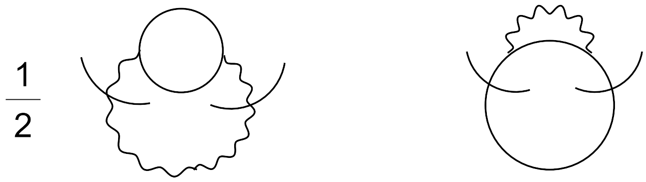
発散の除去

発散する項を消すための相殺項を計算します
図としては



これらを $\log Z_2$ から引きます。括弧で囲まれている部分が温度と化学ポテンシャルを 0 の極限に持っていく部分です。なので、有限温度での伝播関数がゼロ温度での図に繋がっている形をしています。QED の場合 ϕ^4 理論と違って、ゼロ温度部分に有限温度の伝播関数が持っている運動量が入り込んでいるので、単純にゼロ温度の結果を流用できませんし、積分の形を合わせないとどこに対応するのかが分からないので、有限温度の方法で計算しなおします。
ゼロ温度での真空偏極を持っている図から計算していきます。これを括弧の部分はゼロ温度、密度極限をとるということから

$$T\sum_{n_{\boldsymbol{k}}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\Big[\lim_{T,\mu\to 0}\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$$
$$\times T\sum_{n_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{p^2-m^2}T\sum_{n_{\boldsymbol{q}}}\frac{-\mathrm{tr}[\gamma^\mu(p^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\mu(q^\beta\gamma_\beta+m)]}{q^2-m^2}\frac{e^{\beta(q_0+k_0-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}}{p_0-q_0-k_0}\Big]$$

このようになります (係数の 1/2 と βV は抜いています)。クロネッカーデルタは変形させてあります。トレースは

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu(p^\alpha\gamma_\alpha+m)\gamma_\mu(q^\beta\gamma_\beta+m)]=8(-p\cdot q+2m^2)$$

なので

$$-T\sum_{n_{\boldsymbol{k}}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}[\lim_{T,\mu\to 0}\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$$
$$\times T\sum_{n_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{p^2-m^2}T\sum_{n_{\boldsymbol{q}}}\frac{8(-p\cdot q+2m^2)}{q^2-m^2}\frac{e^{\beta(q_0+k_0-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}}{p_0-q_0-k_0}]$$
$$=-T\sum_{n_{\boldsymbol{k}}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}[\lim_{T,\mu\to 0}\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$$
$$\times T\sum_{n_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{p^2-m^2}T\sum_{n_{\boldsymbol{q}}}\frac{8(-p_0q_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2)}{q^2-m^2}\frac{e^{\beta(q_0+k_0-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}}{p_0-q_0-k_0}]\tag{1}$$

これを積分に変えて計算するんですが、1 回同じようにやっているので簡単に求められます。$n_{\boldsymbol{q}}$ では

$$T\sum_{n_{\boldsymbol{q}}}\frac{-p_0q_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{q^2-m^2}\frac{e^{\beta(q_0+k_0-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}}{p_0-q_0-k_0} = T\sum_{n_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{q^2-m^2}f(p_0,q_0,k_0)$$
$$= \frac{1}{2E_q}f(p_0,E_q,k_0)N_F^-(E_q)+\frac{1}{2E_q}f(p_0,-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)$$

次に $n_{\boldsymbol{p}}$ を実行すれば

$$\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\big[\frac{1}{2E_q}f(E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)N_F^-(E_q)+\frac{1}{2E_q}f(E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)\big]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$+\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\big[\frac{1}{2E_q}f(-E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)N_F^-(E_q)+\frac{1}{2E_q}f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)\big](N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-1)$$

整理していくと

$$\frac{1}{4E_pE_q}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)N_F^-(E_q)+f(E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)\big]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$+\frac{1}{4E_pE_q}\big[f(-E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)N_F^-(E_q)+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)\big](N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)$$
$$=\frac{1}{4E_pE_q}\big[f(E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)N_F^-(E_q)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+f(E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$+f(-E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)N_F^-(E_q)(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)+f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1)(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)\big]$$

