カイラル対称性の回復

ゼロ温度で破れているカイラル対称性が温度効果によって回復することをシュウィンガー・ダイソン方程式を使って示します。この話は一見分かりやすそうですが、現在 (2010 年) でも明確には分かっていません。ここで示すのはかなり単純な場合であって、現在ではここまで単純なものではないだろうと考えられいます。
カイラル対称性については場の量子論「南部・Jona-Lasinio モデル」や「カイラル対称性と PCAC」なんかを見てください。
最初に有限温度でのシュウィンガー・ダイソン方程式をミンコフスキー空間、ユークリッド空間との比較から求めます。
また、最後に補足として、ワード・高橋恒等式も大雑把に求めています。

有限温度では温度の効果によって破られていた対称性が回復することが分かっています。そのため、ゼロ温度で破られていたカイラル対称性も温度効果によって回復することが予想できます。この有限温度におけるカイラル対称性の回復は、ハドロンの閉じ込めが高温において、閉じ込めから開放されることと関連します。これがクォーク・グルーオンプラズマの理論的な予想で、閉じ込められていたクォークとグルーオンが開放されてプラズマ状態のようになるというものです。クォーク・グルーオンプラズマは、現在 (2010 年) 実験による検証が活発に行われている分野です。最近ではクォーク・グルーオンプラズマが完全流体なのではないかという実験結果が出始めています (2004 年ぐらいの RHIC の実験)。理論側によるクォーク・グルーオンプラズマの研究は完全に格子場の理論によって先行されているようで、他の方法はその結果を再現できるのかというのを基本としているようです。

また、密度によってもカイラル対称性を回復させることができます。特に、低温・高密度ではカラー超伝導と呼ばれる状態になるだろうと理論的に予想されています。この現象はまだ理論的な予想のみで実験的な確証はないです。地球上の実験で低温・高密度を作るのは相当難しいからです。そのため、実験的な検証は中性子性以上の高密度星の観測のみとなっています。しかも、クォーク・グルーオンプラズマと違って、格子場の理論でさえ完全には取り扱いきれていない領域です。今のところ $\mu/T < 1$ 程度の縛りがあるそうです (μ は化学ポテンシャル)。

ここでは、カイラル対称性の回復を手っ取り早く見るために、QED でのシュウィンガー・ダイソン方程式を使います。有限温度のシュウィンガー・ダイソン方程式はゼロ温度のものに対して、有限温度でのファインマン則を使えば簡単に変更できます。しかし、一応ゼロ温度と同じ方法を使って導いておきます。

最初に、ミンコフスキー空間、ユークリッド空間、有限温度での生成汎関数を書いておきます。ここでも「有限温度での自己エネルギー」と同じようにミンコフスキー空間のものには M、ユークリッド空間のものには E、有限温度には何もつけないで書き、ユークリッド化の手続きは「ファインマン則〜虚時間法〜」と同じです。

ゼロ温度のミンコフスキー空間では

$$Z_M[J_\mu,\eta,\overline{\eta}] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi} \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_M + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big]$$

$$\mathcal{L}_M = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

このとき作用は

$$iS_M[A_\mu,\psi,\overline{\psi}] = i\int d^4x\mathcal{L}_M$$

ゼロ温度での完全にユークリッド空間版は

$$Z_E[J_\mu,\eta,\overline{\eta}]=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[\int d^4x_E(-\mathcal{L}_E+J_\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)\Big]$$

$$\mathcal{L}_E=\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m-ie\gamma_\mu A_\mu)\psi+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2$$

$$S_E[A_\mu,\psi,\overline{\psi}]=-\int d^4x_E\mathcal{L}_E$$

$$\gamma_0\ \Rightarrow\ \gamma_4\ ,\ \boldsymbol{\gamma}\ \Rightarrow\ i\boldsymbol{\gamma}$$

$$A_0\ \Rightarrow\ -iA_4\ ,\ \boldsymbol{A}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}$$

特に区別していませんが、添え字の位置が揃っている場合はユークリッド空間での内積だとします (計量がクロネッカーデルタ $\delta_{\mu\nu}$)。相互作用項 $\gamma_\mu A_\mu$ は

$$\gamma_\mu A^\mu=\gamma_0A_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A}\ \Rightarrow\ -i\gamma_4A_4-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A}=-i\gamma_\mu A_\mu$$

