BCS 理論の詳細は省きますが、クーパー対の生成にはどんなに小さかろうと電子間に引力が働いている必要があります (電子間の場合はフォノンによって引力が作られると考える)。クーパー対が生成されることでフェルミ面が不安定になってエネルギーが落ちていくというのが、超伝導になるために必要な条件です。

これをクォークに置き換えます。クォークもフェルミオンなので、クーパー対さえできればフェルミ面を不安定にし、超伝導状態へ移行されるはずです。問題になるのはクォークによるクーパー対が作られるのかという点です。そのためには、クォーク間に引力が働いていることを示せばいいです。クォークはカラー荷によって相互作用が起こされており、これはカラーが 3 色 (赤、緑、青) であることから、群論での $SU(3)_C$ を形成しています (添え字の C はカラーに関するものであることを表しています)。クォーク・クォークの組み合わせによる $SU(3)_C \times SU(3)_C$

は群論の話から

$$3 \otimes 3 = \overline{3} \oplus 6$$

のように表現できます。$\overline{3}$ は反対称な反 3 重項、6 は対称な 6 重項。対称、反対称というのは 2 つの粒子の入れ替えに対して対称か反対称かということです。右辺は反 3 重項と 6 重項の和によって表されており、反対称な構造は引力なので反 3 重項が引力を起こす項です。このようにカラーによる群の構造は引力を含んでいます。

実際に $SU(3)$ の生成子から引力と斥力の成分があることも示せます。クォーク・クォーク間の相互作用はグルーオンによって媒介されていますが、1 つのグルーオンの交換においてクォーク・クォークが相互作用しているのだと考えれば、頂点部分が igT^i となっているので、カラーによる $SU(3)$ の生成子が

$$\sum_{i=1}^{N_c^2-1} T^i_{aa'}T^i_{b'b}$$

このように現われます ($T^i_{aa'}$ は変換の生成子で下の添え字は行列成分。$\exp[i\alpha^i T^i]$)。これは完全性より (場の量子論の「$U(N)$ と $SU(N)$」参照)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_c^2-1} T^i_{aa'}T^i_{b'b} &= \frac{1}{2}\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \frac{1}{2N_c}\delta_{aa'}\delta_{b'b} \\
&= \frac{N_c}{4N_c}\delta_{ab}\delta_{a'b'} + \frac{N_c}{4N_c}\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \frac{1}{4N_c}\delta_{aa'}\delta_{b'b} - \frac{1}{4N_c}\delta_{aa'}\delta_{b'b} \\
&= \frac{N_c+1}{4N_c}\delta_{ab}\delta_{a'b'} + \frac{N_c-1}{4N_c}\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \frac{N_c+1}{4N_c}\delta_{aa'}\delta_{b'b} + \frac{N_c-1}{4N_c}\delta_{aa'}\delta_{b'b} \\
&= -\frac{N_c+1}{4N_c}(\delta_{aa'}\delta_{b'b} - \delta_{ab}\delta_{a'b'}) + \frac{N_c-1}{4N_c}(\delta_{aa'}\delta_{b'b} + \delta_{ab}\delta_{a'b'})
\end{aligned}$$

このとき、例えば a, b' を交換すると

$$\begin{aligned}
&-\frac{N_c+1}{4N_c}(\delta_{b'a'}\delta_{ab} - \delta_{b'b}\delta_{a'a}) + \frac{N_c-1}{4N_c}(\delta_{b'a'}\delta_{ab} + \delta_{b'b}\delta_{a'a}) \\
&\qquad = \frac{N_c+1}{4N_c}(\delta_{aa'}\delta_{b'b} - \delta_{ab}\delta_{a'b'}) + \frac{N_c-1}{4N_c}(\delta_{aa'}\delta_{b'b} + \delta_{ab}\delta_{a'b'})
\end{aligned}$$

第一項は符号が反転し、第二項の符号はそのままなので、第一項は反対称、第二項は対称になっています。つまり、第一項が反 3 重項に、第二項が 6 重項に対応しており、第一項が引力、第二項が斥力の項となります。このように、クォーク間の相互作用には引力に相当する部分があり、これによってクーパー対を生成することができると考えられます。

