$\boldsymbol{I_{p,q,k}}$ の計算

$I_{p,q,\boldsymbol{k}}$ は

$$
\begin{aligned}
I_{p,q,\boldsymbol{k}} = &-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{k}}}[[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})+(1+N_B(E_{\boldsymbol{k}}))f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})+(1+N_B(E_{\boldsymbol{k}}))f(-E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})][N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+1] \\
&+[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})+(1+N_B(E_{\boldsymbol{k}}))f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})][N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&+[N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}})+(1+N_B(E_{\boldsymbol{k}})f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}})][N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})
\end{aligned}
$$

$$
E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\ ,\ E_{\boldsymbol{q}}=\sqrt{\boldsymbol{q}^2+m^2}\ ,\ E_{\boldsymbol{k}}=|\boldsymbol{k}|
$$

$f(p_0,q_0,k_0)$ は

$$
f(p_0,q_0,k_0)=\frac{-(p_0q_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{p_0-q_0-k_0}(e^{\beta(k_0+q_0-\mu)}-e^{\beta(p_0-\mu)})
$$

積分まで含めた形は

$$
\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})I_{p,q,\boldsymbol{k}}
$$

$\log Z$ での係数

$$
-\frac{8}{2}e^2\beta V
$$

は無視しています。
計算する前に使う関係を並べておきます

$$
\begin{aligned}
N_F^{\pm}(E)&=\frac{1}{e^{\beta(E\pm\mu)}+1}\ ,\ N_B(E)=\frac{1}{e^{\beta E}-1} \\
e^{\beta(E\pm\mu)}&=\frac{1}{N_F^{\pm}(E)}-1\ ,\ e^{\beta E}=\frac{1}{N_B(E)}+1 \\
e^{-\beta(E\pm\mu)}&=\frac{N_F^{\pm}(E)}{1-N_F^{\pm}(E)}\ ,\ e^{-\beta E}=\frac{N_B(E)}{1+N_B(E)}
\end{aligned}
$$

計算するときに必ず出てくる部分も先に計算しておきます。$f(p_0,q_0,k_0)$ の組み合わせによって

$$
\frac{-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}\ ,\ \frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}
$$

というのが出てきますが、これらは運動量保存、$\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$、によって $E_{\boldsymbol{k}}=|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|$ であることを使えば

$$
\begin{aligned}
X_1=\frac{-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} &= \frac{1}{2}\frac{-2E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^2+2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2+\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2-E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^2+\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{-E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^2+\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{-2m^2+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}) \\
&= \frac{1}{2}+Y_-
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
X_2=\frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} &= \frac{1}{2}\frac{2E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}+2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2+\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2} \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{-E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^2+\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2+4m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2}) \\
&= \frac{1}{2}+Y_+
\end{aligned}
$$

この計算のときに $\boldsymbol{k}$ 積分でデルタ関数を潰していますが、新しく $\boldsymbol{k}$ 積分で同じデルタ関数をくっつけても $E_{\boldsymbol{k}}$ が元に戻るだけでなので $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}$ の積分の形に戻しておきます。
各項をそれぞれ計算します ($E_{\boldsymbol{k}}$ は E と書き、$N_B(E)$ は N_B と書きます)

- $N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})$ の項

  必要な f は ($D_-=E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}$)

$$
\begin{aligned}
f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E_{\boldsymbol{k}}) &= \frac{-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{k}}}(-e^{\beta(E_p-\mu)}+e^{\beta(E+E_q-\mu)})\\
&= \frac{-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}((E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})+E)(-e^{\beta(E_p-\mu)}+e^{\beta(E+E_q-\mu)})\\
&= X_1(D_-+E)(-e^{\beta(E_p-\mu)}+e^{\beta(E+E_q-\mu)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E_{\boldsymbol{k}}) &= \frac{-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{k}}}(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\\
&= X_1(D_--E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})
\end{aligned}
$$

これらを代入して

$$
\begin{aligned}
&N_Bf(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E)+(1+N_B)f(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E)\\
&=N_Bf(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E)+e^{\beta E}N_Bf(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E)\\
&=X_1\big[N_B(D_-+E)(-e^{\beta(E_p-\mu)}+e^{\beta(E+E_q-\mu)})+e^{\beta E}N_B(D_--E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\big]\\
&=X_1\big[N_B(D_-+E)(-e^{\beta(E_p-\mu)}+e^{\beta(E+E_q-\mu)})+N_B(D_--E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+E-\mu)}+e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\big]\\
&=X_1\big[D_-(-e^{\beta(E_p-\mu)}+e^{\beta(E+E_q-\mu)}-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+E-\mu)}+e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B\\
&\qquad+E(-e^{\beta(E_p-\mu)}+e^{\beta(E+E_q-\mu)}+e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}+E-\mu)}-e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B\big]\\
&=X_1\big[D_-(e^{\beta(E_q-\mu)}(e^{\beta E}+1)-e^{\beta(E_p-\mu)}(1+e^{\beta E}))N_B\\
&\qquad+E(e^{\beta(E_q-\mu)}(e^{\beta E}-1)+e^{\beta(E_p-\mu)}(e^{\beta E}-1))N_B\big]\\
&=X_1\big[D_-(e^{\beta(E_q-\mu)}-e^{\beta(E_p-\mu)})N_B(e^{\beta E}+1)+E(e^{\beta(E_q-\mu)}+e^{\beta(E_p-\mu)})\big]\\
&=X_1\big[D_-(e^{\beta(E_q-\mu)}+1-e^{\beta(E_p-\mu)}-1)(e^{\beta E}+1)N_B+E(e^{\beta(E_q-\mu)}+1+e^{\beta(E_p-\mu)}+1-2)\big]\\
&=X_1\Big[D_-(\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}-\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})})(1+2N_B)+E(\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}+\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}-2)\Big]
\end{aligned}
$$