各項をみていきます

$$f(E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)N_F^-(E_q)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$=\frac{2m^2-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}-k_0}(e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}+k_0-\mu)}-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$=\frac{2m^2-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}-k_0}\big[e^{\beta k_0}(\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}-1)-(\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}-1)\big]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$=\frac{2m^2-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}-k_0}\big[e^{\beta k_0}(N_F^-(E_p)-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_p))-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_p)\big]$$

今計算したいものは温度と化学ポテンシャルが 0 の極限なので、この項はその極限では消えます。このように相当な部分が落ちていき、生き残るのは

$$f(E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$

$$f(-E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)N_F^-(E_q)$$

の部分から出てきます。展開していくと

$$
\begin{aligned}
&f(E_{\boldsymbol{p}},-E_q,k_0)(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\\
&\qquad=\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}(e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}+k_0-\mu)}-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)})(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\\
&\qquad=\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}(e^{\beta k_0}e^{-\beta(E_{\boldsymbol{q}}+\mu)}-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)})(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\\
&\qquad=\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}\big(e^{\beta k_0}\frac{N_F^+(E_q)}{1-N_F^+(E_q)}-\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}+1\big)(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\\
&\qquad=\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}\big[-e^{\beta k_0}N_F^+(E_q)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-(N_F^+(E_q)-1)+(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big]\\
&\qquad=\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}\big[-e^{\beta k_0}N_F^+(E_q)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_q)+1+(N_F^+(E_q)-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big]
\end{aligned}
$$

極限を取れば

$$
\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}
$$

これが生き残ります。もう片方は

$$
\begin{aligned}
&f(-E_{\boldsymbol{p}},E_q,k_0)(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)N_F^-(E_q)\\
&\qquad=\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{-E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}-k_0}(e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}+k_0-\mu)}-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)})(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)N_F^-(E_q)\\
&\qquad=-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+k_0}\big[e^{\beta k_0}e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}-e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}\big](N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)N_F^-(E_q)\\
&\qquad=-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+k_0}\big[e^{\beta k_0}(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1-(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)N_F^-(E_q))+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_q)\big]
\end{aligned}
$$

この場合では

$$
\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+k_0}e^{\beta k_0}
$$

が残ります。k_0 は有限温度の伝播関数にくっついているものなので、取っておく必要があります。というわけで、温度、化学ポテンシャル 0 の極限では

$$\frac{1}{4E_pE_q}\Big(\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}+\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+k_0}e^{\beta k_0}\Big)$$
$$=\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}+\frac{e^{\beta k_0}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+k_0}\Big)$$

これを (1) に入れれば

$$-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$$
$$\times T\sum_{n_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{k^2}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}+\frac{e^{\beta k_0}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+k_0}\Big)$$

なので、これも同じように $n_{\boldsymbol{k}}$ の和を積分に変えて計算していくことで

$$T\sum_{n_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{k^2}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-k_0}+\frac{e^{\beta k_0}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+k_0}\Big)$$
$$=-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)N_B$$
$$-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{-\beta E_{\boldsymbol{k}}}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}\Big)(N_B+1)$$
$$=-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)N_B$$
$$-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{-\beta E_{\boldsymbol{k}}}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}\Big)e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}N_B$$
$$=-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)N_B$$
$$-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}\Big)N_B$$
$$=-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_q}\Big(\frac{N_B}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}N_B}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}N_B}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{N_B}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}\Big)$$
$$=-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\Big(\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}\Big)N_B$$