クォーク間に引力があることが分かったので、ラグランジアンの相互作用部分にクォーク・クォーク相互作用の項を作るにはどうしたらいいのか見ていきます。クォーク・クォークの相互作用というのはラグランジアンにおいて

$$q^T\hat{O}q$$

こんな形をしているはずです。q はクォークを表すスピノールで、T は転置を表わし、$\hat{O}$ は場の自由度に対する何かしらの演算子です (例えば、スピノールに対するガンマ行列とか)。このことはクォークと反クォークによる組み合わせが、$\overline{q}\hat{O}q$ の項によって書かれていたことを考えれば当たり前です (反クォークではないので $q^\dagger$ から複素共役を外す)。

クォークはフェルミオンなので、場の交換に対しては反交換します。つまり、例えばスピノール成分の添え字を使って書けば

$$q^T\hat{O}q = q_i\hat{O}_{ij}q_j = \hat{O}_{ij}q_iq_j = -\hat{O}_{ij}q_jq_i = -q_j(\hat{O})^T_{ji}q_i = -q^T\hat{O}^Tq$$

となります。これから $\hat{O}$ は転置に対して反対称 $\hat{O}^T = -\hat{O}$ でなければいけないという制限がつきます。今はスピノールだけでやりましたが、クォークでは他にカラーとフレーバの自由度があり、これらに対しても同じようになります。形式的に書けば

$$\hat{O} = \hat{O}_d \otimes \hat{O}_c \otimes \hat{O}_f$$

d はディラック (スピノール)、c はカラー、f はフレーバを表わしています。簡単に言えば、ガンマ行列とカラー、フレーバによる生成子の組み合わせだということです。さらに、$\hat{O}$ を反対称になるように組み合わせるためには、1 つが反対称で他が対称、もしくは 3 つとも反対称という組み合わせを取る必要があります。これがフェルミオンの反交換性、つまりパウリの排他律によるクォーク・クォーク相互作用を作るための制限です。

演算子 $\hat{O}$ に対する制限は、使えるガンマ行列、生成子に制限を与えます。ガンマ行列において、ローレンツ不変な組み合わせの基本は

$$\gamma^\mu\ ,\ \gamma_5\ ,\ \gamma^\mu\gamma_5\ ,\ \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

それぞれ、ベクトル、擬スカラー、軸性ベクトル、2 階のテンソルです (相対論的量子力学の「γ 行列〜双線形〜」参照)。ガンマ行列自体は転置に対する対称、反対称が成分によって

$$\gamma^{1T} = -\gamma^1\ ,\ \gamma^{2T} = \gamma^2\ ,\ \gamma^{3T} = -\gamma^3\ ,\ \gamma^{0T} = \gamma^0$$

このようになっているので、そのままでは使えません。ここで便利な演算子があって、それは荷電共役演算子 C です (ディラック表示のガンマ行列を使って書けば、$C = i\gamma^2\gamma^0$)。これは性質として

$$C = -C^T$$

というのを持っているために、そのまま反対称な組み合わせの一つになります。反対称なものができたので、後は対称なものを掛ければ、そこから反対称な組み合わせを作ることが出来ます。分かりやすくするために、ディラック表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で行っていきます。$C\gamma^5$ は

$$(C\gamma^5)^T = \gamma^{5T}C^T = -\gamma^5 C = -C\gamma^5$$

このように反対称になります。$\gamma^{5T} = \gamma^5$ と $\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0$ を使っています。$C\gamma^\mu$ は

$$(C\gamma^1)^T = \gamma^{1T}C^T = \gamma^1 C = C\gamma^1$$

$$(C\gamma^2)^T = \gamma^{2T}C^T = -\gamma^2 C = C\gamma^2$$

γ^0, γ^3 も同様なので、対称です。同じように考えていけば $C\sigma^{\mu\nu}$ も対称であることが分かります。$C\gamma^\mu\gamma_5$ は

$$(C\gamma^\mu\gamma_5)^T = \gamma_5^T\gamma^{\mu T}C^T = -\gamma_5\gamma^{\mu T}C = \gamma^{\mu T}\gamma_5 C = -\gamma^{\mu T}C\gamma_5$$

後は $C\gamma^\mu$ と同じようにすれば、反対称であることが分かります。よって

- 反対称

$$C\ ,\ C\gamma_5\ ,\ C\gamma^\mu\gamma_5$$

- 対称

$$C\gamma^\mu\ ,\ C\sigma^{\mu\nu}$$

という組み合わせを作ることが出来ます。ちゃんと求めませんが、C は擬スカラー、$C\gamma_5$ はスカラー、$C\gamma^\mu\gamma_5$ はベクトル、$C\gamma^\mu$ は軸性ベクトル、$C\sigma^{\mu\nu}$ はテンソルです。

