ボーズ・アインシュタイン凝縮

ここでは、複素スカラー場を使った場合での分配関数を求めます。計算手順は実数スカラー場とほとんど一緒なので、結果を利用することができます。また、せっかくなのでボーズ・アインシュタイン凝縮についても触れることにします。
複素スカラー場のラグランジアン密度とハミルトニアン密度は

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

$$\mathcal{H} = \pi^* \pi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi \quad (\pi = \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\ ,\ \pi^* = \frac{\partial \phi}{\partial t})$$

で与えられます。この時、ϕ を実部と虚部に分けて

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)\ ,\ \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

$$\pi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}\ ,\ \pi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$$

このように書くことにすれば、ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\pi_1 - i\pi_2)(\pi_1 + i\pi_2) + \frac{1}{2}\nabla(\phi_1 - i\phi_2) \cdot \nabla(\phi_1 + i\phi_2) + \frac{1}{2}m^2(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) \\
&= \frac{1}{2}[\pi_1^2 + \pi_2^2 + (\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2 + m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)]
\end{aligned}$$

これを分配関数の経路積分表示にいれるんですが、この形を見て分かるように 2 次形式として exp の中に入ってくるので、結局 π 積分は実行できてラグランジアンが exp にのっかることになり

$$Z = \int_{periodic} \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}]$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}[i\frac{\partial}{\partial \tau}(\phi_1 - i\phi_2) i\frac{\partial}{\partial \tau}(\phi_1 + i\phi_2) - \nabla(\phi_1 - i\phi_2) \cdot \nabla(\phi_1 + i\phi_2) - m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)] \\
&= \frac{1}{2}[-(\frac{\partial}{\partial \tau}\phi_1)^2 - (\frac{\partial}{\partial \tau}\phi_2)^2 - (\nabla\phi_1)^2 - (\nabla\phi_2)^2 - m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)] \\
&= -\frac{1}{2}[(\frac{\partial}{\partial \tau}\phi_1)^2 + (\frac{\partial}{\partial \tau}\phi_2)^2 + (\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2 + m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)]
\end{aligned}$$

さらに今の場合は実数スカラー場と違って粒子の保存則 (電荷保存) があるので、化学ポテンシャル μ を $\mu \neq 0$ にします。
場の量子論で出てくるように、複素スカラー場での保存電荷 Q は

$$\begin{aligned}
Q = -i\int d^3x(\pi\phi - \pi^*\phi^*) &= -i\int d^3x(\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t}\phi^*) \\
&= -\frac{i}{2}\int d^3x\Big[(\frac{\partial\phi_1}{\partial t} - i\frac{\partial\phi_2}{\partial t})(\phi_1 + i\phi_2) - (\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + i\frac{\partial\phi_2}{\partial t})(\phi_1 - i\phi_2)\Big] \\
&= -\frac{i}{2}\int d^3x\big[\pi_1\phi_1 - i\pi_2\phi_1 + i\pi_1\phi_2 + \pi_2\phi_2 - (\pi_1\phi_1 + i\pi_2\phi_1 - i\pi_1\phi_2 + \pi_2\phi_2)\big] \\
&= -\frac{i}{2}\int d^3x[-2i\pi_2\phi_1 + 2i\pi_1\phi_2] \\
&= \int d^3x[-\pi_2\phi_1 + \pi_1\phi_2]
\end{aligned}$$

この項は π 積分を実行する時に絡んでくるので、π 積分をする前の段階に戻ります。μ を含めた時の π 積分を実行する前は

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\pi_1\mathcal{D}\pi_2\int_{periodic}\mathcal{D}\phi_1\mathcal{D}\phi_2\exp\Big[\int_0^\beta d\tau\int d^3x(i\pi\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + i\pi^*\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau} - \mathcal{H} + \mu(\pi_1\phi_2 - \pi_2\phi_1))\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\pi_1\mathcal{D}\pi_2\int_{periodic}\mathcal{D}\phi_1\mathcal{D}\phi_2\exp\Big[\int_0^\beta d\tau\int d^3x(i\pi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + i\pi_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - \mathcal{H} + \mu(\pi_1\phi_2 - \pi_2\phi_1))\Big]
\end{aligned}$$