N_B は省略していますが、$N_B(E_{\boldsymbol{k}})$ です。さらに変形を続けていきます

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\Big(\frac{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}+\frac{e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}})}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\Big)N_B\\
&=-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\frac{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}+e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}}(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}})}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}N_B\\
&=-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\frac{E_{\boldsymbol{p}}(1+e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}})+E_{\boldsymbol{q}}(1+e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}})+E_{\boldsymbol{k}}(1-e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}})}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}N_B\\
&=-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\frac{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+e^{\beta E_{\boldsymbol{k}}})N_B-E_{\boldsymbol{k}}}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\\
&=-\frac{2m^2+E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\frac{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+2N_B)-E_{\boldsymbol{k}}}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\\
&=-\frac{1}{2}\frac{1}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\big)\big[(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+2N_B)-E_{\boldsymbol{k}}\big]\\
&=-\frac{1}{8E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\big[(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+2N_B)-E_{\boldsymbol{k}}+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\big((E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+2N_B)-E_{\boldsymbol{k}}\big)\big]\\
&=-\frac{1}{8E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\big[(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+2N_B)-E_{\boldsymbol{k}}+2Y_+\big((E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+2N_B)-E_{\boldsymbol{k}}\big)\big]\\
&=-\frac{1}{8E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\big[E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}+2(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})N_B+2Y_+\big((E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(1+2N_B)-E_{\boldsymbol{k}}\big)\big]
\end{aligned}
$$

ここで、温度依存性のない項は無視して

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{8E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\big[2(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})N_B+4N_BY_+(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})\big]\\
&\quad=-\frac{1}{8E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}\big[2(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})N_B+4N_BY_+(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})-4N_BY_-(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})+4N_BY_-(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})\big]
\end{aligned}
$$

このようにすれば

$$
4N_B(Y_+D_+-Y_-D_-)+4N_BY_-(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})
$$

となるので、$I_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}$ の計算で出てきたように第一項は $\boldsymbol{q}$ 積分によって消え、第二項が $\boldsymbol{k}$ 積分によって消えます。よって生き残るのは

$$
\begin{aligned}
&-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{-1}{4E_pE_qE_{\boldsymbol{k}}}(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})N_B\\
&\quad=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})[\frac{N_B}{4E_qE_{\boldsymbol{k}}}+\frac{N_B}{4E_pE_{\boldsymbol{k}}}]\\
&\quad=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{N_B}{2E_pE_{\boldsymbol{k}}}
\end{aligned}
$$

これにトレースからの 8 と対称因子 1/2 がかかるので、この図の結果は

$$2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{N_B}{E_pE_{\boldsymbol{k}}} \tag{2}$$

となります。
次にフェルミオンの自己エネルギーを含んだ図を計算します。式にすると

$$\begin{aligned}-\mathrm{tr}T\sum_{n_{\boldsymbol{p}}}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{(p^\alpha\gamma_\alpha+m)}{p^2-m^2}\Big[\lim_{T,\mu\to 0}\int\frac{d^3qd^3k}{(2\pi)^6}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})&\\ \times T\sum_{n_{\boldsymbol{q}}}\frac{\gamma^\mu(q^\beta\gamma_\beta+m)\gamma_\mu}{q^2-m^2}T\sum_{n_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{k^2}\frac{e^{\beta(q_0+k_0-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}}{p_0-q_0-k_0}\Big]&\end{aligned} \tag{3}$$

トレースは極限をとった後に取ることにします。$\gamma^\mu(q^\beta\gamma_\beta+m)\gamma_\mu$ は

$$\gamma^\mu(q^\beta\gamma_\beta+m)\gamma_\mu=-2q^\beta\gamma_\beta+4m$$

と計算できます。ここからやることは何も変わらないので、同じ手順を踏んでいきます。$n_{\boldsymbol{k}}$ では

$$\begin{aligned}&T\sum_{n_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{k^2}\frac{e^{\beta(q_0+k_0-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}}{p_0-q_0-k_0}\\ &\qquad=-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}f(p_0,q_0,E_{\boldsymbol{k}})N_B-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}f(p_0,q_0,-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)\end{aligned}$$

$n_{\boldsymbol{q}}$ では

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}T\sum_{n_{\boldsymbol{q}}}\left[f(p_0,q_0,E_{\boldsymbol{k}})N_B+f(p_0,q_0,-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)\right]\\ &\quad=-\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}}}\Big[\big(f(p_0,E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_B+f(p_0,E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)\big)N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\\ &\qquad\qquad+\big(f(p_0,-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_B+f(p_0,-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)\big)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)\Big]\\ &\quad=-\frac{1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}}}\Big[f(p_0,E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_BN_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+f(p_0,E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\\ &\qquad\qquad+f(p_0,-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})N_B(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)+f(p_0,-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)\Big]\end{aligned}$$