$N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})$ をくっつることで

$$
\begin{aligned}
&X_1\Big[D_-(\frac{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}-\frac{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})})(1+2N_B)\\
&\qquad+E(\frac{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}+\frac{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}-2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))\Big]\\
&=X_1\big[D_-\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\big)(1+2N_B)+E\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})\big)\big]
\end{aligned}
$$

- $N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) + 1$ の項

f は

$$\begin{aligned}
f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, E) &= \frac{-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p} \cdot \boldsymbol{q}) + 2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}} - E}(-e^{\beta(-E_p-\mu)} + e^{\beta(E-E_q-\mu)}) \\
&= -\frac{-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p} \cdot \boldsymbol{q}) + 2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{q}}) + E}(-e^{\beta(-E_p-\mu)} + e^{\beta(E-E_q-\mu)}) \\
&= -X_1(D_- - E)(-e^{\beta(-E_p-\mu)} + e^{\beta(E-E_q-\mu)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}}) &= \frac{-(E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p} \cdot \boldsymbol{q}) + 2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}} + E_{\boldsymbol{k}}}(-e^{\beta(-E_p-\mu)} + e^{\beta(-E-E_q-\mu)}) \\
&= -X_1(D_- + E)(-e^{\beta(-E_p-\mu)} + e^{\beta(-E-E_q-\mu)})
\end{aligned}$$

代入して

$$\begin{aligned}
&N_B f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, E) + (1+N_B) f(-E_{\boldsymbol{p}}, -E_{\boldsymbol{q}}, -E) \\
&= -X_1[N_B(D_- - E)(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}) + e^{\beta E}N_B(D_- + E)(-e^{\beta(-E_p-\mu)} + e^{\beta(-E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})] \\
&= -X_1\big[D_-(-e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)} + e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)} - e^{\beta(E-E_p-\mu)} + e^{-\beta(E_{\boldsymbol{q}}+\mu)})N_B \\
&\qquad + E(e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)} - e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)} - e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{-\beta(E_{\boldsymbol{q}}+\mu)})N_B\big] \\
&= -X_1\big[D_-(-e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}(e^{\beta E}+1) + e^{-\beta(E_{\boldsymbol{q}}+\mu)}(e^{\beta E}+1))N_B \\
&\qquad + E(e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)}(1-e^{\beta E}) + e^{-\beta(E_{\boldsymbol{q}}+\mu)}(1-e^{\beta E}))N_B\big] \\
&= -X_1\big[D_-(-e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)} + e^{-\beta(E_{\boldsymbol{q}}+\mu)})(e^{\beta E}+1)N_B + E(-e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)} - e^{-\beta(E_{\boldsymbol{q}}+\mu)})\big] \\
&= -X_1\big[D_-(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} + \frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})(1+2N_B) + E(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - \frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})\big] \\
&= -X_1\big[D_-(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - 1 + \frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})} + 1)(1+2N_B) + E(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - 1 - \frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})} - 1 + 2)\big] \\
&= -X_1\big[D_-(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) + 1 - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} + \frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) + 1 - N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})(1+2N_B) \\
&\qquad + E(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) + 1 - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - \frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) + 1 - N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})} + 2)\big] \\
&= -X_1\big[D_-(-\frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} + \frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})(1+2N_B) + E(-\frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - \frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})} + 2)\big]
\end{aligned}$$

$N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}) + 1$ は

$$(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}))$$

と書けるので、くっつけると

$$\begin{aligned}
&-X_1[D_-(-\frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}+\frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})(1+2N_B)\\
&\quad+E(-\frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}-\frac{1}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}+2)](1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}))\\
&=-X_1[D_-\big(-(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}))+(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))\big)(1+2N_B)\\
&\qquad+E\big(-(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}))-(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))+2(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))(1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}}))\big)]\\
&=-X_1\big[D_-(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))(1+2N_B)\\
&\qquad+E\big(-2+N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})+2(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+1)\big)\big]\\
&=-X_1\big[D_-(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))(1+2N_B)\\
&\qquad+E\big(-2+N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})+2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-2N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+2\big)\big]\\
&=-X_1\big[D_-(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))(1+2N_B)\\
&\qquad+E\big(2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big)\big]
\end{aligned}$$