これの π 積分は実数スカラー場と同じように計算すると

$$\int d\pi_1\exp\Big[\int d^3x\Delta\tau\Big(-\pi_1^2 + i(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2)\pi_1\Big)\Big]$$

のような形にもっていけるので ($\pi_{1,2}, \phi_{1,2}$ は本当は離散化されているんですが、無視して書いています)、π_1 積分を実行すると exp 内に

$$\exp\Big[-(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2)^2\Big]$$

このような項として出てきます (係数は無視しています)。つまり、$\mu = 0$ の分配関数でのラグランジアンにおいて $\dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}$ の部分を

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \ \Rightarrow\ \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2\ ,\ \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \ \Rightarrow\ \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1$$

と置き換えればいいということが分かるので、分配関数は

$$Z = \int_{periodic}\mathcal{D}\phi_1\mathcal{D}\phi_2\exp[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L}]$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2)^2 + (\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1)^2 + (\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2 + m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)]$$

ということになります (定数は実数スカラー場と同じように最終的には寄与しないので無視します)。後のために、これを部分積分すると (虚時間 τ と空間の全微分は落ちます。虚時間は ϕ の周期性のため)

$$-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}-i\mu\phi_2)^2+(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau}+i\mu\phi_1)^2+(\nabla\phi_1)^2+(\nabla\phi_2)^2+m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau})^2-\mu^2\phi_2^2-2i\mu\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}+(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau})^2-\mu^2\phi_1^2+2i\mu\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau}$$

$$+(\nabla\phi_1)^2+(\nabla\phi_2)^2+m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[-\phi_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\tau^2}-\mu^2\phi_2^2-2i\mu\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}-\phi_2\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\tau^2}-\mu^2\phi_1^2+2i\mu\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau}$$

$$-\phi_1\nabla^2\phi_1-\phi_2\nabla^2\phi_2+m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[-\phi_1(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2+\mu^2)\phi_1-\phi_2(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2+\mu^2)\phi_2-2i\mu(\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}-\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau})\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[\phi_1(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2+\mu^2)\phi_1+\phi_2(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2+\mu^2)\phi_2+2i\mu(\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}-\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau})\Big]$$

ここから実数スカラー場と同じように $\log Z$ を求めていくことが出来ます。しかし、ここからはタイトルになっているように、ボーズ・アインシュタイン凝縮について触れたいので特殊なことをします。
通常の統計力学でもボーズ・アインシュタイン凝縮を扱うときには、運動量 0 での状態を分離して扱うように、ここでもそのように扱いします。どうするのかというと、場のフーリエ展開を

$$\phi_1(\tau,\boldsymbol{x})=\sqrt{2}\alpha\cos\theta+\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$$

$$\phi_2(\tau,\boldsymbol{x})=\sqrt{2}\alpha\sin\theta+\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_2(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$$

のように定義します ($\phi_1(n,\boldsymbol{p})$ と書いていますが、ちゃんと書けば $\phi_1(\omega_n,\boldsymbol{p})$ です)。第二項は通常のフーリエ展開なんですが、第一項に α,θ というのをくっつけ、α,θ に運動量 0(正確には松原振動数が 0 で運動量 0) での振舞いを持たせることにします。ここでの $\cos\theta,\sin\theta$ は

$$\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2)\\ \sqrt{2}\phi&=\phi_1+i\phi_2\end{aligned}$$

とした時に、ϕ_1,ϕ_2 というのは複素平面上で ϕ の角度 θ によって $\cos\theta,\sin\theta$ によってかけることからで、そのために運動量 0 での ϕ を α としたときにこのように書くことになります。また、θ は回転角であるために θ というのは位相変換に現れる変数です。言い換えれば $U(1)$ 変換を行うときに出てくるものです。で、ラグランジアンは位相変換に対して不変になっているので、θ による依存性は消えなくてはいけません。実際に計算していくと θ は消えてくれるのが分かります。
このフーリエ展開を作用部分に入れればいいんですが、途中計算がわりと長いので分割して計算します。この計算を行う時に、$\phi_1(0,0)=\phi_2(0,0)=0$ であることに注意してください。これは運動量 0 の場合を α と θ によって表現するように分離しているためです。
まず、$\phi_1(\partial^2/\partial\tau^2+\nabla^2-m^2+\mu^2)\phi_1$ の項は

