Super Virasoro 代数

フェルミオンが加わったことによる Virasoro 代数の変更を見ます。ここでは RNS 形式での開弦を使っていきます。super Virasoro 代数を求めるための計算を長々と行っているだけなので、結果だけでいい人は飛ばしていいです。現代的には共形場理論と絡めた方がいい気がしますが、それには触れないです。
「世界面での超対称性」と同じように、R 境界条件の添え字 m, n は整数、NS 境界条件の添え字 r, s は半整数とします。ただし、途中から r, s が整数、半整数どちらも指すようにしています。

RNS 形式での作用は

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\ (\partial_a X^\mu \partial^a X^\nu - i\overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi^\nu)\eta_{\mu\nu}$$

と与えます ($\alpha' = 1/2$)。2 次元のガンマ行列 ρ^a は

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

とします。全体のエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2}g_{ab}\partial^c X^\mu \partial_c X_\mu - \frac{1}{4}i\overline{\psi}\rho_a\partial_b\psi - \frac{1}{4}i\overline{\psi}\rho_b\partial_a\psi + \frac{1}{2}g_{ab}i\overline{\psi}\rho^c\partial_c\psi$$

となっています。T_{++}, T_{--} は

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{1}{2}i\eta_{\mu\nu}\psi_+^\mu \partial_+ \psi_+^\nu$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{1}{2}i\eta_{\mu\nu}\psi_-^\mu \partial_- \psi_-^\nu$$

と計算されます ($T_{00} = T_{11}$)。$\partial_\pm, \psi_\pm^\mu, \rho^\pm$ は

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix} \qquad (\psi_-^\mu = \psi_-^{\mu *}\ ,\ \psi_+^\mu = \psi_+^{\mu *})$$

$$\partial_+ = \frac{\partial}{\partial\sigma^+} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma})\ ,\ \partial_- = \frac{\partial}{\partial\sigma^-} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma})$$

$$\rho^+ = \rho^0 + \rho^1\ ,\ \rho^- = \rho^0 - \rho^1$$

と定義しています。
まずは拘束条件を見ていきます。拘束条件はエネルギー運動量テンソルによる

$$T_{ab} = 0$$

ですが、もう 1 つ出てきます。それは super current

$$J_a = -\frac{1}{2}\rho^b\rho_a(\partial_b X^\mu)\psi_\mu$$

によって与えられます。$\pm$ 成分は

$$J_+ = -\frac{1}{2}\rho^b\rho_+(\partial_b X^\mu)\psi_\mu = (\partial_+ X^\mu)\psi_+^\nu\eta_{\mu\nu} \quad (\rho_+ = \eta_{+-}\rho^- = -\frac{1}{2}\rho^- = -\frac{1}{2}(\rho^0 - \rho^1))$$

$$J_- = -\frac{1}{2}\rho^b\rho_-(\partial_b X^\mu)\psi_\mu = (\partial_- X^\mu)\psi_-^\nu\eta_{\mu\nu} \quad (\rho_- = \eta_{-+}\rho^+ = -\frac{1}{2}\rho^+ = -\frac{1}{2}(\rho^0 + \rho^1))$$

となっています ($\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$)。拘束条件になっていることを簡単に見るために、演算子として同じ τ での $J_-(\sigma,\tau)$ の反交換関係を計算してみます。

$\psi_\pm^\mu(\sigma,\tau)$ の同じ τ での反交換関係は

$$\{\psi_\pm^\mu(\sigma), \psi_\pm^\nu(\sigma')\} = \pi\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')\ ,\ \{\psi_+^\mu(\sigma), \psi_-^\nu(\sigma')\} = \{\psi_-^\mu(\sigma), \psi_+^\nu(\sigma')\} = 0$$

τ の依存性は省いて書いています。同じ τ での $\partial_\pm X^\nu$ の交換関係も必要で、これは

$$[\partial_\pm X^\mu(\sigma), \partial'_\pm X^\nu(\sigma')] = \pm i\frac{\pi}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') \quad (\partial'_\pm = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} \pm \frac{\partial}{\partial\sigma'}))$$

$$[\partial_+ X^\mu(\sigma), \partial'_- X^\nu(\sigma')] = [\partial_- X^\mu(\sigma), \partial'_+ X^\nu(\sigma')] = 0$$