- $[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})$ の項
  f は

$$\begin{aligned}
f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},E)&=\frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{-E_p-E_{\boldsymbol{q}}-E}(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\\
&=-\frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{E_p+E_{\boldsymbol{q}}+E}(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\\
&=-\frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{(E_p+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}(E_p+E_{\boldsymbol{q}}-E)(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\\
&=-X_2(E_p+E_{\boldsymbol{q}}-E)(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(-E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}},-E)&=\frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{-E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}+E}(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\\
&=-X_2(E_p+E_{\boldsymbol{q}}+E)(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})
\end{aligned}$$

代入して $(D_+=E_p+E_{\boldsymbol{q}})$

$$
\begin{aligned}
&N_B f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, E_{\boldsymbol{k}}) + (1+N_B) f(-E_{\boldsymbol{p}}, E_{\boldsymbol{q}}, -E_{\boldsymbol{k}}) \\
&= -X_2[(D_+ - E)(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B + e^{\beta E} N_B (D_+ + E)(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(-E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})] \\
&= -X_2[(D_+ - E)(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B + N_B (D_+ + E)(-e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})] \\
&= -X_2[D_+(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)} - e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B \\
&\qquad + E(e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} - e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{q}}-\mu)} - e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)} + e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B] \\
&= -X_2[D_+(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}(e^{\beta E}+1) + e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}(e^{\beta E}+1))N_B + E(-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}(e^{\beta E}-1) - e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}(e^{\beta E}-1))N_B] \\
&= -X_2\big[D_+(-e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)} + e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})(1+2N_B) + E(-e^{-\beta(E_{\boldsymbol{p}}+\mu)} - e^{\beta(E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\big] \\
&= -X_2\big[D_+(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} + \frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})} - 1)(1+2N_B) + E(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - \frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})} + 1)\big]
\end{aligned}
$$

$[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})$ をくっつけて

$$
\begin{aligned}
&-X_2\big[D_+(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} + \frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})} - 1)(1+2N_B) + E(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - \frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})} + 1)\big][N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&= -X_2\big[D_+(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} + 1 - N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))(1+2N_B) + E(-\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})} - 1 + N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))\big][N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1] \\
&= -X_2\big[D_+\big(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)(1-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))\big)(1+2N_B) \\
&\qquad + E\big(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) - (N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-1)(1-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))\big)\big] \\
&= -X_2\big[D_+\big(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) + N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) - 1\big)(1+2N_B) \\
&\qquad + E\big(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + 1\big)\big] \\
&= -X_2\big[D_+(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) + N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) - 1)(1+2N_B) \\
&\qquad + E\big(2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) - N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}) - N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}) + 1\big)\big]
\end{aligned}
$$

- $[N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$ の項
  f は

$$
\begin{aligned}
f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E) &= \frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E}(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}) \\
&= \frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}-E}(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}) \\
&= X_2(D_++E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},-E) &= \frac{-(-E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}-p}\cdot\boldsymbol{q})+2m^2}{E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}+E}(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}) \\
&= X_2(D_+-E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})
\end{aligned}
$$

代入して

$$
\begin{aligned}
&N_Bf(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},E)+(1+N_B)f(E_{\boldsymbol{p}},-E_{\boldsymbol{q}},-E) \\
&=X_2\big[(D_++E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B+e^{\beta E}N_B(D_+-E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\big] \\
&=X_2\big[(D_++E)(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B+N_B(D_+-E)(-e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\big] \\
&=X_2\big[D_+(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}-e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B \\
&\qquad +E(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(E-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}+e^{\beta(E+E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}-e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})N_B\big] \\
&=X_2\big[D_+(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}(1+e^{\beta E})+e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}(1+e^{\beta E}))N_B+E(e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}(e^{\beta E}-1)+e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)}(e^{\beta E}-1))N_B\big] \\
&=X_2\big[D_+(-e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})(1+2N_B)+E(e^{\beta(E_{\boldsymbol{p}}-\mu)}+e^{\beta(-E_{\boldsymbol{q}}-\mu)})\big] \\
&=X_2\big[D_+(-\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}+1+\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})(1+2N_B)+E(\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}-1+\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})\big]
\end{aligned}
$$

$[N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$ をくっつけて

$$X_2\big[D_+(-\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}+1+\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})(1+2N_B)+E(\frac{1}{N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}-1+\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})})\big][N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1]N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})$$

$$=X_2\big[D_+\big(-1+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}\big)(1+2N_B)+E\big(1-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})}{1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})}\big)\big][N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1]$$

$$=X_2\big[D_+\big(-(1-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}))(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1)-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big)(1+2N_B)$$

$$+E\big((1-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}}))(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-1)-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big)\big]$$

$$=X_2\big[D_+\big(-(-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-1)-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big)(1+2N_B)$$

$$+E\big(-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-1-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})\big)\big]$$

$$=X_2\big[D_+\big(-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+1\big)(1+2N_B)$$