という置き換えによって i が出てきます。

有限温度、密度にもっていけば

$$Z[J_\mu,\eta,\overline{\eta}]=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[\int_0^\beta d\tau\int d^3x(\mathcal{L}+J_\mu A^\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)\Big]$$

$$\mathcal{L}=\overline{\psi}(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma_0\mu+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m-e\not{A})\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

$$S[A_\mu,\psi,\overline{\psi}]=\int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L}$$

時間 t 以外は解析接続せずに書いています。完全にユークリッド空間的な表記に持っていけば、τ の積分範囲と周期性を除いて、ユークリッド空間と同じ形になります。

ゼロ温度の場合と同じようにして、有限温度の生成汎関数を使ってシュウィンガー・ダイソン方程式を求めていきます。表記を簡略化するために

$$\int_0^\beta d\tau\int d^3x\ \Rightarrow\ \int d^4x$$

$$\delta(\tau)\delta^3(\boldsymbol{x})\ \Rightarrow\ \delta^4(x)$$

と書きます。

ここからの話を完全にユークリッド空間にもっていきたければ、内積をミンコフスキー空間のものからユークリッド空間へと接続すればいいです。

まず、有限温度での生成汎関数

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[S] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\Big[\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big] \end{aligned}$$

が $\overline{\psi}$ で汎関数微分して 0 になればいいので

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta Z}{\delta\overline{\psi}(x)} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)} \exp\Big[\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \Big(\frac{\delta S[A_\nu, \overline{\psi}, \psi]}{\delta\overline{\psi}(x)} + \eta\Big) \exp\Big[\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \Big(\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}(x)}[\frac{\delta}{\delta J^\nu}, -\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}] + \eta\Big) \exp\Big[\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big] \end{aligned}$$

最後の行にいくときに場を汎関数微分に置き換えていますが、ミンコフスキー空間と違い i で割る必要はないです。これは exp 内に i がいないために、源の汎関数微分で素直に場が外に出てくるからです。作用を $\overline{\psi}$ によって汎関数微分すれば、有限温度・密度でのディラック方程式を導き

$$\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}(x)} = (-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma_0\mu + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m - e\not{A})\psi$$

そして、ψ を $\overline{\eta}$、A_μ を J_μ の汎関数微分に置き換えることで Z の外に出せて

$$0 = \big[(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma_0\mu + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m - e\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu})\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}} + \eta\big]Z$$

この式をさらに η で汎関数微分して

$$0 = \big[(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma_0\mu + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m - e\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu})\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_1)} + \delta^4(x_1 - x_2)\big]Z$$

Z を connected なものを導く W に変えるんですが、有限温度 (ユークリッド空間) では (「経路積分〜クライン・ゴルドン場 (相互作用あり)〜」の下のほう参照)

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} &= \frac{\delta^2 \log Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta\log Z}{\delta Z}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)}\right) \\ &= -\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} + \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \\ &= \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \end{aligned}$$

となっているために

$$W[J] = \log Z[J]$$

という置き換えでよくなっています。そうすると $Z = e^W$ としたときの $\eta, \overline{\eta}$ の汎関数微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)}e^W &= \frac{\delta}{\delta\eta(y)}(\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)}e^W) \\
&= (\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)})e^W + (\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)}\frac{\delta W}{\delta\eta(y)})e^W
\end{aligned}$$

となり、$\eta = \overline{\eta} = 0$ で第一項からフェルミオンの厳密な温度グリーン関数

$$G(x, y) = \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(x)}|_{\eta=\overline{\eta}=0} = -\frac{\delta^2 W}{\delta\overline{\eta}(x)\delta\eta(y)}|_{\eta=\overline{\eta}=0}$$

が出てくるので (第二項は 1 点関数なので消える)

$$0 = \big[(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma_0\mu + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m - e\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)})G(x_1, x_2) + \delta^4(x_1 - x_2)\big]e^W \tag{1}$$

これ以降、n 点温度グリーン関数に書き換えるときに式中に源を 0 に取るとは書きません。

ここで、有効作用 Γ を W のルジャンドル変換から

$$\Gamma[A_\mu, \psi, \overline{\psi}] = W[J_\mu, \eta, \overline{\eta}] - \int d^4x(J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} = \overline{\eta}(x)\ ,\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)} = -\eta(x)$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} = A^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)} = \psi(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta\eta(x)} = -\overline{\psi}(x)$$