となっています (「光円錐ゲージでの開弦の量子化」の補足で求めています)。

これらを使うことで、J_- 同士の反交換関係は

$$\begin{aligned}
&\{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial_- X^\mu(\sigma))\psi_-^\nu(\sigma)(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\psi_-^\beta(\sigma') + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\psi_-^\beta(\sigma')(\partial_- X^\mu(\sigma))\psi_-^\nu(\sigma) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial_- X^\mu(\sigma))(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\psi_-^\nu(\sigma)\psi_-^\beta(\sigma') + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))(\partial_- X^\mu(\sigma))\psi_-^\beta(\sigma')\psi_-^\nu(\sigma) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial_- X^\mu(\sigma))(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\psi_-^\nu(\sigma)\psi_-^\beta(\sigma') \\
&\quad + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(i\frac{\pi}{2}\eta^{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') + \partial_- X^\mu(\sigma)\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\psi_-^\beta(\sigma')\psi_-^\nu(\sigma) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial_- X^\mu(\sigma))(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\psi_-^\nu(\sigma)\psi_-^\beta(\sigma') + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial_- X^\mu(\sigma))(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\psi_-^\beta(\sigma')\psi_-^\nu(\sigma) \\
&\quad + \frac{i\pi}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\mu}(\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma'))\psi_-^\beta(\sigma')\psi_-^\nu(\sigma) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\partial_- X^\mu(\sigma))(\partial'_- X^\alpha(\sigma'))\{\psi_-^\nu(\sigma), \psi_-^\beta(\sigma')\} + \frac{i\pi}{2}\eta_{\mu\nu}(\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma'))\psi_-^\mu(\sigma')\psi_-^\nu(\sigma) \\
&= \pi\eta_{\mu\nu}(\partial_- X^\mu(\sigma))(\partial'_- X^\nu(\sigma'))\delta(\sigma-\sigma') + \frac{i\pi}{2}\eta_{\mu\nu}(\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma'))\psi_-^\mu(\sigma')\psi_-^\nu(\sigma)
\end{aligned}$$

第二項は σ 積分を考慮して

$$(\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma'))\psi_-^\mu(\sigma')\psi_-^\nu(\sigma) = -\delta(\sigma-\sigma')\psi_-^\mu(\sigma')\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi_-^\nu(\sigma)$$

と変形すれば

$$
\begin{aligned}
\{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} &= \pi\eta_{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')\partial_- X^\mu(\sigma)\partial'_- X^\nu(\sigma') - \frac{i\pi}{2}\eta_{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')\psi^\mu_-(\sigma')\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi^\nu_-(\sigma) \\
&= \pi\delta(\sigma-\sigma')(\eta_{\mu\nu}\partial_- X^\mu(\sigma)\partial'_- X^\nu(\sigma') - \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}\psi^\mu_-(\sigma')\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi^\nu_-(\sigma)) \\
&= \pi\delta(\sigma-\sigma')(\eta_{\mu\nu}\partial_- X^\mu(\sigma)\partial'_- X^\nu(\sigma') - \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}\psi^\mu_-(\sigma')(\partial_+ - \partial_-)\psi^\nu_-(\sigma)) \\
&= \pi\delta(\sigma-\sigma')(\eta_{\mu\nu}\partial_- X^\mu(\sigma)\partial'_- X^\nu(\sigma') - \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}(\psi^\mu_-(\sigma')\partial_+\psi^\nu_-(\sigma) - \psi^\mu_-(\sigma')\partial_-\psi^\nu_-(\sigma)))
\end{aligned}
$$

$\psi^\mu_-(\sigma')\partial_+\psi^\nu_-(\sigma)$ を運動方程式 $\partial_+\psi^\nu_-(\sigma,\tau)=0$ によって消すことで

$$
\{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} = \pi\delta(\sigma-\sigma')(\eta_{\mu\nu}\partial_- X^\mu(\sigma)\partial'_- X^\nu(\sigma') + \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}\psi^\mu_-(\sigma')\partial_-\psi^\nu_-(\sigma)))
$$

これは $\delta(\sigma-\sigma')$ を踏まえて括弧内を $\sigma=\sigma'$ とすれば、T_{--} と同じです。J_+ 同士の場合は同様に求められ、J_+ と J_- の場合は明らかに 0 なので、$J_\pm$ の同じ τ での反交換関係は

$$
\begin{aligned}
&\{J_+(\sigma), J_+(\sigma')\} = \pi\delta(\sigma-\sigma')T_{++}(\sigma) \\
&\{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} = \pi\delta(\sigma-\sigma')T_{--}(\sigma) \\
&\{J_+(\sigma), J_-(\sigma')\} = 0
\end{aligned}
$$

となっています。

「Virasoro 代数」で触れたように、古典的な拘束条件 $T_{++}=0$ に対応する物理的な状態 $|\psi\rangle$ に対する条件を、T_{++} から求められる Virasoro 演算子 L_n によって

$$
(L_0-a)|\psi\rangle\ ,\ L_n|\psi\rangle = 0 \quad\quad n>0
$$

と与えます。そして、今求められた $J_\pm$ の反交換関係を見てみると、$T_{++}=T_{--}=0$ であるなら

$$
J_+ = J_- = 0
$$

となっている必要があることが分かります。つまり、これが新しい拘束条件となり、今の拘束条件は

$$
T_{++} = T_{--} = J_+ = J_- = 0
$$

となります。これを super Virasoro 拘束条件と呼びます。実際に $J_+=J_-=0$ も含めることでゲージ固定が行われます。このように拘束条件に $J_\pm$ が入ってくるので Virasoro 代数を求めるときに $J_\pm$ も考慮します。