これで全部揃ったので整理していきます。まず、$N_F^-(E_p)N_F^-(E_q)$ と $N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+1$ の項をあわせると ($n_F(E)=N_F^+(E)+N_F^-(E)$ とします)

$$X_1\big[D_-(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))(1+2N_B)+E(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}}))\big]$$

$$-X_1\big[D_-(N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}}))(1+2N_B)+E\big(2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big)\big]$$

$$=X_1\big[D_-\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})\big)(1+2N_B)$$

$$+E\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big)\big]$$

$$=X_1\big[D_-\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)(1+2N_B)$$

$$+E\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big)\big]$$

$$=X_1\big[-2E\big(N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big)$$

$$+D_-\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)+E\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)$$

$$+2N_BD_-\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)\big]$$

$$=X_1\big[-2EA_1+A_2+N_BA_3\big]$$

次に残りの二つの項を計算すると

$$-X_2\big[D_+(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1)(1+2N_B)+E\big(2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+1\big)\big]$$

$$\begin{aligned}
&+X_2\big[D_+\big(-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+1\big)(1+2N_B)+E\big(-2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-1\big)\big] \\
&=-X_2\big[D_+(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-1+N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})-1)(1+2N_B) \\
&\qquad +E\big(2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+1+2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})+1\big)\big] \\
&=-X_2\big[D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)(1+2N_B) \\
&\qquad +E\big(2N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+2N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2\big)\big] \\
&=-X_2\big[2E\big(N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big) \\
&\qquad +D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)+E\big(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2\big) \\
&\qquad +2N_BD_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big] \\
&=-X_2\big[2EB_1+B_2+N_BB_3\big]
\end{aligned}$$

この 2 つを足します。積分の形まで含めて書けば

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})I_{p,q,\boldsymbol{k}} \\
&\qquad =-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E} \\
&\qquad\quad\times\big[X_1\big(-2EA_1+A_2+N_BA_3\big)-X_2\big(2EB_1+B_2+N_BB_3\big)\big]
\end{aligned}$$

このようになっています。
まず、N_B を持つ A_3,B_3 を計算します

- A_3,B_3

  展開していくと

$$
\begin{aligned}
N_B(A_3+B_3) =& X_1\big[2D_-N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\big]-X_2\big[2D_+N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big]\\
=&\frac{1}{2}(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2})\big[2D_-N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\big]\\
&-\frac{1}{2}(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2})\big[2D_+N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big]\\
=&\frac{1}{2}\big[2D_-N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))-2D_+N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big]\\
&+\frac{m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big[2D_-N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\big]\\
&-\frac{m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big[2D_+N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big]
\end{aligned}\tag{1}
$$

第二項と第三項を取り出して変形していくと

$$
\begin{aligned}
&Y_-\big[2D_-N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\big]-Y_+\big[2D_+N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big]\\
&=2N_BY_-D_-\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)-2N_BY_+D_+\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2\big)\\
&=2N_BY_-D_-\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)-2N_BY_+D_+\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2\big)\\
&=2N_B(Y_-D_--Y_+D_+)\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)-2N_BY_+D_+\big(2n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2\big)\\
&=2N_B(Y_-D_--Y_+D_+)\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2-2\big)-2N_BY_+D_+\big(2n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2\big)\\
&=2N_B(Y_-D_--Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{p}})-2N_B(Y_-D_--Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{q}})+4N_B(Y_-D_--Y_+D_+)-4N_B(Y_-D_--Y_+D_+)\\
&\quad-2N_BY_+D_+\big(2n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2\big)\\
&=2N_B(Y_-D_--Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{p}})-2N_B(Y_-D_--Y_+D_++2Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{q}})\\
&\quad+4N_B(Y_-D_--Y_+D_+)-4N_B(Y_-D_--Y_+D_+)+4N_BY_+D_+\\
&=2N_B(Y_-D_--Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{p}})-2N_B(Y_-D_-+Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{q}})-4N_B(Y_-D_--Y_+D_+)+4N_BY_-D_-
\end{aligned}\tag{2}
$$

$$
Y_-=\frac{m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\ ,\ Y_+=\frac{m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}
$$

$Y_-D_--Y_+D_+$ は (m^2 をはずして書きます)

$$
\begin{aligned}
Y_- D_- - Y_+ D_+ &= \frac{E_p - E_q}{(E_{\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{q}})^2 - E^2} - \frac{E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}}}{(E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}})^2 - E^2} \\
&= \frac{(E_p - E_q)[(E_p + E_q)^2 - E^2] - (E_p + E_q)[(E_p - E_q)^2 - E^2]}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{(E_p - E_q)(E_p + E_q)^2 - (E_p - E_q)E^2 - (E_p + E_q)(E_p - E_q)^2 + (E_p + E_q)E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{(E_p^2 - E_q^2)(E_p + E_q) - (E_p^2 - E_q^2)(E_p - E_q) + 2E_q E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{(E_p^2 - E_q^2)((E_p + E_q) - (E_p - E_q)) + 2E_q E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{2(E_p^2 - E_q^2)E_q + 2E_q E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{2(E_p^2 - E_q^2 + E^2)E_q}{[E_p^2 + E_q^2 - 2E_pE_q - E^2][E_p^2 + E_q^2 + 2E_pE_q - E^2]} \\
&= \frac{2(E_p^2 - E_q^2 + E^2)E_q}{(E_p^2 + E_q^2 - E^2)^2 - 4E_p^2E_q^2}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\int d^3p d^3q d^3k \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{k})
$$