　次にカラーとフレーバの生成子部分を見ていきます。クォークを扱うので、$SU(2)$ と $SU(3)$ を見ればいいです ($U(2)$、$U(3)$ でも単位行列によるものが出てくるだけで同じです)。つまり、生成子はパウリ行列 σ_i と、ゲルマン行列 λ_i(「$U(N)$ と $SU(N)$」での $t_1 \sim t_8$ で、ここでは t ではなく λ と書きます) になります。これは、そのまま行列成分を見れば、対称、反対称はすぐに分かって

- $SU(2)$

　・反対称

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

　・対称

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $SU(3)$

・反対称

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

・対称

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となります。というわけで、こういったガンマ行列の組み合わせと生成子によって $\hat{O}$ は作られます。

ここまで見てきたカラー超伝導の性質からクォークによるクーパー対の形を作ることができます。通常のクーパー対と同じように運動量が 0 で、スピンも 0(スカラー) になるようにします。2 つのクォークを合わせてスピン 0 にするということは、2 つのスピン 1/2 粒子による 1 重項に対応します (スピン 1 が 3 重項)。そして、これは反対称な表現です（$\pm 1/2$ を上向きと下向きの矢印で書けば、$\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$)。なので、スピンの添え字に対しては反対称になるようにします。この性質から、ガンマ行列としては反対称なものを使えばいいということが分かります。

そして、上での話のように、引力を作るためには反 3 重項となっている必要があります。つまり、カラーの入れ替えに対して反対称になっていなければいけません。フレーバに対してもフェルミオンの反交換の性質 (パウリの排他律) のために、反対称になっていることを要求します。よってカラーとフレーバに対しては反対称になるように組めばいいということになります。

これでクーパー対を作るための準備ができたことになります。なので、2SC と CFL の話に移ります。

まず、2SC を見ていきます。2SC ではフレーバは 2 つ、つまり u, d クォークのみを考えることになります。クーパー対はカラーとフレーバに対しては反対称であるので、レヴィ・チビタ記号 ϵ を使うことにします。そうすると、クーパー対 $\Phi^a = < qq >$ を

$$\Phi^c = \epsilon_{ij}\epsilon^{abc}\langle q_i^{aT} C q_j^b \rangle$$

みたいに作ることができます (ローマ文字に関しては同じ文字では和を取る)。i, j はフレーバ、a, b, c はカラー、C は荷電共役の演算子です ($\epsilon_{ij}, \epsilon^{abc}$ の上付き、下付きには特に意味はないです)。スピノール成分は今の解析において重要ではないので省いて書いています。この形だと擬スカラーになっているので、γ_5 を加えてスカラーにした形

$$\Phi^c = \epsilon_{ij}\epsilon^{abc}\langle q_i^{aT} C \gamma_5 q_j^b \rangle \tag{1}$$

の方が使われます。この形で書くことによって、スカラーでカラー反 3 重項なクォーク対の凝縮となります。

さらに、カラーとフレーバの $\epsilon^{abc}, \epsilon_{ij}$ の代わりに、$SU(3)$ と $SU(2)$ の生成子を使っても書けて

$$\Phi_{AA'} = \langle q^T C \gamma_5 \sigma_A \lambda_{A'} q \rangle \tag{2}$$

反対称なものを選ぶということから、A は 2、A' は $2, 5, 7$ で、フレーバが σ_A、カラーが $\lambda_{A'}$ です。

(1) において、Φ^c のようにカラーの添え字が外に残っています。これはカラーを任意に一つ選べることを言っています。もう少し感覚的に言うと、カラーによって張られている空間 (カラー空間) において、カラーの向いている方向を任意に選べると言い換えることができます。そうすると、カラーの向きは大局的な回転変換によって変えることができます。このため、計算に便利な方向を勝手に選べてしまいます。大抵は第三方向、カラーで言えば青色になるように選びます。そして、(1) から明らかに、3 色のカラーの内の 1 色がクォーク対を作らないことも分かります (レヴィ・チビタ記号は同じ添え字があると 0 になるため)。