エネルギー・運動量テンソルから Virasoro 演算子を求めます。まずは古典的に求めます。$\psi^\mu_\pm$ の展開は、NS 境界条件では

$$
\begin{aligned}
\psi^\mu_-(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_r b^\mu_r e^{-ir(\tau-\sigma)} \\
\psi^\mu_+(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_r b^\mu_r e^{-ir(\tau+\sigma)}
\end{aligned}
$$

R 境界条件では

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}$$

b_r^μ, d_n^μ はグラスマン数、n は整数 $0,\pm1,\ldots$、r は半整数 $\pm1/2,\pm3/2,\ldots$ です (m,n は整数、r,s は半整数)。ここでの和の範囲の表記として

$$\sum_r = \sum_{r\in Z+1/2}$$

と書いたときは全ての半整数 $\pm1/2,\pm3/2,\ldots$ に対する和 (Z は整数の集まりで、それに $1/2$ を足すから $Z+1/2$ は全ての半整数)、

$$\sum_n = \sum_{n\in Z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}$$

と書いたときは全ての整数 $0,\pm1,\ldots$ に対する和です。

　σ の符号の反転に対して

$$\partial_+ = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\sigma}) \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\sigma}) = \partial_-$$

$$\partial_- = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\sigma}) \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\sigma}) = \partial_+$$

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k f_k^\mu e^{-ik(\tau-\sigma)} \ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k f_k^\mu e^{-ik(\tau+\sigma)} = \psi_+^\mu(\tau,\sigma)$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k f_k^\mu e^{-ik(\tau+\sigma)} \ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k f_k^\mu e^{-ik(\tau-\sigma)} = \psi_-^\mu(\tau,\sigma)$$

となっているので (f_k^μ は d_n^μ, b_r^μ のことです)、

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00}-T_{01}) = \partial_-X^\mu\partial_-X_\mu + \frac{1}{2}i\eta_{\mu\nu}\psi_-^\mu\partial_-\psi_-^\nu \ \Rightarrow\ \partial_+X^\mu\partial_+X_\mu + \frac{1}{2}i\eta_{\mu\nu}\psi_+^\mu\partial_+\psi_+^\nu = T_{++}$$

これから $\tau=0$ において、Virasoro 生成子 L_n は

$$L_n = \frac{1}{\pi}(\int_0^\pi d\sigma\ e^{in\sigma}T_{++} + \int_0^\pi d\sigma\ e^{-in\sigma}T_{--}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\ e^{in\sigma}T_{++}$$

と定義できます。というわけで、T_{++} に展開形を入れます。ボソン部分はすでに「Virasoro 代数」で

$$L_n^b = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}^\mu\alpha_m^\nu\eta_{\mu\nu}$$

と求めています (古典的な場合なので α_n の並びを与えていない)。

残りのフェルミオン部分

$$L_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}T_{++}^f = \frac{1}{\pi}\frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}\psi_+^\mu\partial_+\psi_+^\nu$$

を計算します。NS 境界条件とすれば

$$\partial_+\psi_+^\nu = \sum_r b_r^\mu\partial_+ e^{-ir(\tau+\sigma)} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\sum_r r b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}$$

なので、$\tau = 0$ として

$$\begin{aligned}
L_n^f = \frac{1}{\pi}\frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}\psi_+^\mu\partial_+\psi_+^\nu &= \frac{1}{4\pi}\eta_{\mu\nu}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\sum_{r,s} r b_s^\mu b_r^\nu e^{-i(r+s-n)\sigma} \\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{r,s} r b_s^\mu b_r^\nu \eta_{\mu\nu} 2\pi\delta_{s,n-r} \\
&= \frac{1}{2}\sum_r r b_{n-r}^\mu b_r^\nu \eta_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r'} (r'+n) b_{-r'}^\mu b_{n+r'}^\nu \eta_{\mu\nu} \qquad (r' = r-n)
\end{aligned}$$

b_n^μ はグラスマン数なので、グラスマン数 g_n の和では整数と半整数のどちらに対しても

$$\sum_n g_n g_{m-n} = -\sum_n g_{m-n}g_n = -\sum_{n'} g_{n'}g_{m-n'} = -\sum_n g_n g_{m-n} \qquad (n' = m-n)$$

から

$$\sum_n g_{m-n}g_n = 0$$

となっていることを使って、n の部分を

$$L_n^f = \frac{1}{2}\sum_r (r + \frac{n}{2}) b_{-r}^\mu b_{n+r}^\mu \eta_{\mu\nu}$$