から $\boldsymbol{q}$ 積分を実行したとして $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}$ とします。そうすると分母は

$$
\begin{aligned}
(E_p^2 + E_q^2 - E^2)^2 - 4E_p^2E_q^2 =& (\boldsymbol{p}^2 + m^2 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^2 + m^2 - \boldsymbol{k}^2)^2 - 4(\boldsymbol{p}^2 + m^2)((\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^2 + m^2) \\
=& (2\boldsymbol{p}^2 + 2m^2 - 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4(\boldsymbol{p}^2 + m^2)(\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{k}^2 - 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} + m^2) \\
=& 4(\boldsymbol{p}^2 + m^2 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) \\
& - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) + 8\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}(\boldsymbol{p}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) \\
=& 4\big((\boldsymbol{p}^2 + m^2)^2 + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}(\boldsymbol{p}^2 + m^2)\big) \\
& - 4\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) + 8\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}(\boldsymbol{p}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) \\
=& 4\big((\boldsymbol{p}^2 + m^2)^2 + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2\big) - 4\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) \\
=& 4\big(\boldsymbol{p}^4 + m^4 + 2\boldsymbol{p}^2m^2 + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2\big) - 4\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2) \\
=& 4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2 + m^2)
\end{aligned}
$$

分子は

$$
\begin{aligned}
2(E_p^2 - E_q^2 + E^2)E_q &= 2(\boldsymbol{p}^2 + m^2 - (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2 - m^2 + \boldsymbol{k}^2)E_q \\
&= 2(-\boldsymbol{k}^2 + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}^2)E_q \\
&= 4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})E_q
\end{aligned}
$$

となるので

$$
Y_-D_- - Y_+D_+ = \frac{4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})E_q}{4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2+m^2)}
$$

そして、積分の形というのは

$$
\int d^3pd^3k \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})E_q}{4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2+m^2)} = \int d^3pd^3k \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E}\frac{4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})}{4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2+m^2)}
$$

これは $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ で符号が反転するために、全空間関分で 0 です。なので

$$
\int d^3pd^3k \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}(Y_-D_- - Y_+D_+) = 0
$$

ということになります。$Y_-D_- + Y_+D_+$ では

$$
\begin{aligned}
Y_-D_- + Y_+D_+ &= \frac{E_p - E_q}{(E_{\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{q}})^2 - E^2} + \frac{E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}}}{(E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{q}})^2 - E^2} \\
&= \frac{(E_p - E_q)[(E_p + E_q)^2 - E^2] + (E_p + E_q)[(E_p - E_q)^2 - E^2]}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{(E_p - E_q)(E_p + E_q)^2 - (E_p - E_q)E^2 + (E_p + E_q)(E_p - E_q)^2 - (E_p + E_q)E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{(E_p^2 - E_q^2)(E_p + E_q) + (E_p^2 - E_q^2)(E_p - E_q) - 2E_{\boldsymbol{p}}E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{(E_p^2 - E_q^2)((E_p + E_q) + (E_p - E_q)) - 2E_{\boldsymbol{p}}E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{2(E_p^2 - E_q^2)E_{\boldsymbol{p}} - 2E_{\boldsymbol{p}}E^2}{[(E_p - E_q)^2 - E^2][(E_p + E_q)^2 - E^2]} \\
&= \frac{2(E_p^2 - E_q^2 - E^2)E_{\boldsymbol{p}}}{[E_p^2 + E_q^2 - 2E_pE_q - E^2][E_p^2 + E_q^2 + 2E_pE_q - E^2]} \\
&= \frac{2(E_p^2 - E_q^2 - E^2)E_{\boldsymbol{p}}}{(E_p^2 + E_q^2 - E^2)^2 - 4E_p^2E_q^2}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ が入れ替わったような形をしているので、今度は $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}$ となるようにすれば分子は

$$
\begin{aligned}
2(E_p^2 - E_q^2 - E^2)E_{\boldsymbol{p}} &= 2((\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k})^2 + m^2 - \boldsymbol{q}^2 - m^2 - \boldsymbol{k}^2)E_{\boldsymbol{p}} \\
&= 2(\boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{k}^2 + 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k} + m^2 - \boldsymbol{q}^2 - m^2 - \boldsymbol{k}^2)E_{\boldsymbol{p}} \\
&= 4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})E_{\boldsymbol{p}}
\end{aligned}
$$