と定義します。ここら辺はミンコフスキー空間と同じです。グラスマン数の微分は左からかかるように定義しています。このとき、フェルミオンの温度グリーン関数 $G(x, y)$ と有効作用による 2 点関数 $\Gamma(x, y)$ との関係は、ゼロ温度の類似として

$$\int d^4z G(x, z)\Gamma(z, y) = \delta^4(x - y)$$

これを満たすのだとします。そうすると、デルタ関数から逆に計算していくと

$$\begin{aligned}\delta^4(x-y) &= \frac{\delta\eta(x)}{\delta\eta(y)} \\ &= \int d^4z \frac{\delta\psi(z)}{\delta\eta(y)}\frac{\delta\eta(x)}{\delta\psi(z)} \\ &= -\int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(z)}\frac{\delta^2\Gamma[A_\mu,\psi,\overline{\psi}]}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)} \\ &= \int d^4z G(z,y)\frac{-\delta^2\Gamma[A_\mu,\psi,\overline{\psi}]}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}\end{aligned}$$

よって、G の逆として

$$G^{-1}(x,y) = \frac{-\delta^2\Gamma[A_\mu,\psi,\overline{\psi}]}{\delta\psi(x)\delta\overline{\psi}(y)}$$

また、汎関数微分の形では

$$(\frac{\delta^2 W}{\delta\overline{\eta}(x)\delta\eta(y)})^{-1} = \frac{\delta^2\Gamma[A_\mu,\psi,\overline{\psi}]}{\delta\psi(x)\delta\overline{\psi}(y)}$$

と書けます。多分混乱しないと思うので、有効作用は単に Γ と書いていきます。

ルジャンドル変換の式から、(1) での J_μ による汎関数微分は

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu}Ge^W = e^W\frac{\delta G}{\delta J_\mu} + G\frac{\delta}{\delta J_\mu}e^W = e^W\frac{\delta G}{\delta J_\mu} + GA_\mu e^W$$

これによって

$$\begin{aligned}0 &= \big(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma_0\mu + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m - e\gamma_\mu(\frac{\delta}{\delta J_\mu} + A^\mu)\big)G(x_1,x_2) + \delta^4(x_1-x_2) \\ &= \big(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma_0\mu + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m - e\gamma_\mu A^\mu - e\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu}\big)G(x_1,x_2) + \delta^4(x_1-x_2)\end{aligned} \tag{2}$$

A_ν の J による汎関数微分は

$$\begin{aligned}\frac{\delta J^\mu(x)}{\delta A_\nu(y)} &= (\frac{\delta A_\nu(y)}{\delta J^\mu(x)})^{-1} \\ &= (\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\frac{\delta W}{\delta J^\nu(y)})^{-1} \\ &= (\frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x)\delta J^\nu(y)})^{-1} \\ &= D^{-1}_{\mu\nu}(x,y)\end{aligned}$$

$D_{\mu\nu}$ は光子の厳密な温度グリーン関数です ($J_\mu = 0$ として)。これを使うことで

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} = \int d^4z\frac{\delta A_\nu(z)}{\delta J^\mu(x)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)} = \int d^4z\frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)\delta J^\nu(z)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)} = \int d^4z D_{\mu\nu}(x,z)\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}$$

これらから G を J_μ で汎関数微分したものは

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}G(x,y) &= \int d^4zD_{\mu\nu}(x,z)\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}(\frac{-\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x)\delta\overline{\psi}(y)})^{-1}\\
&= \int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x,z)(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x)\delta\overline{\psi}(u)})^{-1}\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(u)\delta\overline{\psi}(v)}(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(v)\delta\overline{\psi}(y)})^{-1}\\
&= \int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x,z)(-G(x,u))\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(u)\delta\overline{\psi}(v)}(-G(v,y))\\
&= -e\int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x,z)G(x,u)\Gamma^\nu(z;u,v)G(v,y)
\end{aligned}$$

$\Gamma^\nu(z;u,v)$ は

$$-e\Gamma^\nu(z;u,v) = \frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(u)\delta\overline{\psi}(v)}$$

としています。これを (2) に入れることで ($J_\mu=0$ で $A_\mu=0$)

$$-\delta^4(x_1-x_2) = (-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma_0\mu+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)G(x_1,x_2)\quad +e^2\gamma_\mu\int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x_1,z)G(x_1,u)\Gamma^\nu(z;u,v)G(v,x_2)$$