と書く場合が多いです。反交換関係では $n = 0$ のときに反交換せずに $\{b_{-r}^\mu, b_r^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$ となりますが、係数の n がいるために 0 になります。

R 境界条件としても添え字が半整数から整数に変更されるだけなので、同じように計算していくことで

$$L_n^f = \frac{1}{2}\sum_m (m + \frac{n}{2}) d_{-m}^\mu d_{n+m}^\nu \eta_{\mu\nu}$$

となります。

J_+, J_- も拘束条件になっていることから T_{++} と同じものを作ります。NS 境界条件として

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\ e^{ir\sigma}(e^{ir\sigma}J_+ + e^{-ir\sigma}J_-) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\ e^{ir\sigma}J_+ = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\eta_{\mu\nu}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\ e^{ir\sigma}(\partial_+X^\mu)\psi_+^\nu$$

$\sqrt{2}$ は余計な係数が出てこないようにするためです。∂_+X^μ は X^μ の展開

$$X^\mu = x_0^\mu + \alpha_0^\mu\tau + i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}e^{in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)})$$

から求めます (今は $\alpha' = 1/2$)。これから

$$\partial_+X^\mu = \frac{1}{2}\alpha_0^\mu + i\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(-in\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}) = \frac{1}{2}\alpha_0^\mu + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} = \frac{1}{2}\sum_n \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}$$

これと ψ_+^μ の展開を $\tau = 0$ として入れて

$$\begin{aligned}
G_r &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\eta_{\mu\nu}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\ e^{ir\sigma}(\partial_+X^\mu)\psi_+^\nu \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\eta_{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\sum_m\sum_s \alpha_m^\mu b_s^\nu e^{ir\sigma}e^{-im\sigma}e^{-is\sigma} \\
&= \frac{1}{2\pi}\eta_{\mu\nu}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\sum_m\sum_s \alpha_m^\mu b_s^\nu e^{-i(m+s-r)\sigma} \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_m\sum_s \alpha_m^\mu b_s^\nu \delta_{m+s-r,0} \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_m \alpha_m^\mu b_{r-m}^\nu
\end{aligned}$$

R 境界条件でも同様で

$$F_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\ e^{in\sigma}J_+ = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\eta_{\mu\nu}\int_{-\pi}^\pi d\sigma\ e^{in\sigma}(\partial_+X^\mu)\psi_+^\nu = \eta_{\mu\nu}\sum_m \alpha_m^\mu d_{n-m}^\nu$$

というわけで、NS 境界条件では

$$\begin{aligned}
L_n^f &= \frac{1}{2}\sum_r (r+\frac{n}{2})d_{-r}^\mu d_{n+r}^\nu \eta_{\mu\nu} \\
G_r &= \sum_m \alpha_m^\mu b_{r-m}^\nu \eta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

R 境界条件では

$$\begin{aligned}
L_n^f &= \frac{1}{2}\sum_m (m+\frac{n}{2})d_{-m}^\mu d_{n+m}^\nu \eta_{\mu\nu} \\
F_n &= \sum_m \alpha_m^\mu d_{n-m}^\nu \eta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

となります。super Virasoro 代数はこれらによる (反) 交換関係を指します。
　ここから (反) 交換関係を求めていきます。まずは演算子化します。演算子のときの並びは正規積「: :」によって表現すればいいので

$$(\mathrm{NS})\quad L_n^f=\frac{1}{2}\sum_r(r+\frac{n}{2}):b_{-r}^\mu b_{n+r}^\nu:\eta_{\mu\nu}\ ,\ G_r=\sum_m:\alpha_m^\mu b_{r-m}^\nu:\eta_{\mu\nu}$$

$$(\mathrm{R})\quad L_n^f=\frac{1}{2}\sum_m(m+\frac{n}{2}):d_{-m}^\mu d_{n+m}^\nu:\eta_{\mu\nu}\ ,\ F_n=\sum_m:\alpha_m^\mu d_{n-m}^\nu:\eta_{\mu\nu}$$

となります (正規積は右側に消滅演算子が来るようにする)。G_r, F_n はボソンとフェルミオンによる並びなので、正規積は意味がなくなり外せます (α_m^μ と b_{r-m}^ν, d_{n-m}^ν は交換するから)。どれが生成、消滅演算子になっているかは反交換関係

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\}=\eta^{\mu\nu}\delta_{r+s,0}\ ,\ \{d_n^\mu, d_m^\nu\}=\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \tag{1}$$

と、通常の量子論での生成、消滅演算子 $a_i^\dagger, a_i$ の反交換関係

$$\{a_i, a_j^\dagger\}=\delta_{ij}$$

を比較すればいいです。なので、生成演算子は b_{-r}^μ, d_{-n}^μ、消滅演算子は b_r^μ, d_n^μ となります ($r, n>0$)。基底状態 $|0\rangle$ はそれぞれの境界条件において

$$\alpha_m|0\rangle=0\ ,\ b_r^\mu|0\rangle=0\quad(m,r>0)\qquad\qquad \alpha_m|0\rangle=0\ ,\ d_n^\mu|0\rangle=0\quad(m,n>0)$$