また、(2) のようにしたときに、フレーバの生成子は固定され、カラーに対しては 3 つ選べるようになっていることが分かります。つまり、このカラーの自由度は、カラー空間においてベクトルを形成していると見ることができます。そして、ベクトルと言うことで気がつくように、このベクトルを上手いこと回転させると、常に $\lambda_2, \lambda_5, \lambda_7$ のどれかの方向に固定させられます。(1) と (2) の両方の場合で言っていることは同じで、カラーの自由度を 1 つ落とせるということです。これが 2SC の特徴で、カラー対称性 $SU(3)_C$ は $SU(2)_C$ 対称性に破れます。そうすると、(2) では $A' = 2$ と選べて

$$\Phi = \langle \psi^T C\gamma_5 \sigma_2 \lambda_2 \psi \rangle \tag{3}$$

このように書くことができます。$\psi^T C\gamma_5 \sigma_2 \lambda_2 \psi$ はフレーバを u, d、カラーを赤 r、緑 g、青 b として成分で展開すると

$$\begin{aligned}
&(u^T \ d^T) C\gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\
&\quad = (id^T \ \ -iu^T) C\gamma_5 \lambda_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\
&\quad = id^T C\gamma_5 \lambda_2 u - iu^T C\gamma_5 \lambda_2 d \\
&\quad = i(d_r \ d_g \ d_b) C\gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix} - i(u_r \ u_g \ u_b) C\gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix} \\
&\quad = i(id_g \ \ -id_r \ 0) C\gamma_5 \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix} - i(iu_g \ \ -iu_r \ 0) C\gamma_5 \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix} \\
&\quad = -d_g C\gamma_5 u_r + d_r C\gamma_5 u_g + u_g C\gamma_5 d_r - u_r C\gamma_5 d_g
\end{aligned}$$

u^T や d^T の T はカラー成分の転置を表します。このことから、2SC でのクォーク対は、d_g と u_r, d_r と u_g による組み合わせで構成されていることが分かります。

カラー対称性が破られるということは 8 個のグルーオン全てが質量 0 である必要がなくなるということです。$SU(3)$ におけるグルーオンの種類は $3 \times 3 - 1 = 8$ 個ですが、$SU(2)$ に落ちるために、$8 - (2 \times 2 - 1) = 5$ 個が質量を得ます。これは超伝導で言うところのマイスナー効果に対応するものです。なぜなら、マイスナー効果は雑に言ってしまえば磁場が質量を持って有限の距離までしか伝播できないというものだからです。

このように 2SC ではカラー対称性が破られるんですが、カラー対称性以外は破られていません。電荷の保存に関する $U(1)$ も一見破れているように見えて破れていません。今の場合での電荷に関する変換は

$$\exp[i\alpha Q]\ ,\ Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \tag{4}$$

これによって与えられます。フレーバは u,d なので電荷は $2/3,-1/3$ に取ります (なので、これはフレーバ空間の行列です)。そうすると電荷の生成子 Q はフレーバの部分つまり σ_2 にしか関わらないので、そこだけを取り出して

$$q^T\ \Rightarrow\ q^T\exp[i\alpha Q^T]\ ,\ q\ \Rightarrow\ \exp[i\alpha Q]q$$

を行ってみると (α の 1 次まで)

$$\begin{aligned}
q^T(1+i\alpha Q^T)\sigma_2(1+i\alpha Q)q &= q^T(\sigma_2+i\alpha Q\sigma_2+i\alpha\sigma_2 Q)q\\
&= q^T(\sigma_2+i\alpha\begin{pmatrix}0 & -\frac{i}{3}\\ \frac{i}{3} & 0\end{pmatrix})q\\
&= q^T(1+i\alpha\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix})\sigma_2 q\\
&= q^T\sigma_2 q\exp[\frac{i\alpha}{3}]
\end{aligned}$$

最後の exp 部分は行列ではなくただの数です。途中の行列計算は

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{i2}{3}\\ -\frac{i}{3} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{i}{3}\\ \frac{i2}{3} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{i}{3}\\ \frac{i}{3} & 0\end{pmatrix}$$