$$\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x[\phi_1(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2-m^2+\mu^2)\phi_1]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[\frac{1}{\beta^2}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\phi_1(n',\boldsymbol{p}')e^{-i(\omega_{n'}\tau-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x})}(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2)\phi_1(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$$

$$+(-m^2+\mu^2)\big(\sqrt{2}\alpha\cos\theta+\frac{1}{\beta}\sum_{n'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\phi_1(n',\boldsymbol{p}')e^{-i(\omega_{n'}\tau-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x})}\big)\big(\sqrt{2}\alpha\cos\theta+\frac{1}{\beta}\sum_{n}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[\frac{1}{\beta^2}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\phi_1(n',\boldsymbol{p}')e^{-i(\omega_{n'}+\omega_n)\tau+i(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}}(-\omega_n^2-\boldsymbol{p}^2)\phi_1(n,\boldsymbol{p})$$

$$+(-m^2+\mu^2)\big(2\alpha^2\cos^2\theta+\frac{1}{\beta^2}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\phi_1(n',\boldsymbol{p}')\phi_1(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_{n'}+\omega_n)\tau+i(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$+2\sqrt{2}\alpha\cos\theta\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-\omega_n^2-\boldsymbol{p}^2)\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})$$

$$+(-m^2+\mu^2)\big(2\beta V\alpha^2\cos^2\theta+\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})$$

$$+2\sqrt{2}\alpha\cos\theta\frac{1}{\beta}\sum_n\int_0^\beta d\tau\int d^3x\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-\omega_n^2-\boldsymbol{p}^2)\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})$$

$$+(-m^2+\mu^2)\big(2\beta V\alpha^2\cos^2\theta+\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})\big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-\omega_n^2-\boldsymbol{p}^2-m^2+\mu^2)\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})+2\beta V\alpha^2\cos^2\theta(\mu^2-m^2)\Big]$$

三次元体積を V として定義しています。ϕ_2 での場合はこの結果の $\cos\theta$ を $\sin\theta$ に変えればいいだけです。残りの項は

$$\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x[2i\mu\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}]$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{2i\mu}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[\big(\sqrt{2}\alpha\sin\theta+\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_2(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\big)\\
&\qquad\qquad\times\frac{\partial}{\partial\tau}\big(\sqrt{2}\alpha\cos\theta+\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_1(n,\boldsymbol{p})e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\big)\Big]\\
&=\frac{2i\mu}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[(\sqrt{2}\alpha\sin\theta+\frac{1}{\beta}\sum_{n'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\phi_2(n',\boldsymbol{p}')e^{-i(\omega_{n'}\tau-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x})}\big)\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\phi_1(n,\boldsymbol{p})(-i\omega_n)\Big]\\
&=\frac{2i\mu}{2}\int_0^\beta d\tau\int d^3x\Big[\sqrt{2}\alpha\sin\theta\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\phi_1(n,\boldsymbol{p})(-i\omega_n)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\beta^2}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\phi_2(n',\boldsymbol{p}')\phi_1(n,\boldsymbol{p})(-i\omega_n)e^{-i(\omega_{n'}+\omega_n)\tau+i(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}}\Big]\\
&=\frac{2i\mu}{2}\Big[\sqrt{2}\alpha\sin\theta\frac{1}{\beta}\sum_n\int_0^\beta d\tau\int d^3x\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i(\omega_n\tau-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\phi_1(n,\boldsymbol{p})(-i\omega_n)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})(-i\omega_n)\Big]\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}2\mu\omega_n\phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})
\end{aligned}$$

$\phi_1\partial\phi_2/\partial\tau$ の場合は、これの ϕ_1 と ϕ_2 を入れ替えて、符号を反対にすればいいです。全部をあわせると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\big[&-(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2-\mu^2)\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})\\
&-(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2-\mu^2)\phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\phi_2(n,\boldsymbol{p})\\
&+2\mu\omega_n\phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\phi_1(n,\boldsymbol{p})-2\mu\omega_n\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\phi_2(n,\boldsymbol{p})\big]\\
&+2\beta V\alpha^2\cos^2\theta(\mu^2-m^2)+2\beta V\alpha^2\sin^2\theta(\mu^2-m^2)\Big]
\end{aligned}$$