分母は

$$
\begin{aligned}
(E_p^2 + E_q^2 - E^2)^2 - 4E_p^2E_q^2 =& ((\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k})^2 + m^2 + \boldsymbol{q}^2 + m^2 - \boldsymbol{k}^2)^2 - 4((\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k})^2 + m^2)(\boldsymbol{q}^2 + m^2) \\
=& (2\boldsymbol{q}^2 + 2m^2 + 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4(\boldsymbol{q}^2 + m^2)(\boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{k}^2 + 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k} + m^2) \\
=& 4(\boldsymbol{q}^2 + m^2 + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) \\
& - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 8\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) \\
=& 4\big((\boldsymbol{q}^2 + m^2)^2 + (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2 + 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}(\boldsymbol{q}^2 + m^2)\big) \\
& - 4\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 8\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) \\
=& 4\big((\boldsymbol{q}^2 + m^2)^2 + (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2\big) - 4\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) \\
=& 4\big(\boldsymbol{q}^4 + m^4 + 2\boldsymbol{q}^2m^2 + (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2\big) - 4\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) - 4m^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2) \\
=& 4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\int d^3q d^3k \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})E_{\boldsymbol{p}}}{4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2)} = \int d^3q d^3k \frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})}{4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2 - 4\boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{q}^2 + m^2)}
$$

よってこれも 0 になるので

$$
\int d^3q d^3k \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}(Y_-D_- + Y_+D_+) = 0
$$

さらに、ボソンとフェルミオンの分布関数の変数がデルタ関数の積分にひっかからないような形をしているなら 0 になることもわかります。これを踏まえて、元の式 (2)

$$
2N_B(Y_-D_- - Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{p}}) - 2N_B(Y_-D_- + Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{q}}) - 4N_B(Y_-D_- - Y_+D_+) + 4N_BY_-D_-
$$

を見ると、第一項と第三項は $\boldsymbol{q}$、第二項は $\boldsymbol{p}$ の積分によってデルタ関数を潰せば、0 になっていることがわかります。残った第四項は

$$
\begin{aligned}
\int d^3pd^3qd^3k\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{N_B}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}Y_-D_- &= \int d^3pd^3qd^3k\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{N_B}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}) \\
&= \int d^3pd^3q(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\frac{m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}\frac{1}{e^{\beta|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}-1} \\
&= \int d^3pd^3q(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})F(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}})
\end{aligned}
$$

これは $F(E_{\boldsymbol{p}},E_{\boldsymbol{q}})$ が $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ に関して対称になっているために、積分は 0 になります。というわけで、(2) は 0 です。よって $N_B(A_3+B_3)$ は

$$
\begin{aligned}
N_B(A_3+B_3) =&\frac{1}{2}[2D_-N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))-2D_+N_B(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)] \\
=&N_B[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))-(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)] \\
=&N_B[E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})-E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{q}}) \\
&\quad -E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})-E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})-E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2E_{\boldsymbol{q}}] \\
=&2N_B[-E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となります。次に A_2+B_2 を計算します

- A_2+B_2

  A_2+B_2 は

$$
\begin{aligned}
A_2+B_2 =&X_1[D_-(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))+E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))] \\
&-X_2[D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)+E(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2)] \\
=&(\frac{1}{2}+Y_-)[D_-(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))+E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))] \\
&-(\frac{1}{2}+Y_+)[D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)+E(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2)] \\
=&\frac{1}{2}\left[D_-(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))+E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)+E(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2)\right] \\
&+Y_-\left[D_-(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))+E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\right] \\
&-Y_+\left[D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)+E(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2)\right] \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Y_-,Y_+ の項を計算します

$$
\begin{aligned}
&Y_-\big[D_-\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)+E\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)\big]\\
&\qquad -Y_+\big[D_+\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2\big)+E\big(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2\big)\big]
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここから、さらに D_-, D_+ の項を取り出すと

$$
\begin{aligned}
&Y_-\big[D_-(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\big]-Y_+\big[D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big]\\
&\quad =Y_-D_-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-Y_-D_-n_F(E_{\boldsymbol{q}})-Y_+D_+n_F(E_{\boldsymbol{p}})-Y_+D_+n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2Y_+D_+\\
&\quad =\big(Y_-D_--Y_+D_+\big)n_F(E_{\boldsymbol{p}})-\big(Y_-D_-+Y_+D_+\big)n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2Y_+D_+\\
&\quad =(Y_-D_--Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{p}})-(Y_-D_-+Y_+D_+)n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2(Y_-D_--Y_+D_+)-2Y_-D_-
\end{aligned}
$$

これは A_3, B_3 のときにでてきたものと同じ形なので 0 になります。なので、E の項しか生き残りません。(5) で残っている E の項は

$$
\begin{aligned}
&Y_-E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))-Y_+E(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2)\\
&\quad =E(Y_-+Y_+)(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))-2Y_+E
\end{aligned}
$$

これの最後の項には分布関数がいないことから、温度依存性がないために真空からの寄与だと考えられます ($\log Z_2$ の式を見ると、前から βV が掛かっているので温度依存しているように見えますが、圧力なんかを計算するときには βV で割るので温度依存性はなくなります)。なので、無視します。第一項は

$$
\begin{aligned}
m^2E\Big(\frac{1}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}+\frac{1}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\Big) &= \frac{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2+(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}{[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2][(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2]}m^2E\\
&= \frac{2E_{\boldsymbol{p}}^2+2E_{\boldsymbol{q}}^2-2E^2}{[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2][(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2]}m^2E
\end{aligned}
$$