というわけで、Φ は電荷に関する変換に対して不変でなく

$$\Phi\ \Rightarrow\ \Phi\exp[\frac{i\alpha}{3}] \tag{5}$$

のようになっています。このため電荷の保存が壊れているように見えます。しかし

$$q\ \Rightarrow\ \exp[i\alpha\lambda_8]q$$

というカラーに関する変換を行ってみると

$$q^T\lambda_2 q \ \Rightarrow\ q^T(1+i\alpha\lambda_8)\lambda_2(1+i\alpha\lambda_8)q$$
$$= q^T(\lambda_2+i\alpha\lambda_8\lambda_2+i\alpha\lambda_2\lambda_8)q$$
$$= q^T(\lambda_2+\frac{2i\alpha}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})q$$
$$= q^T\lambda_2 q(1+\frac{2i\alpha}{\sqrt{3}})$$

なので

$$\Phi \ \Rightarrow\ \Phi\exp[\frac{2i\alpha}{\sqrt{3}}] \tag{6}$$

となります (これの exp 部分も行列ではないです)。で、この二つの変換による結果を見比べると、(4) の変換において Q の代わりに

$$\tilde{Q} = Q - \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8$$

これを使えば、(5)、(6) での exp 部分がうまい事消えて、$\exp[i\alpha\tilde{Q}]$ の変換に対して Φ が不変になっていることが分かります ($\tilde{Q}$ の第二項はカラー空間の行列です)。一応フレーバ成分とカラー成分をまじめに計算していった場合も示しておきます。変換は

$$\psi^T C\gamma_5\sigma_2\lambda_2\psi \ \Rightarrow\ \psi^T\exp[i\alpha(Q-\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8)^T]C\gamma_5\sigma_2\lambda_2\exp[i\alpha(Q-\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8)]\psi$$

フレーバ部分は

$$(u^T\ d^T)\exp[i\alpha Q^T]C\gamma_5\sigma_2\exp[i\alpha Q]\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$
$$= (u^T\ d^T)C\gamma_5\Big(1+i\alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$
$$= (u^T\ d^T)C\gamma_5\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} + \frac{i\alpha}{3}(u^T\ \ d^T)C\gamma_5\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$
$$= id^TC\gamma_5 u - iu^TC\gamma_5 d + \frac{i\alpha}{3}(id^TC\gamma_5 u - iu^TC\gamma_5 d)$$
$$= (1+\frac{i\alpha}{3})(id^TC\gamma_5 u - iu^TC\gamma_5 d)$$

カラー部分では $u=(u_r\ u_g\ ,u_b), d=(d_r\ d_g\ ,d_b)$ となっているので

$$(1+\frac{i\alpha}{3})(id^T\exp[-i\alpha\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8^T]C\gamma_5\lambda_2\exp[-i\alpha\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8^T]u-iu^T\exp[-i\alpha\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8^T]C\gamma_5\lambda_2\exp[-i\alpha\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8^T]d)$$
$$=(1+\frac{i\alpha}{3})(1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{2i\alpha}{\sqrt{3}})(id^TC\gamma_5\lambda_2u-iu^TC\gamma_5\lambda_2d)$$
$$=-d_gC\gamma_5u_r+d_rC\gamma_5u_g+u_gC\gamma_5d_r-u_rC\gamma_5d_g$$

となって変換前と一致します。というわけで、$\tilde{Q}$ に対して対称性は破られていません。

このように電荷の形を変える操作は電弱相互作用でも出てきています (場の量子論の「ワインバーグ・サラムモデル」参照)。電弱相互作用では質量を持ったボソン (Z ボソン) と質量を持たない光子が混ざるために起きたのに対して、2SC では質量を持った 8 番目のグルーオンと光子とが混ざることによって起きています。

バリオン数の保存も同様で、バリオン数 B では

$$\tilde{B}=B-\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$$

このようにしたものが保存されます。このように書き換えられたバリオン数は回転した (rotated) バリオン数の保存と言ったりします。

というわけで、2SC において対称性は

$$SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_B\times U(1)_Q\ \Rightarrow\ SU(2)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_{\tilde{B}}\times U(1)_{\tilde{Q}}\times Z_2$$

このように変化します ($SU(2)_L\times SU(2)_R$ はカイラル対称性。細かいことを言えば $U(1)_Q$ はこれに含まれている)。2SC で明確に破れるのはカラーの $SU(3)_C$ 対称性だけです。Z_2 は $U(1)_B$ が破れた代わりに出てくるもので、$q\Rightarrow -q$ という変換に対する対称性です。