最後の項以外は 2×2 行列を使うと綺麗に書くことができて、対角成分に

$$-\omega_n^2-\boldsymbol{p}^2-m^2+\mu^2$$

これを入れて、非対角成分に

$$\pm 2\mu\omega_n$$

をいれることで

$$
-\left(\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\ \phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\right)\left(\begin{array}{cc} \omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2-\mu^2 & 2\mu\omega_n \\ -2\mu\omega_n & \omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2-\mu^2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \phi_1(n,\boldsymbol{p}) \\ \phi_2(n,\boldsymbol{p}) \end{array}\right)
$$

$$
=-\left(\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\ \phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\right)D\left(\begin{array}{c} \phi_1(n,\boldsymbol{p}) \\ \phi_2(n,\boldsymbol{p}) \end{array}\right)
$$

というわけで、大分配関数は

$$
Z=\int_{periodic}\mathcal{D}\phi_1\mathcal{D}\phi_2\exp\Big[\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\ \phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\right)D\left(\begin{array}{c} \phi_1(n,\boldsymbol{p}) \\ \phi_2(n,\boldsymbol{p}) \end{array}\right)
$$

$$
+2\beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)\big)\Big]
$$

exp 内は第一項は実数スカラー場の場合と同じなので同様に処理すればよく、第二項には ϕ_1,ϕ_2 がいないので積分の外に出せてしまうので、$\log Z$ は

$$
\log Z=\beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\log(\det D)=\beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log D
$$

$\det D$ は二重構造の行列式 (2×2 行列と固有値に対して) になっているので、まずは単純に 2×2 行列の行列式の計算を行って

$$
\det D=(\omega_n^2+\boldsymbol{p}^2+m^2-\mu^2)^2+4\mu^2\omega_n^2
$$

そして、残りは $\log\det A=\mathrm{tr}\log A$ より ($\omega_{\boldsymbol{p}}^2=\boldsymbol{p}^2+m^2$)

$$
\begin{aligned}
\log Z &= \beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log[(\omega_n^2+\omega_{\boldsymbol{p}}^2-\mu^2)^2+4\mu^2\omega_n^2] \\
&= \beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log[(\omega_n^2+(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu))^2+4\mu^2\omega_n^2] \\
&= \beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log[\omega_n^4+(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)^2(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)^2+2\omega_n^2(\omega_{\boldsymbol{p}}^2-\mu^2)+4\mu^2\omega_n^2] \\
&= \beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log[\omega_n^4+(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)^2(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)^2+2\omega_n^2(\omega_{\boldsymbol{p}}^2+\mu^2)] \\
&= \beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log[(\omega_n^2+(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)^2)(\omega_n^2+(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)^2)] \\
&= \beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-\frac{1}{2}\sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\log[\omega_n^2+(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)^2]+\log[\omega_n^2+(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)^2])
\end{aligned}
$$

次に和を計算するんですが、実数スカラー場での場合から $\omega_{\boldsymbol{p}}$ が $\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu$ に変更されているだけであり、この部分は和の計算と関係ないので、$\omega_{\boldsymbol{p}}$ を $\omega_{\boldsymbol{p}}\pm\mu$ にすることで終わります。よって

$$
\log Z=\beta V\alpha^2(\mu^2-m^2)-V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}[\beta\omega_{\boldsymbol{p}}+\log(1-e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)})+\log(1-e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)})]
$$

ということになります。ここでの結果はフェルミオンでの場合と同じように粒子、反粒子が化学ポテンシャルの符号を反転させるようにして入ってきています。また、第一項をなくせば複素スカラー場での $\log Z$ になります。
この大分配関数から凝縮がどのように起きるのかを見ます。まず、μ には制限がかかっていることを言っておきます。それは

$$\int_{periodic} \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp\left[-\frac{1}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\phi_1(-n,-\boldsymbol{p})\ \phi_2(-n,-\boldsymbol{p})\right) D \left(\begin{array}{c} \phi_1(n,\boldsymbol{p}) \\ \phi_2(n,\boldsymbol{p}) \end{array} \right) \right]$$