ここから温度、化学ポテンシャルを 0 の極限に持っていったときに生き残る項は

$$f(p_0,E_q,E_{\boldsymbol{k}})N_BN_F^-(E_q)$$

$$f(p_0,-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)$$

から出てきます。$f(p_0,E_q,E)N_BN_F^-(E_q)$ では

$$\begin{aligned}
f(p_0,E_q,E_{\boldsymbol{k}})N_BN_F^-(E_q) &= \frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}(e^{\beta(E_q+E_{\boldsymbol{k}}-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)})N_BN_F^-(E_q)\\
&= \frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}\big((\frac{1}{N_B}+1)e^{\beta(E_q-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}\big)N_BN_F^-(E_q)\\
&= \frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}\big((1+N_B)(\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}-1)-e^{\beta(p_0-\mu)}\big)N_F^-(E_q)\\
&= \frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}\big((1+N_B)(1-N_F^-(E_q))-e^{\beta(p_0-\mu)}\big)
\end{aligned}$$

なので、極限を取れば

$$\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}$$

もう片方は

$$\begin{aligned}
&f(p_0,-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})(N_B+1)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)\\
&=\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=-E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}(e^{\beta(-E_q-E_{\boldsymbol{k}}-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)})(N_B+1)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)\\
&=\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=-E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\big(\frac{N_B}{1+N_B}e^{-\beta(E_q+\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)}\big)(N_B+1)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)\\
&=\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=-E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\big(N_B\frac{N_F^+(E_q)}{1-N_F^+(E_q)}-e^{\beta(p_0-\mu)}(N_B+1)\big)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)\\
&=\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=-E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\big(-N_BN_F^+(E_q)-e^{\beta(p_0-\mu)}(N_B+1)(N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)\big)
\end{aligned}$$

なので

$$\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=-E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(p_0-\mu)}$$

が残ります。この二つを (3) にいれて

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{tr}T\sum_{n_{\boldsymbol{p}}}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\\
&\qquad\times\frac{-1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}}}\frac{(p^\alpha\gamma_\alpha+m)}{p^2-m^2}\Big[\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{-2(q_\mu\gamma^\mu)_{q_0=-E_{\boldsymbol{q}}}+4m}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(p_0-\mu)}\Big]
\end{aligned}$$

トレースを実行すると

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(p^\alpha\gamma_\alpha+m)(-2q_\mu\gamma^\mu+4m)] &= \mathrm{tr}[-2p^\alpha\gamma_\alpha q_\mu\gamma^\mu+4m^2] \\ &= -8p\cdot q+16m^2 \\ &= 8(-p\cdot q+2m^2)\end{aligned}$$

となるので

$$-8T\sum_{n_{\boldsymbol{p}}}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$$
$$\times\frac{-1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}}}\frac{1}{p^2-m^2}\Big[\frac{-p_0E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{p_0E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(p_0-\mu)}\Big]$$

$n_{\boldsymbol{p}}$ の和を実行すれば

$$\frac{-1}{4E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}}}T\sum_{n_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{p^2-m^2}\Big[\frac{-p_0E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{p_0-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{p_0E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{p_0+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(p_0-\mu)}\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}\Big]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$+\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}\Big](N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)+\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$-\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})$$
$$+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)$$
$$+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\big(e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)$$
$$+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\big((\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}-1)N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+(\frac{1}{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}-1)N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\big(1-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)\Big]$$

$$=\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)+\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\big(2-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)\Big]$$

温度依存していない項を捨てて $(n_F(E_{\boldsymbol{p}})=N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))$

$$\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})-\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\Big]$$

さらに変形させていくと

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}}}-\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\Big]n_F(E_{\boldsymbol{p}})\\
&=\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}-\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}}}\Big]n_F(E_{\boldsymbol{p}})\\
&=\Big[\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}(E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}})-\frac{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}(E_{\boldsymbol{p}}-E_q-E_{\boldsymbol{k}})\Big]n_F(E_{\boldsymbol{p}})\\
&=\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\Big[(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2)(E_{\boldsymbol{p}}+E_q+E_{\boldsymbol{k}})-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2)(E_{\boldsymbol{p}}-(E_q+E_{\boldsymbol{k}}))\Big]\\
&=\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\Big[E_{\boldsymbol{p}}(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2)+(E_q+E_{\boldsymbol{k}})(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2)\\
&\qquad\qquad -E_{\boldsymbol{p}}(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2)+(E_q+E_{\boldsymbol{k}})(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2)\Big]\\
&=\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\Big[-2E_{\boldsymbol{p}}^2E_{\boldsymbol{q}}+(E_q+E_{\boldsymbol{k}})(2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+4m^2)\Big]
\end{aligned}$$