この形は $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ に対して対称に入っているために、$\boldsymbol{k}$ 積分でデルタ関数を潰せば

$$
\frac{2E_{\boldsymbol{p}}^2+2E_{\boldsymbol{q}}^2-2E^2}{[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2][(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2]}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{2E_{\boldsymbol{p}}^2+2E_{\boldsymbol{q}}^2-2E^2}{[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2][(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2]}n_F(E_{\boldsymbol{q}})
$$

の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 積分が等しくなるので

$$
2\frac{2E_{\boldsymbol{p}}^2+2E_{\boldsymbol{q}}^2-2E^2}{[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2][(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2]}n_F(E_{\boldsymbol{p}})
$$

となります。後で便利なように変形を行います。分母は

$$
\begin{aligned}
[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2][(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2] &= (E_p^2+E_q^2-E^2)^2-4E_p^2E_q^2 \\
&= E_p^4+E_q^4+E^4+2E_p^2E_q^2-2E_p^2E^2-2E_q^2E^2-4E_p^2E_q^2 \\
&= E_p^4+E_q^4+E^4-2E_p^2E_q^2-2E_p^2E^2-2E_q^2E^2 \\
&= ((E-E_q)^2-E_p^2)((E+E_q)^2-E_p^2)
\end{aligned}
$$

分子は

$$
\begin{aligned}
(E_{\boldsymbol{q}}+E)((E-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2) &= E^2E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{q}}^3-2EE_{\boldsymbol{q}}^2-E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2+E^3+EE_{\boldsymbol{q}}^2-2E^2E_{\boldsymbol{q}}-EE_{\boldsymbol{p}}^2 \\
&= E^3-EE_{\boldsymbol{q}}^2-EE_{\boldsymbol{p}}^2-E^2E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{q}}^3-E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2
\end{aligned}
$$

であることを利用すれば

$$
\begin{aligned}
(E_{\boldsymbol{p}}^2+E_{\boldsymbol{q}}^2-E^2)E &= E_{\boldsymbol{p}}^2E+E_{\boldsymbol{q}}^2E-E^3 \\
&= -[E^3-EE_{\boldsymbol{p}}^2-EE_{\boldsymbol{q}}^2] \\
&= -[E^3-EE_{\boldsymbol{p}}^2-EE_{\boldsymbol{q}}^2-E^2E_{\boldsymbol{q}}+E_{\boldsymbol{q}}^3-E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2+E^2E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{q}}^3+E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2] \\
&= -[(E_{\boldsymbol{q}}+E)((E-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2)+E^2E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{q}}^3+E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2]
\end{aligned}
$$

あわせて

$$
\begin{aligned}
\frac{2E_{\boldsymbol{p}}^2+2E_{\boldsymbol{q}}^2-2E^2}{[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2][(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2]}Em^2 &= \frac{-2m^2[(E_{\boldsymbol{q}}+E)((E-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{p}}^2)+E^2E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{q}}^3+E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2]}{[(E-E_q)^2-E_p^2][(E+E_q)^2-E_p^2]} \\
&= \frac{-2m^2(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2}+\frac{-2m^2(E^2E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{q}}^3+E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2)}{[(E-E_q)^2-E_p^2][(E+E_q)^2-E_p^2]}
\end{aligned}
$$

第二項は

$$
\frac{-2m^2(E^2E_{\boldsymbol{q}}-E_{\boldsymbol{q}}^3+E_{\boldsymbol{q}}E_{\boldsymbol{p}}^2)}{[(E-E_q)^2-E_p^2][(E+E_q)^2-E_p^2]} = \frac{-2m^2E_{\boldsymbol{q}}(E_{\boldsymbol{p}}^2-E_{\boldsymbol{q}}^3+E^2)}{[(E-E_q)^2-E_p^2][(E+E_q)^2-E_p^2]}
$$

これは

$$
Y_-D_- - Y_+D_+ = \frac{2(E_p^2-E_q^2+E^2)E_q}{(E_p^2+E_q^2-E^2)^2-4E_p^2E_q^2}
$$

と同じなので (分母は変形しているだけなので同じもの)、$\boldsymbol{q}$ 積分でデルタ関数を潰せば消えます。というわけで、(5) は

$$
(Y_-+Y_+)E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})) = \frac{-4m^2(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2}n_F(E_{\boldsymbol{p}}) \tag{6}
$$

となります。(4) で残っている Y_-, Y_+ でない項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big[D_-(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))+E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))-D_+(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)-E(-n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}})+2)\big] \\
=&\frac{1}{2}\big[(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})(n_F(E_{\boldsymbol{p}})-n_F(E_{\boldsymbol{q}}))-(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2) \\
&\qquad +E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))+E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2)\big] \\
=&\frac{1}{2}\big[-2E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+2E\big(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}})\big)-2D_+-2E\big]
\end{aligned}
$$