と定義されます。また、反交換関係から分かるように、実際に正規積が効いてくるのは $n=0$ のときです (ボソンのときと同じ)。並びを替えるときは、b_r^μ, d_n^μ はグラスマン数であることから

$$:b_s^\mu b_{-r}^\nu:=-b_{-r}^\mu b_s^\nu\ ,\ :d_n^\mu d_{-m}^\nu:=-d_{-m}^\mu d_n^\nu\quad(r,s,m,n>0)$$

となります。
　というわけで、正規積は外すために和の範囲を区切って L_n^f を書くと、NS 境界条件では

$$L_n^f=\frac{1}{2}\sum_r(r+\frac{n}{2}):b_{-r}^\mu b_{n+r}^\nu:\eta_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\sum_{r\leq-1/2}(r+\frac{n}{2})b_{n+r}^\nu b_{-r}^\mu\eta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\sum_{r\geq1/2}(r+\frac{n}{2})b_{-r}^\mu b_{n+r}^\nu\eta_{\mu\nu}$$

R 境界条件では

$$L_n^f=\frac{1}{2}\sum_m(m+\frac{n}{2}):d_{-m}^\mu d_{m+n}^\nu:\eta_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\sum_{m<0}(m+\frac{n}{2})d_{m+n}^\nu d_{-m}^\mu\eta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\sum_{m\geq0}(m+\frac{n}{2})d_{-m}^\mu d_{m+n}^\nu\eta_{\mu\nu}$$

NS 境界条件と R 境界条件を区別していくのは面倒なので、ここから両方に対して b_{-r}^μ を使うことにし、正規積は

$$L_n^f=\frac{1}{2}\sum_r(r+\frac{n}{2}):b_{-r}^\mu b_{n+r}^\nu:\eta_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\sum_{r<0}(r+\frac{n}{2})b_{n+r}^\nu b_{-r}^\mu\eta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\sum_{r\geq0}(r+\frac{n}{2})b_{-r}^\mu b_{n+r}^\nu\eta_{\mu\nu} \tag{2}$$

と書くことにします。NS 境界条件では第二項の $r\geq0$ を $r>0$ にして、r は半整数とします。R 境界条件では b を d にして r を整数とします。なので、特に何も言わなければ r, s は整数、半整数のどちらも指します。

ついでに、L_n^b も書いておくと

$$L_n^b = \frac{1}{2}\sum_l : \alpha_{n-l}^\mu \alpha_l^\nu := \frac{1}{2}\sum_{l\leq 0}\alpha_l^\nu \alpha_{n-l}^\mu + \frac{1}{2}\sum_{l>0}\alpha_{n-l}^\mu \alpha_l^\nu \tag{3}$$

L_n^b, α_m^μ の交換関係は

$$[L_m^b, L_n^b] = (m-n)L_{m+n}^b + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \tag{4}$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \tag{5}$$

となります。$[L_m^b, L_n^b]$ は「Virasoro 代数」で計算しているものを共変な形にしたもので (光円錐ゲージを取らない形)、I を μ にして、$\eta^{II} = D-2$ を $\eta^\mu{}_\mu = D$ にしています。

求める (反) 交換関係は

$$[L_m, L_n]\ ,\ [L_m, G_r]\ ,\ [L_m, F_n]\ ,\ \{G_r, G_s\}\ ,\ \{F_m, F_n\}$$

というものです。G_r, F_n 同士が反交換関係なのは b_r^μ が 1 個だけいるからです。

簡単な L_m と G_r, F_n の交換関係から求めます。正規積は意味がないので、単純に交換関係を展開していくことで、NS 境界条件では

$$\begin{aligned}
[L_n, G_r] &= \eta_{\mu\nu}\sum_m [L_n^b, \alpha_{-m}^\mu b_{r+m}^\nu] + \eta_{\mu\nu}\sum_m [L_n^f, \alpha_{-m}^\mu b_{r+m}^\nu] \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_m ([L_n^b, \alpha_{-m}^\mu]b_{r+m}^\nu + \alpha_{-m}^\mu [L_n^b, b_{r+m}^\nu] + \alpha_{-m}^\mu [L_n^f, b_{r+m}^\nu] + [L_n^f, \alpha_{-m}^\mu] b_{r+m}^\nu) \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_m [L_n^b, \alpha_{-m}^\mu] b_{r+m}^\nu + \eta_{\mu\nu}\sum_m \alpha_{-m}^\mu [L_n^f, b_{r+m}^\nu] \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_m m\alpha_{n-m}^\mu b_{r+m}^\nu + \eta_{\mu\nu}\sum_m (-r-m-\frac{n}{2})\alpha_{-m}^\mu b_{r+m+n}^\nu \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_m (m+n)\alpha_{-m}^\mu b_{r+m+n}^\nu + \eta_{\mu\nu}\sum_m (-r-m-\frac{n}{2})\alpha_{-m}^\mu b_{r+m+n}^\nu \\
&= (-r+\frac{n}{2})\sum_m \alpha_{-m}^\mu b_{r+m+n}^\nu \eta_{\mu\nu} \\
&= (-r+\frac{n}{2})G_{r+n}
\end{aligned}$$