ここで、デルタ関数から $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ だとして

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}[-2E_{\boldsymbol{p}}^2E_{\boldsymbol{q}}+(E_q+E_{\boldsymbol{k}})(-E_{\boldsymbol{k}}^2+\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2+4m^2)]\\
&=\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}[-2E_{\boldsymbol{p}}^2E_{\boldsymbol{q}}+(E_q+E_{\boldsymbol{k}})(-E_{\boldsymbol{k}}^2+E_{\boldsymbol{p}}^2-m^2+E_{\boldsymbol{q}}^2-m^2+4m^2)]\\
&=\frac{-2E_{\boldsymbol{p}}^2E_{\boldsymbol{q}}+(E_q+E_{\boldsymbol{k}})(-E_{\boldsymbol{k}}^2+E_{\boldsymbol{p}}^2+E_{\boldsymbol{q}}^2+2m^2)}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\\
&=\frac{-2E_{\boldsymbol{p}}^2E_{\boldsymbol{q}}+(E_q+E_{\boldsymbol{k}})(-E_{\boldsymbol{k}}^2+E_{\boldsymbol{p}}^2+E_{\boldsymbol{q}}^2)}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}+\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\\
&=\frac{E_{\boldsymbol{q}}(-2E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{k}}^2+E_{\boldsymbol{p}}^2+E_{\boldsymbol{q}}^2)+E_{\boldsymbol{k}}(-E_{\boldsymbol{k}}^2+E_{\boldsymbol{p}}^2+E_{\boldsymbol{q}}^2)}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}+\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\\
&=\frac{-E_{\boldsymbol{q}}(E_{\boldsymbol{p}}^2+E_{\boldsymbol{k}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^2)+E_{\boldsymbol{k}}(E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{k}}^2+E_{\boldsymbol{q}}^2)}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}+\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\\
&=\frac{-E_{\boldsymbol{q}}(E_{\boldsymbol{p}}-(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}})^2+2E_{\boldsymbol{k}}^2+2E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}+\frac{E_{\boldsymbol{k}}(E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{q}})^2+2E_{\boldsymbol{q}}^2+2E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}+\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\\
&=-E_{\boldsymbol{q}}+\frac{-E_{\boldsymbol{q}}(2E_{\boldsymbol{k}}^2+2E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}+E_{\boldsymbol{k}}+\frac{E_{\boldsymbol{k}}(2E_{\boldsymbol{q}}^2+2E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{q}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}+\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{E_{\boldsymbol{p}}^2-(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2}\\
&=-E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}-\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2}
\end{aligned}
$$

というわけで、この図では

$$
\begin{aligned}
-8\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{-1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\big(-E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}-\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2}\big)n_F(E_{\boldsymbol{p}})\\
=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}\big(-\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}}-\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2}\big)
\end{aligned}
$$

よって、(2) とあわせることで相殺項は

$$
\begin{aligned}
I_{counter}&=2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{N_B}{E_pE_{\boldsymbol{k}}}\\
&\quad+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}\big[-\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}}-\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2(E_q+E_{\boldsymbol{k}})}{(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2}\big]
\end{aligned}
$$

$\log Z_2$ で現われる発散部分は

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{2}\int & \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}) \\
& \times\Big[\frac{4}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{k}}}N_B + \frac{2n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}\Big[-\frac{1}{E_{\boldsymbol{k}}}+\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}}-\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{k}}}\frac{2m^2(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E_q+E_{\boldsymbol{k}})^2-E_p^2}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\Big]
\end{aligned}
$$

であるので、$I - I_{counter}$ で実際に発散部分を打ち消してくれています。