第一項と第二項の文字を整理して

$$\begin{aligned}
-\delta^4(x_1-x_2) = &\int d^4z(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma_0\mu+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)G(z,x_2)\delta^4(z-x_1)\\
&+e^2\gamma_\mu\int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x_1,v)G(x_1,u)\Gamma^\nu(v;u,z)G(z,x_2)\\
= &\int d^4z\big((-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma_0\mu+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)\delta(z-x_1)-\Sigma(x_1,z)\big)G(z,x_2)\\
\delta^4(x_1-x_2) = &-\int d^4z\big((-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma_0\mu+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)\delta(z-x_1)-\Sigma(x_1,z)\big)G(z,x_2)
\end{aligned}$$

Σ は

$$-\Sigma(x_1,z) = e^2\int d^4ud^4v\gamma^\mu D_{\mu\nu}(x_1,v)G(x_1,u)\Gamma^\nu(v;u,z)$$

このように取っています。(**??**) の右辺の ( ) 内の第一項は明らかに最低次での温度グリーン関数の逆で (「虚時間法〜ディラック場〜」参照)

$$-(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma_0\mu+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)S_F(x) = \delta^4(x)$$

これはフーリエ変換することで

$$S_F^{-1}(p) = -(\gamma_0 p_0 + \gamma_0 \mu - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m) \qquad (p_0 = i\omega_n = 2\pi i T(n+\frac{1}{2}))$$

となります。そして、第二項の自己エネルギー部分はフーリエ変換によって

$$-\Sigma(p) = e^2 \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\gamma^\mu D_{\mu\nu}(q)G(p-q)\Gamma^\nu(p,q)$$

となります。ゼロ温度の場合としていることは同じですが

$$\int d^4x \ \Rightarrow \ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \ , \ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ \Rightarrow \ T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

$$\int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_{n'}-\omega_n)\tau} = \beta\delta_{nn'}$$

となっています。

　というわけで、運動量表示のシュウィンガー・ダイソン方程式の両辺に G^{-1} をかけることで

$$\begin{aligned} G^{-1}(p) &= -(\gamma_0 p_0 + \gamma_0\mu - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m) - e^2 T\sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\gamma^\mu D_{\mu\nu}(q)G(p-q)\Gamma^\nu(p,q) \\ &= S_F^{-1}(p) + \Sigma(p) \end{aligned}$$

今は $p_0 = i\omega_n$ として書いていますが、$p_0 = i\omega_n + \mu$ と置けば

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= -(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m) + \Sigma(p) \\ &= -(\gamma_\mu p^\mu - m) + \Sigma(p) \\ &= S_F^{-1}(p) + \Sigma(p) \end{aligned}$$

このように化学ポテンシャルを p_0 の中にいれてしまうことで、ミンコフスキー空間でのシュウィンガー・ダイソン方程式と符号以外は同じ格好にすることができます。Σ の部分でも、フェルミオンの厳密な温度グリーン関数において同じような置き換えがでるだけです。なので、$p_0 = i\omega_n + \mu$ とするだけで問題はないです。自己エネルギーは、フェルミオンの厳密な温度グリーン関数が

$$G^{-1}(p) = S_F^{-1}(p) + \Sigma(p)$$

となるように作ったので、そのまま有限温度でのファインマン則に対応しています。なので、有限温度でのシュウィンガー・ダイソン方程式は、ゼロ温度でのファインマン図を有限温度でのファインマン則を使って式にすればいいだけだということが確かめられました。直接的な置き換えは

ゼロ温度ミンコフスキー空間

$$G^{-1}(p) = \not{p} - m - ie^2\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma^\mu D_{\mu\nu}(q)G(p-q)\Gamma^\nu(p,q)$$

$$G^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p)$$

有限温度

$$G^{-1}(p) = -(\not{p} - m) - e^2 T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \gamma^\mu D_{\mu\nu}(q) G(p-q) \Gamma^\nu(p,q)$$

$$G^{-1}(p) = -(\not{p} - m) + \Sigma(p)$$

この二つを比較すればいいです (ミンコフスキー空間の伝播関数には i を含めてません)。大雑把に言えば、ゼロ温度のものの両辺にマイナスをかけて、積分を $id^4p \Rightarrow -d^4p_E$、運動量を $p_0 = i\omega_n$ とすれば有限温度の形に持っていけます。伝播関数の符号を反転させる必要がありますが、打ち消しあってプラスになるので特に害を与えません。なので、ユークリッド化して松原振動数に変えればいいだけだと分かります。