途中で、「Virasoro 代数」で求めた

$$[L_n^b, \alpha_{-m}^\mu] = m\alpha_{n-m}^\mu$$

を使っています。L_n と F_m の交換関係も同じ手順なので

$$[L_n, F_m] = (-r+\frac{n}{2})F_{m+n}$$

となります。

今度は $[L_m, L_n]$ から求めていきます。$[L_m, L_n]$ は

$$[L_m, L_n] = [L_m^b + L_m^f, L_n^b + L_n^f] = [L_m^b, L_n^b] + [L_m^f, L_n^f] + [L_m^b, L_n^f] + [L_m^f, L_n^b]$$

ボソンとフェルミオンは交換するので第三項と第四項は消えます。第一項はすでに (4) と求まっているので、フェルミオン部分だけ求めればいいです。b^μ_{-r} の表記は (2) に従うようにします (b^μ_{-r} が NS,R 境界条件の両方に対応し、r, s は整数、半整数の両方に対応)。

必要になるので先に $[b^\mu_{-r}, L^f_n]$ を求めます。(1) と (2) を使って変形していけば

$$\begin{aligned}
[b^\mu_{-r}, L^f_n] &= \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_s((s+\frac{n}{2})b^\mu_{-r} : b^\alpha_{-s}b^\beta_{n+s} : -(s+\frac{n}{2}) : b^\alpha_{-s}b^\beta_{n+s} : b^\mu_{-r}) \\
&= \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s<0}(-(s+\frac{n}{2})b^\mu_{-r}b^\beta_{n+s}b^\alpha_{-s} + (s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}b^\alpha_{-s}b^\mu_{-r}) \\
&\quad + \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s\geq 0}((s+\frac{n}{2})b^\mu_{-r}b^\alpha_{-s}b^\beta_{n+s} - (s+\frac{n}{2})b^\alpha_{-s}b^\beta_{n+s}b^\mu_{-r}) \\
&= \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s<0}(-(s+\frac{n}{2})(\eta^{\mu\beta}\delta_{n+s-r,0} - b^\beta_{n+s}b^\mu_{-r})b^\alpha_{-s} + (s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}b^\alpha_{-s}b^\mu_{-r}) \\
&\quad + \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s\geq 0}((s+\frac{n}{2})b^\mu_{-r}b^\alpha_{-s}b^\beta_{n+s} - (s+\frac{n}{2})b^\alpha_{-s}(\eta^{\beta\mu}\delta_{n+s-r,0} - b^\mu_{-r}b^\beta_{n+s})) \\
&= -\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\beta}\frac{1}{2}\sum_{s<0}(s+\frac{n}{2})b^\alpha_{-s}\delta_{n+s-r,0} - \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\mu}\frac{1}{2}\sum_{s\geq 0}(s+\frac{n}{2})b^\alpha_{-s}\delta_{n+s-r,0} \\
&\quad + \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s<0}((s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}b^\mu_{-r}b^\alpha_{-s} + (s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}b^\alpha_{-s}b^\mu_{-r}) \\
&\quad + \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s\geq 0}((s+\frac{n}{2})b^\mu_{-r}b^\alpha_{-s}b^\beta_{n+s} + (s+\frac{n}{2})b^\alpha_{-s}b^\mu_{-r}b^\beta_{n+s}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_s(s+\frac{n}{2})b^\mu_{-s}\delta_{n+s-r,0} \\
&\quad + \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s<0}(s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}\{b^\mu_{-r}, b^\alpha_{-s}\} + \eta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\sum_{s\geq 0}(s+\frac{n}{2})\{b^\mu_{-r}, b^\alpha_{-s}\}b^\beta_{n+s} \\
&= -\frac{1}{2}(r-n+\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} + \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\alpha}\frac{1}{2}\sum_{s<0}(s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}\delta_{-r-s,0} + \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\alpha}\frac{1}{2}\sum_{s\geq 0}(s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}\delta_{-r-s,0} \\
&= -\frac{1}{2}(r-\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} + \frac{1}{2}\sum_s(s+\frac{n}{2})b^\beta_{n+s}\delta_{-r-s,0} \\
&= -\frac{1}{2}(r-\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} - \frac{1}{2}(r-\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} \\
&= -(r-\frac{n}{2})b^\mu_{n-r}
\end{aligned}$$