2SC についてはこれで終わりにして CFL に移ります。CFL はフレーバの数が 3 になるので、クーパー対の形を

$$\Delta=\sum_{C=1}^{3}\epsilon_{ijC}\epsilon^{abC}\langle q_i^{aT}Cq_j^b\rangle \tag{7}$$

とするのが 2SC からの素直な拡張です。これを見てみると、添え字の C をカラーとフレーバに関するレヴィ・チビタ記号において共有しています。このため CFL ではカラーとフレーバの関係が独立でなく関係しているという性質を持ちます。これは言い方を変えると、カラーとフレーバを独立に勝手に回転 (赤緑青によるカラー空間、u,d,s によるフレーバ空間での回転) させてはいけないということで、このため color flavor locking(直訳してカラーとフレーバを固定する) という名前がついています。

CFL の一般形は上でのものではなくて

$$\Delta_{ij}^{ab}=\sum_{C=1}^{3}\Delta_1\epsilon_{ijC}\epsilon^{abC}+\kappa(\delta_i^a\delta_j^b+\delta_i^b\delta_j^a)$$

という形で書けます。クーパー対はカラーとフレーバの入れ替えに対して対称であるはずだとすれば、カラーが交換に対して対称、フレーバが交換に対して対称という組み合わせによっても作れるためで、これが第二項になります。第一項は明らかに $\overline{3}\times\overline{3}$ という反 3 重項による反対称同士によって作られ、第二項は 6×6 という 6 重項

による対称な項となっています。しかし、第二項の係数 κ は Δ_1 に比べて十分小さいということが調べられているので、大抵は第一項だけを考え、結局 (7) の形になります。

また、Ginzburg-Landau 解析と呼ばれる方法を使うと、$\Delta_{AA'}$ に対して

$$\Delta_{22} = \Delta_{55} = \Delta_{77} \neq 0$$

$$\Delta_{AA'} = 0 \quad (A \neq A')$$

という結果が導けます。このように $\Delta_{22}, \Delta_{55}, \Delta_{77}$ で 0 でない値を持つことからも、CFL はカラーとフレーバを同時に回転させないといけないということが分かります。

2SC と同じようにゲルマン行列によっても Δ を書くことができます。フレーバが 2 から 3 になるだけなので、単純に

$$\Delta_{AA'} = \langle q^T C \gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} q \rangle$$

となります。A, A' は反対称なものを選ぶので $A, A' = 2, 5, 7$ です。τ_A と λ_A のように分けて書いているのは、フレーバは正確には $U(3)$ 対称で、カラーは $SU(3)$ 対称だからです。

Δ_{22} のフレーバに対しては

$$(u^T, d^T, s^T) \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = (id^T, -iu^T, 0) \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = id^T u - iu^T d$$

そしてカラー (赤 r、緑 g、青 b) も同様になるので、クォーク対の組み合わせは

$$(u_r, d_g) \ , \ (u_g, d_r)$$

同様にしていけば Δ_{55} では

$$(d_g, s_b) \ , \ (d_g, s_b)$$

Δ_{77} では

$$(s_b, u_r) \ , \ (s_r, u_b)$$

となります。$\Delta_{22}, \Delta_{55}, \Delta_{77}$ のクォーク対のカラーとフレーバの組み合わせは u, d, s と r, g, b をグルグル交換させているようになっているのが分かります。これはカラーとフレーバ両方に対して同じゲルマン行列が関係することから予想できる結果です。

このように具体的に書いたことから分かるように、CFL では全てのカラー、フレーバがクォーク対を作ります。これに対して 2SC では、上で触れたように 1 つのカラーがクォーク対を作りません。そのため、CFL ではカラーの対称性 $SU(3)_C$ は完全に破れ、全てのグルーオンが質量を得ます。

CFL でも 2SC と同様に電荷に関しては新しい組み合わせによる保存が出てきます。電荷は

$$\exp[i\alpha Q]\ ,\ Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

今度はフレーバも 3 つあることを踏まえて、カラー空間での行列をうまくくっつけて変換が不変であるようにします。話は簡単で、カラー空間においてフレーバ空間の変換 $\exp[i\alpha Q]$ に対して符号が逆の同じ変換を行わせれば、最終的に打ち消しあって不変にしてくれるということを利用します。これは 2SC と違ってカラーとフレーバが同じ 3 成分持ちであるためです。問題なのはゲルマン行列の組み合わせで Q が作れるのかですが

$$\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8$$

で問題なく Q になります。よって CFL においては

$$\tilde{Q}=Q-\frac{1}{2}\lambda_2-\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8$$