　これで有限温度でのシュウィンガー・ダイソン方程式が求められたので、カイラル対称性の回復を見ます。厳密なフェルミオンの温度グリーン関数を

$$G(p) = \frac{-1}{A(p)\gamma_\mu p^\mu - B(p)}$$

と書くことにすれば

$$-A(p)\gamma_\mu p^\mu + B(p) = -(\gamma_\mu p^\mu - m) - e^2 T \sum_l \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \gamma^\mu D_{\mu\nu}(k) \frac{-1}{A(q)\gamma_\mu q^\mu - B(q)} \Gamma^\nu(p,q)$$

となります (後の計算の都合上、光子の伝播関数の方が $k = p - q$ となるようにしています)。これにはしご近似を行うことで

$$-A(p)\gamma_\mu p^\mu + B(p) = -(\gamma_\mu p^\mu - m) - e^2 T \sum_l \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \gamma^\mu D^0_{\mu\nu}(k) \frac{-1}{A(q)\gamma_\mu q^\mu - B(q)} \gamma^\nu$$

l は $q_0 = i\omega_l + \mu$ に対してです ($k_0 = p_0 - q_0 = i\omega_n - i\omega_l$)。光子の温度グリーン関数 $D^0_{\mu\nu}(k)$ は最低次の

$$D^0_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

これになります。後は場の量子論の「カイラル対称性と力学的破れ」でやったようにトレースを取って整理していけばいいです。しかし、ここで問題が本当はあります。それは、有限温度においては時間成分と空間成分が分離しているということです。大雑把に言えば、ゼロ温度では時間と空間をまとめて扱えていたのが、有限温度では扱えなくなっているということです。そのために、有限温度における一般的なフェルミオンの温度グリーン関数は

$$S(p) = \frac{-1}{C(p)\gamma_0 p^0 - A(p)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - B(p)}$$

のようになります。よって、有限温度でのシュウィンガー・ダイソン方程式は C, A, B の 3 つの連立した方程式となります。しかし、今はそんな細かいことに関わるつもりはないので、ゼロ温度と同じように最初からランダウ

ゲージを取って $C=A=1$ だと思ってしまいます (この設定は 3 つの連立をマジメに解けば不正確であることが分かります)。

話を戻して、両辺に対してトレース (スピノールに対する) をとると

$$\begin{aligned}
4B(p) &= 4m - e^2 T \sum_l \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathrm{tr}\Big[\gamma^\mu \frac{1}{k^2}\big(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\big)\frac{-(\gamma_\mu q^\mu + B(q))}{q^2 - B^2(q)}\gamma^\nu\Big] \\
&= 4m - e^2 T \sum_l \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathrm{tr}\Big[\big(\frac{g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu}{k^2} - \frac{k^2}{k^4}\big)\frac{-B(q)}{q^2 - B^2(q)}\Big] \\
&= 4m - 4e^2 T \sum_l \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{3}{k^2}\frac{-B(q)}{q^2 - B^2(q)} \qquad (\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I) \\
B(p) &= m + e^2 T \sum_l \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)}
\end{aligned}$$

これの角度積分は簡単に実行できて

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)} &= 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{q}|}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(p-q)^2}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)} \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{q}|}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{p^2 + q^2 - 2p_\mu q^\mu}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)} \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{q}|}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 + q_0^2 - \boldsymbol{q}^2 - 2p_0 q_0 + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)} \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{q}|}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{(p_0 - q_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 + 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)}
\end{aligned}$$

ここで、変数変換

$$X = (p_0 - q_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 + 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta \ , \ dX = -2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin\theta$$

$$\theta = \pi \ : \ X_+ = (p_0 - q_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$$

$$\theta = 0 \ : \ X_- = (p_0 - q_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 + 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$$