となるので

$$[b^\mu_{-r}, L^f_n] = (-r+\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} \tag{6}$$

$[L^f_m, L^f_n]$ を計算していきます。まずは (2) によって

$$
\begin{aligned}
[L^f_m, L^f_n] &= \eta_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_r (r+\frac{m}{2})[: b^\mu_{-r} b^\nu_{m+r} :, L^f_n] \\
&= -\eta_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})[b^\nu_{m+r} b^\mu_{-r}, L^f_n] + \eta_{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})[b^\mu_{-r} b^\nu_{m+r}, L^f_n] \\
&= \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(-A_1 + A_2)
\end{aligned}
$$

A_1 は (6) を使って

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})[b^\nu_{m+r} b^\mu_{-r}, L^f_n] \\
&= \sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})([b^\nu_{m+r}[b^\mu_{-r}, L^f_n] + [b^\nu_{m+r}, L^f_n]b^\mu_{-r}) \\
&= \sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})(b^\nu_{m+r}(-r+\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} + (r+m+\frac{n}{2})b^\nu_{n+m+r} b^\mu_{-r}) \\
&= -\sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})((r-\frac{n}{2})b^\nu_{m+r} b^\mu_{n-r} - (r+m+\frac{n}{2})b^\nu_{n+m+r} b^\mu_{-r})
\end{aligned}
$$

A_2 は

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})[b^\mu_{-r} b^\nu_{m+r}, L^f_n] \\
&= \sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})(b^\mu_{-r}[b^\nu_{m+r}, L^f_n] + [b^\mu_{-r}, L^f_n]b^\nu_{m+r}) \\
&= \sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})(b^\mu_{-r}(r+m+\frac{n}{2})b^\nu_{m+n+r} + (-r+\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} b^\nu_{m+r}) \\
&= \sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})((r+m+\frac{n}{2})b^\mu_{-r} b^\nu_{m+n+r} - (r-\frac{n}{2})b^\mu_{n-r} b^\nu_{m+r})
\end{aligned}
$$

合わせて

$$\begin{aligned}
-A_1+A_2 =& \sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})((r-\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+r}b^{\mu}_{n-r}-(r+m+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r} \\
&+\sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})((r+m+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}-(r-\frac{n}{2})b^{\mu}_{n-r}b^{\nu}_{m+r}) \\
=& -\sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}+\sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r} \\
&+\sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})(r-\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+r}b^{\mu}_{n-r}-\sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})(r-\frac{n}{2})b^{\mu}_{n-r}b^{\nu}_{m+r} \\
=& -\sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}+\sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r} \\
&+\sum_{r<-n}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}-\sum_{r\geq -n}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}
\end{aligned}$$

r を $r+n$ にずらしています。これの第三項は

$$\begin{aligned}
&\sum_{r<-n}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r} \\
&= \sum_{r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}-\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}
\end{aligned}$$

第四項は

$$\begin{aligned}
&\sum_{r\geq -n}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r} \\
&= \sum_{r\geq 0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}+\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}
\end{aligned}$$

これらによって

$$\begin{aligned}
-A_1+A_2 =& -\sum_{r<0}(r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}+\sum_{r\geq 0}(r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r} \\
&+\sum_{r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}-\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r} \\
&-\sum_{r\geq 0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}-\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r} \\
=& -\sum_{r<0}((r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})-(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2}))b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r} \\
&+\sum_{r\geq 0}((r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})-(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2}))b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r} \\
&-\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})(b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}+b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r})
\end{aligned}$$

第一項と第二項の係数は

$$
\begin{aligned}
(r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})-(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2}) &= r^2+\frac{m}{2}\frac{2m+n}{2}+\frac{3m+n}{2}r-(r^2+\frac{n}{2}\frac{2n+m}{2}+\frac{3n+m}{2}r) \\
&= \frac{2m^2+mn}{4}-\frac{2n^2+mn}{4}+\frac{3m+n-3n-m}{2}r \\
&= \frac{1}{2}(m^2-n^2)+(m-n)r \\
&= (m-n)(r+\frac{m+n}{2})
\end{aligned}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{r<0}((r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})-(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2}))b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r} \\
&\qquad +\sum_{r\geq 0}((r+\frac{m}{2})(r+m+\frac{n}{2})-(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2}))b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r} \\
&= (m-n)(-\sum_{r<0}(r+\frac{m+n}{2})b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}+\sum_{r\geq 0}(r+\frac{m+n}{2})b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}) \\
&= (m-n)\sum_{r}(r+\frac{m+n}{2}):b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}:
\end{aligned}
$$