最後の 2 つの項は温度依存していないので無視します。というわけで (4) は

$$
A_2+B_2=\frac{1}{2}[-2E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))]+\frac{-2(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2} \tag{7}
$$

- A_1, B_1

  A_1, B_1 はそのまま使うので

$$
\begin{aligned}
-2X_1EA_1-2X_2EB_1=&-E(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2})[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})] \\
&-E(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E_{\boldsymbol{k}}^2})[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]
\end{aligned} \tag{8}
$$

これで計算が終わったので、(3)(7)(8) をまとめると $I_{p,q,\boldsymbol{k}}$ になり

$$
\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})I_{p,q,\boldsymbol{k}}
$$

これに入れれば

$$-\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\big[X_1\big[-2EA_1+A_2+N_BA_3)\big]-X_2\big[2EB_1+B_2+N_BB_3\big]\big]$$

$$=-\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}$$

$$\times\Big[-E(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2})[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]$$

$$-E(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2})[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})$$

$$+2N_B[-E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}}]$$

$$+\frac{1}{2}[-2E_{\boldsymbol{p}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-2E_{\boldsymbol{q}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+2E(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))]+\frac{-4(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\Big]$$

$$=-\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$$

$$\times\Big[-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]$$

$$-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]$$

$$+2N_B\big[-\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-\frac{E_{\boldsymbol{q}}}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}+\frac{E_{\boldsymbol{q}}}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\big]$$

$$+\frac{1}{8}\big[-\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-\frac{E_{\boldsymbol{q}}}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{E}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\big]$$

$$+\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{-4(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\Big]$$

$$=-\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})$$

$$\times\Big[-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)\big[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big]$$

$$-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)\big[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})\big]$$

$$+\frac{1}{8}2N_B\big[-\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E}+\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E}\big]$$

$$+\frac{1}{8}\big[-\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E}n_F(E_{\boldsymbol{q}})-\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E}n_F(E_{\boldsymbol{p}})+\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}(n_F(E_{\boldsymbol{p}})+n_F(E_{\boldsymbol{q}}))\big]+\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{-4(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\Big]$$

ここで、$\boldsymbol{k}$ 積分を実行してデルタ関数をつぶしたのだと思えば、

$$\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E}n_F(E_{\boldsymbol{q}})\ ,\ \ \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E}n_F(E_{\boldsymbol{p}})$$

$$\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E}\ ,\ \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E}$$

これらは $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ に対して完全に対称になっているので同じになり、同様に

$$\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\ ,\ \frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}n_F(E_{\boldsymbol{q}})$$

これも対称なので、同じになることから

$$\begin{aligned}
&-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\\
&\qquad\times\Big[-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2})[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]\\
&\qquad\quad-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2})[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]\\
&\qquad\quad-\frac{1}{8}N_B\big[\frac{4}{E_{\boldsymbol{p}}E}n_F(E_{\boldsymbol{p}})-\frac{4}{E_{\boldsymbol{p}}E}\big]\\
&\qquad\quad-\frac{1}{8}\big[\frac{2}{E_{\boldsymbol{p}}E}n_F(E_{\boldsymbol{p}})-\frac{2}{E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\big]-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{4m^2(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\Big]\\
&=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\\
&\qquad\times\Big[-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)[N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]\\
&\qquad\quad-\frac{1}{8E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}}}\big(1+\frac{2m^2}{(E_{\boldsymbol{p}}+E_{\boldsymbol{q}})^2-E^2}\big)[N_F^+(E_{\boldsymbol{p}})N_F^-(E_{\boldsymbol{q}})+N_F^-(E_{\boldsymbol{p}})N_F^+(E_{\boldsymbol{q}})]\\
&\qquad\quad-\frac{1}{8}\frac{4}{E_{\boldsymbol{p}}E}N_Bn_F(E_{\boldsymbol{p}})\\
&\qquad\quad+\frac{1}{8}\frac{4}{E_{\boldsymbol{p}}E}N_B-\frac{1}{8}\frac{2n_F(E_{\boldsymbol{p}})}{E_{\boldsymbol{p}}}\big[\frac{1}{E}-\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}}+\frac{1}{E_{\boldsymbol{q}}E}\frac{2m^2(E_{\boldsymbol{q}}+E)}{(E+E_q)^2-E_p^2}n_F(E_{\boldsymbol{p}})\big]\Big]
\end{aligned}$$

実際に $\log Z$ に入れるときには $-\dfrac{8}{2}$ 倍します。
これの最後の項と最後から二番目の項は積分で発散するようになっています。発散すると分かるのは、大雑把に言えば、$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}$ という 3 つの積分の変数に対応するように分布関数が入っていないからです。例えば

$$\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}}N_B$$

はデルタ関数で $\boldsymbol{q}$ 積分を落とすと、$\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}$ 積分が残り、$\boldsymbol{k}$ 積分は分布関数 N_B に対応しますが、$\boldsymbol{p}$ 積分が思いっきり残り、発散します。他の項も同じです。しかし、これらの項は相殺項を入れることで消えます。