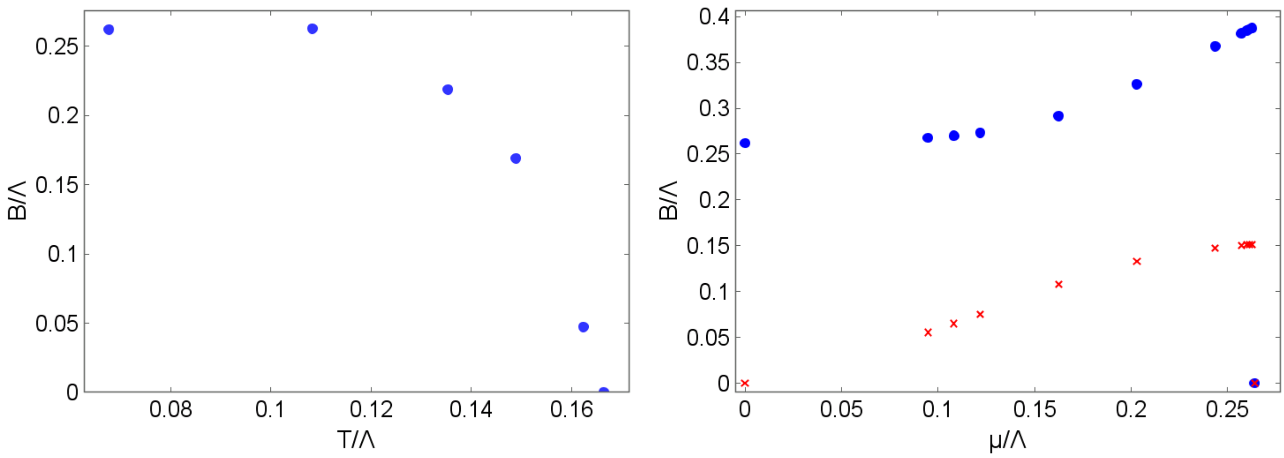
を行うことで

$$2\pi \int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{q}|}{(2\pi)^3} \int_{X_-}^{X_+} dX \frac{1}{-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{X}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{q}|}{(2\pi)^3} \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)} \log[\frac{X_+}{X_-}]$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{q}|}{(2\pi)^3} \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)} \log \frac{(p_0 - q_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}{(p_0 - q_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 + 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d|\boldsymbol{q}| \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}\frac{3B(q)}{q^2 - B^2(q)} \log \frac{(p_0 - q_0)^2 - (|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}|)^2}{(p_0 - q_0)^2 - (|\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{q}|)^2}$$



カイラル対称な $m=0$ として、和の l を m と書くことにして、$p_0 = i\omega_n + \mu,\ q_0 = i\omega_m + \mu,\ |\boldsymbol{p}| = x,\ |\boldsymbol{q}| = y$ と書くと

$$
\begin{aligned}
B_n(x) &= -\frac{e^2 T}{8\pi^2}\sum_m \int_0^\infty dy \frac{y^2}{xy}\frac{3B_m(y)}{(i\omega_m+\mu)^2 - y^2 - B_m^2(y)}\log\frac{-(\omega_n-\omega_m)^2-(x+y)^2}{-(\omega_n-\omega_m)^2-(x-y)^2} \\
&= \frac{3e^2 T}{8\pi^2}\sum_m \int_0^\infty dy \frac{y}{x}\frac{B_m(y)}{(\omega_m - i\mu)^2 + y^2 + B_m^2(y)}\log\frac{(\omega_n-\omega_m)^2+(x+y)^2}{(\omega_n-\omega_m)^2+(x-y)^2}
\end{aligned}
$$

ここまでは普通に計算してこれますが、ここから先は解析的に扱いきれていません。なので、数値計算の結果だけ載せておきます。カイラル対称性は $B_n(x) \neq 0$ のときに破られるので、$B_n(x) = 0$ となる地点がカイラル対称性が回復する臨界点です。結合定数はゼロ温度・密度でカイラル対称性を破る必要があるので、$e^2/4\pi = 2$ にとり、紫外の切断 Λ を 7、赤外の切断を 0.005 に取っています。和の範囲は $m = -10 \sim 9$ にしています。この和の範囲は、図に載っている温度ならなんとか可能だろうというもので、これ以上温度 T を下げるならもっと大きめにとらなくてはいけなくなります。このことはゼロ温度極限で和は積分になることから予想できると思います。こんな事情があるので相当精度は悪いです。

図は左側が温度、右側が密度で、$B_0(0)$ の温度依存性を示しています。$B_0(0)$ を選んでいるのは、これが $B_n(x)$ の最大値になっているからです。温度側では $\mu = 0$ とし、密度側では温度を $T/\Lambda = 0.07$ に取っています。$\mu \neq 0$ では $B_n(x)$ は虚部を持つことになって、マルが $B_n(x)$ の実部で、バツが虚部を表わしています。見て分かるように、温度の場合は 2 次相転移 (連続的に $B_n(x) = 0$)、密度の場合は 1 次相転移 ($B_n(x) = 0$ へ連続的に繋がっていない) となっています。相転移と言っているのは、カイラル対称性が破れている相から回復している相への相転移です。このように、温度や密度の効果によってカイラル対称性は回復します。また、載せていませんが、1 次相転移と 2 次相転移が変わる点、3 重臨界点 (tricritical point) が存在しています。実際には密度の場合は、有効ポテンシャルを使わないと正確に調べきれないんですが、そこら辺は無視しています。