という形になります。一方バリオン数の保存ですが、こっちはどうにもならなくて対称性は壊れます。

というわけで、CFL において対称性は

$$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_R\times U(1)_B\times U(1)_Q\ \Rightarrow\ SU(3)_{C+V}\times U(1)_{\tilde{Q}}\times Z_2$$

このようになります。$SU(3)_{C+V}$ はカラーとフレーバの同時回転に対して不変であることを表しています。なんで V がついているのかを直感的に言えば、カラーの対称性はベクトル変換、フレーバの変換はベクトル変換とカイラル変換によるものなので (カイラル対称性と言ったとき本来はベクトル変換と軸性変換両方を含めるんですが、大抵は軸性変換のことだけを指すようになっています)、フレーバの変換をカラーに合わせなければいけないことから、軸性変換の部分が破れてベクトル変換だけが生き残り、軸性変換に対する対称性、つまりカイラル対称性が破れます。この部分を式的に書けば

$$SU(3)_L\times SU(3)_R\ \Rightarrow\ SU(3)_V$$

ということです (人によっては $SU(3)_{C+L+R}$ とも書いているようです)。これも CFL の特徴でクォーク凝縮 $<\bar{q}q>$ によってではなくカイラル対称性が破られます ($<\bar{q}q>=0$ でも破られるということ)。

CFL の場合では 2SC と違い質量 0 のゴールドストーンボソンが出てきます。カラー対称性は局所的な対称性なので、ここが破れてもゴールドストーンボソンは出てきません。出てくるのは、カイラル対称性 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ とバリオン数の保存 $U(1)$ の部分からです。カイラル対称性が破れるので $3\times 3-1=8$ 個、$U(1)$ 対称性からは 1 個作られるので、9 個のゴールドストーンボソンが出てきます (細かいことを言えば $U(1)_A$ の軸性アノマリーからもう 1 個ゴールドストーンボソンが出てくる)。

ちなみに、CFL では 3 つのフレーバ u,d,s が出てきますが、この中で s クォークだけがあからさまに質量が大きいです。そのため、u,d と s を区別した 2+1 フレーバでの CFL というのも考えられています。

これが 2SC と CFL の基本的な話です。ここから、それぞれの場合でのエネルギーギャップを計算したり、どのような現象が起きているのかを具体的に調べていくことになります。

最後にちょっとした話題を載せておきます

物性で注目されている現象として BEC-BCS クロスオーバというのがあります。BEC はボーズ・アインシュタイン凝縮のことで、BCS は超伝導です。これは、ボーズ・アインシュタイン凝縮から BCS 状態へと変化していくのではないのかという話です。クロスオーバ (crossover) と言っているように連続的に BEC から BCS への変化だと考えられています。

フェルミオン対による BCS 状態は完全にボソンだと見なせない程度に 2 つのフェルミオンが離れていても可能なために、ボーズ・アインシュタイン凝縮状態ではないとすることができます。しかし、フェルミオン間の距離が縮まっていきボソンと見なせるほど近づけばボーズ・アインシュタイン凝縮が起きることになります。この繋がりを BEC-BCS クロスオーバと呼んでいます。もっと端的に言うなら、強結合 BCS と通常の BCS 間のクロスオーバです。

なんでこんな話を持ち出したのかというと、カラー超伝導でも同じことが起きているんじゃないかと予想できるからです。どうやら 2000 年の辺りから言われ出されているようで、最近でもいろいろと調べられています。例えば、南部-Jona-Lasinio モデルと使ったものとして「BEC-BCS Crossover in the Nambu-Jona-Lasinio Model of QCD」(hep-ph/0703159)、「The NJL model of dense three-flavor matter with axial anomaly: the low temperature critical point and BEC-BCS diquark crossover」(arXiv:1003.0408)、「Role of 2SC pairing in a three-flavor NJL model with axial anomaly」(arXiv:1007.5198) といったものがあります。三番目のは二番目のものから、u, d と s クォークを区別した場合です。他にも相対論的な BEC-BCS クロスオーバ関するものはいくつもありますが、それらは二番目の論文の reference からが探しやすいです。これらの論文は南部-Jona-Lasinio モデルからの数値計算なので、ある程度知識のある人なら途中計算をそれほど追わずになんとなくで読めると思います。