において、exp の中が負になっていないと収束してくれないという条件からきます。つまり、$n=0, \boldsymbol{p}=0$ の場合においては、$m^2-\mu^2$ が常に 0 以上となっていなければならないという制限がかかります。このことによって μ には

$$|\mu| \leq m$$

という条件がつきます。
次に、粒子密度 (電荷密度)ρ がどうなっているのか求めます。密度は

$$\rho = \frac{T}{V}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z\right)_{T,V}$$

で求められるので

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{T}{V}[2\beta V\alpha^2\mu - V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{-\beta e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)}}{1-e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)}} + \frac{\beta e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)}}{1-e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)}})] \\
&= 2\mu\alpha^2 - \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{-e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)}}{e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)}(e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)}-1)} + \frac{e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)}}{e^{-\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)}(e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)}-1)}) \\
&= 2\mu\alpha^2 + \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)}-1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)}-1})
\end{aligned}$$

この式は、第一項が凝縮 (運動量 0 の状態) による寄与、第二項がそれ以外の状態 (運動量が 0 でない状態、励起状態) による寄与というように、二つの寄与が分離した形になっています (第二項は $|\boldsymbol{p}|=0$ に対して 0 になっている)。
ここから調べていく上で大事なのは α という凝縮した状態を表わすパラメータはどうなっているのかです。しかし、今までやってきたことを振り返ってみると、α を完全に決めるための仕組みが用意されていないことが分かると思います。なので、$\log Z$ を α による関数だと思って、その極値を見てみます。$\log Z$ を α で微分すると

$$\frac{\partial\log Z}{\partial\alpha} = 2\beta V\alpha(\mu^2-m^2) = 0$$

このようになっており、$\mu \neq m(|\mu| \leq m)$ のときには $\alpha = 0$ であることが分かります。この場合、凝縮を表わすパラメータが消えて $\log Z$ は通常の $\log Z$ に戻るために、凝縮なんか起きていないことが分かります。なので、この場合は無視します。
次の可能性である $|\mu| = m$ ではこの極値の式から α を決定することができません。なので、違う情報を組み込みます。そのために、粒子密度の式を見てみます

$$\rho = 2\mu\alpha^2 + \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-\mu)}-1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+\mu)}-1})$$

もし粒子密度 ρ を固定して温度を下げていくなら、μ を増加させないと固定し続けることができないことが分かります。しかし、μ には $|\mu| \leq m$ という制限がかかっているために、$|\mu| = m$ でストップし μ による固定がここで限界になります。この状況になってもまだ温度は下げることができるなら、$2\mu\alpha^2$ からの寄与、つまり α からの寄与によって粒子密度を固定させなくてはいけなくなります。このように考えていけば $|\mu| = m$ となる温度が凝縮に対する臨界温度 T_C になっているだろういうことになります。そして、温度が $T < T_C$ となっている領域では α は

$$\alpha^2 = \frac{1}{2m}\Big(\rho - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big(\frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-m)}-1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+m)}-1}\Big)\Big)$$

となっていることが分かります。この式は $|\mu| = m$ という状況で凝縮が起こるということから、$\rho|_{|\mu|=m}$ として出てくる式です。
臨界温度 T_C は $|\mu| = m$ で $T = T_C$ となることから、$\alpha^2 = 0, |\mu| = m$ での粒子密度の式

$$\rho = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big(\frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}-m)}-1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\boldsymbol{p}}+m)}-1}\Big)$$

これで求めることが出来ます。これが厳密に解ければいいんですが、そうもいかないので極限計算を行います。しかし、さらに面倒なことに極限へ持っていこうとした場合でも複雑な計算を行う必要があるので、ここでは結果だけを示します (超相対論的極限は「圧力への寄与」での方法を使えばいいです)。極限としては二つの場合をとって

- 非相対論的極限 ($T \ll m$)

$$T_C = \frac{2\pi}{m}\Big(\frac{\rho}{\zeta(3/2)}\Big)^{\frac{2}{3}}$$

- 超相対論的極限 ($T \gg m$)

$$T_C = \sqrt{\frac{3\rho}{m}}$$

極限は静止質量に対して温度がどうなっているのかで取っています。$\zeta(t)$ はリーマンのゼータ関数 (zeta function) で

$$\zeta(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^t}$$

このように定義されるものです。ここでの非相対論的極限での結果はちゃんと統計力学での結果を再現しています。