最後にもう少し新しい話もしておきます。最初にクォーク・グルーオンプラズマとはカイラル対称性の回復は関連しているように言いましたが、ひっかかりがあります。それは、クォーク・グルーオンプラズマはハドロンの閉じ込めから閉じ込められていない状態への変化 (閉じ込め相から非閉じ込め相への相転移と表現されます) だという点です。現在、カイラル対称性の破れがハドロンの閉じ込めと関連していることはほぼ正しいとされていますが、カイラル対称性の回復による相転移 (カイラル相転移) が閉じ込め相から非閉じ込め相への相転移と全く同じだと言い切ることが出来ていません。実際に、カイラル相転移の温度と非閉じ込め相への相転移温度が違っているという結果が存在しています。そして、反対にほぼ同じだとする結果も存在しています。つまり、何が正しいのか分かっていません。しかし、格子シミュレーションによる解析ではカイラル相転移と非閉じ込めへの相転移の仕方は非常に似ているために、何かしらの関係はあるだろうとされています。

ついでにカイラル相転移の仕方の話もしておきます。ここではフレーバに対して $SU(2)$ として 2 種類のみを考えました。この 2 種類は u, d クォークであるために、ほぼ質量はないとみなせ、上でのような話になります。で、

この場合は温度に対して 2 次相転移を起こしているのは見てきたとおりです。しかし、この次に重いクォークである s クォークを考えると状況が変わります。というより、カレント質量を 0 としないで計算した場合です。カレント質量はくり込みと関係しているために、扱いが少し面倒になるんですが、その状況で計算してみると、相転移は 2 次相転移でなくクロスオーバーに変化します (クロスオーバーは飛びのない相転移のこと)。これは s クォークの質量がカイラル相転移後も消えずに残るためです (u, d クォークだけなら十分無視できる大きさしかないのでほぼ 2 次相転移とみなすこともできる)。現在では温度に対するカイラル相転移はクロスオーバーになっているということで固まってきています。

補足：有限温度でのワード・高橋恒等式

汎関数関連の式が出てきたので、ついでに温度グリーン関数によるワード・高橋恒等式も求めておきます。出発点は電磁場のラグランジアンなので

$$Z[J_\mu, \eta, \overline{\eta}] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\Big[\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big]$$

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(-\gamma_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma_0\mu + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m - e\not{A})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

これにゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda\ ,\ \psi \to \psi - ie\Lambda\psi\ ,\ \overline{\psi} \to \overline{\psi} + ie\Lambda\overline{\psi}$$

を行えば当然、Λ の一次のオーダで

$$Z = Z + \int d^4x\Lambda\left(-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu J^\mu - ie(\overline{\eta}\psi - \overline{\psi}\eta)\right)Z$$

みたいになります。括弧部分を汎関数微分の形にして

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta J^\mu}) - \partial_\mu J^\mu - ie(\overline{\eta}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta}{\delta\eta})\right)Z = 0$$

これを $Z = e^W$ と有効作用を使って書けば

$$\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta J^\mu}) - \partial_\mu J^\mu - ie(\overline{\eta}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta}{\delta\eta})\right)e^W \\
&= \big(-\frac{1}{\alpha}\Box\big(\partial^\mu\frac{\delta W}{\delta J^\mu}\big) - \partial_\mu J^\mu - ie\big(\overline{\eta}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\big)\big)e^W \\
&= -\frac{1}{\alpha}\Box\big(\partial^\mu\frac{\delta W}{\delta J^\mu}\big) - \partial_\mu J^\mu - ie\big(\overline{\eta}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\big) \\
&= -\frac{1}{\alpha}\Box\big(\partial^\mu A_\mu(x)\big) + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} - ie\big(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x) - \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(x)\big)
\end{aligned}$$

この形はゼロ温度の場合と同じなので、$\overline{\psi}(x_1), \psi(y_1)$ で微分すると

$$\partial_\mu \frac{\delta^3 \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta \overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)} = ie\Big(\frac{\delta \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta \overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta\psi(x)}\psi(x) - \frac{\delta \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta \overline{\psi}(x_1)\delta\psi(x)}\delta^4(x-y_1)$$
$$- \frac{i\delta \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\overline{\psi}(x_1)\psi(y_1)\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(x) - \frac{\delta \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta\psi(y_1)\delta\overline{\psi}(x)}\delta^4(x-x_1)\Big)$$

$\overline{\psi} = \psi = A_\mu = 0$ として

$$\partial_\mu \frac{\delta^3 \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta \overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)} = -ie\Big(\frac{\delta \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta \overline{\psi}(x_1)\delta\psi(x)}\delta^4(x-y_1) - \frac{\delta \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta \overline{\psi}(x)\delta\psi(y_1)}\delta^4(x-x_1)\Big)$$

ここまでは、∂_μ がユークリッド空間のものになるという点以外、ミンコフスキー空間でのゼロ温度と同じです。
n 点温度グリーン関数に書き換えていきます。フーリエ変換は

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \cdots e^{i(p_1x_1 - p_2x_2 \cdots)} G(x_1, x_2, \cdots) = \beta\delta_{n_1,n_2\cdots}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\cdots)G(p_1, p_2, \cdots)$$

$$e^{ip_1x_1} = e^{i\omega_n\tau - \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{x}_1}$$

このようになっており、結果はゼロ温度の場合と同じなので

$$\frac{\delta \Gamma[\psi, \overline{\psi}, A_\mu]}{\delta \overline{\psi}(x_1)\delta\psi(x)}\delta^4(x-y_1) \ \Rightarrow\ -(2\pi)^4\delta^4(p' - (p+q))S^{-1}(p+q)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta \overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)} \ \Rightarrow\ -ieq_\mu(2\pi)^4\delta(p'-p-q)\Gamma^\mu(p,q,p') \quad (q_\mu = (i\omega_n, -\boldsymbol{q}))$$

簡単のために

$$\beta\delta_{n_1,n_2\cdots}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\cdots) \ \Rightarrow\ (2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2\cdots)$$

と書いています。今の場合での微分は

$$\partial_\mu \exp[-iqx] = (i\frac{\partial}{\partial\tau}, \nabla)\exp[-i\omega_n\tau + i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}] \ \Rightarrow\ (\omega_n, i\boldsymbol{q}) = i(-i\omega_n, \boldsymbol{q}) = -i(i\omega_n, -\boldsymbol{q})$$

このように作用しています。よって、まとめれば

$$\begin{aligned} -ieq_\mu(2\pi)^4\delta(p'-p-q)\Gamma^\mu(p,q,p') &= ie(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)G^{-1}(p+q) - ie\delta(p'-q-p)G^{-1}(p) \\ -q_\mu\Gamma^\mu(p,q,p+q) &= G^{-1}(p+q) - G^{-1}(p) \end{aligned}$$

注意することはミンコフスキー空間の表記法を使っている時には、ゼロ温度の場合と符号が反転しているという点です。「頂点〜QED〜」の最後に示した結果をこれに入れれば、成立していることが確かめられます。一応ここで示しておきます。右辺はフェルミオンの温度グリーン関数によって

$$G^{-1}(p_2) - G^{-1}(p_1) = -p_2^\mu \gamma_\mu + \Sigma(p_2) - (-p_1^\mu \gamma_\mu + \Sigma(p_1)) = -(p_2^\mu - p_1^\mu)\gamma_\mu + \Sigma(p_2) - \Sigma(p_1)$$

q は $p_2 - p_1$ なので、左辺は

$$-(p_2^\mu - p_1^\mu)\Gamma_\mu(p_1, p_2; q) = -(p_2^\mu - p_1^\mu)(\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(1)}(p_1, p_2; q))$$

それぞれの HTL 近似の結果は

$$-(p_2 - p_1)^\mu \Gamma_\mu^{(1)} = -\frac{e^2 T^2}{32\pi} \int d\Omega \Big(\frac{\gamma_0 - e^j \gamma_j}{i\omega_{n_1} + |\boldsymbol{p}_1| \cos\theta_1} - \frac{\gamma_0 - e^j \gamma_j}{i\omega_{n_2} + |\boldsymbol{p}_2| \cos\theta_2} \Big)$$

$$\Sigma(p_2) - \Sigma(p_1) = \frac{e^2 T^2}{32\pi} \int d\Omega \Big(\frac{\gamma_0 - e^i \gamma_i}{i\omega_{n_2} + |\boldsymbol{p}| \cos\theta} - \frac{\gamma_0 - e^i \gamma_i}{i\omega_{n_1} + |\boldsymbol{p}| \cos\theta} \Big)$$

となるので、温度グリーン関数によるワード・高橋恒等式を満たします。