残りの第三項は

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})(b^{\nu}_{m+n+r}b^{\mu}_{-r}+b^{\mu}_{-r}b^{\nu}_{m+n+r}) \\
&\quad = -\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})\{b^{\mu}_{-r},b^{\nu}_{m+n+r}\} \\
&\quad = -\eta^{\mu\nu}\sum_{-n\leq r<0}(r+n+\frac{m}{2})(r+\frac{n}{2})\delta_{m+n,0} \\
&\quad = -\eta^{\mu\nu}\sum_{-n\leq r<0}(r^2+\frac{3n+m}{2}r+n\frac{2n+m}{4})\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

後はこれの和を NS,R 境界条件それぞれに対して実行すればいいです。

NS 境界条件では $r=\pm 1/2,\pm 3/2,\dots$ の和なので、整数 $-n$ を含まない

$$
\sum_{-n\leq r<0} \Rightarrow \sum_{-n<r<0}
$$

にします。そうすると

$$
\sum_{-n<r<0} r=\sum_{r=-n+1/2}^{-1/2} r=-\sum_{r=1/2}^{n-1/2} r=-(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+(n-\frac{1}{2}))
$$

これは奇数の和の

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

に当てはめて

$$\sum_{-n<r<0} r = -\frac{1}{2}(1 + 3 + \cdots + (2n-1)) = -\frac{n^2}{2}$$

となります。r^2 では

$$\sum_{-n<r<0} r^2 = \sum_{r=1/2}^{n-1/2} r^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + \cdots + (n - \frac{1}{2})^2) = \frac{1}{4}(1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2)$$

なので、これも奇数の 2 乗の和

$$S = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}$$

を使うことで

$$\sum_{-n<r<0} r^2 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{24}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{-n<r<0} (r^2 + \frac{3n+m}{2}r + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2}) &= \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{24} - \frac{3n+m}{2}\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2}n \\
&= \frac{(4n^2-1)n}{12} - \frac{3n^3+mn^2}{4} + \frac{2n^3+mn^2}{4} \\
&= \frac{4n^3-n}{12} - \frac{n^3}{4} \\
&= \frac{1}{12}n(n^2-1)
\end{aligned}$$

というわけで、

$$-A_1 + A_2 = \ (m-n)\sum_r (r + \frac{m+n}{2}) : b^\mu_{-r} b^\nu_{m+n+r} : + \eta^{\mu\nu}\frac{1}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

δ_{m+n} から $n=-m$ にしています。第一項は $\eta_{\mu\nu}/2$ を掛けることで L^f_{m+n} になります。
　というわけで

$$
\begin{aligned}
[L_m^f, L_n^f] &= \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(-A_1 + A_2) \\
&= (m-n)L_{m+n}^f + \frac{\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}}{24}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
&= (m-n)L_{m+n}^f + \frac{D}{24}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

これにボソン部分を合わせることで、NS 境界条件において

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= [L_m^b, L_n^b] + [L_m^f, L_n^f] \\
&= (m-n)L_{m+n}^b + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + (m-n)L_{m+n}^f + \frac{D}{24}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
&= (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

となります。R 境界条件の場合を求めるなら和の計算

$$
\sum_{-n\leq r<0}(r^2 + \frac{3n+m}{2}r + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2})
$$

を整数 l に対して行えばいいので

$$
\sum_{-n\leq l<0}(l^2 + \frac{3n+m}{2}l + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2}) = \sum_{l=-n}^{-1}(l^2 + \frac{3n+m}{2}l + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2}) = \sum_{l=1}^{n}(l^2 - \frac{3n+m}{2}l + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2})
$$

整数の和は

$$
\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2} \ , \ \sum_{l=1}^{n} l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}(l^2 - \frac{3n+m}{2}l + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2}) &= (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n+m}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2}\frac{2n+m}{2}n) \\
&= n(\frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{3n^2+3n+mn+m}{4} + \frac{2n^2+mn}{4}) \\
&= n\frac{n^2-3n-3m+2}{12}
\end{aligned}
$$

よって、R 境界条件では

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= [L^b_m, L^b_n] + [L^f_m, L^f_n] \\
&= (m-n)L^b_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + (m-n)L^f_{m+n} - \frac{D}{24}n(n^2-3n-3m+2)\delta_{m+n,0} \\
&= (m-n)L^b_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + (m-n)L^f_{m+n} + \frac{D}{24}m(m^2+2)\delta_{m+n,0} \\
&= (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m^3\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

となり、第二項が NS 境界条件と R 境界条件で変わります。

最後に G_r (F_m) 同士の反交換関係を求めます。計算しやすくするために G_r を

$$
G_r = \eta_{\mu\nu}\sum_m \alpha^\mu_{-m} b^\nu_{r+m} = \eta_{\mu\nu}\sum_s \alpha^\mu_{r-s} b^\nu_r \quad (s = r+m)
$$

と変形します。この s は NS 境界条件では半整数、R 境界条件では整数です。反交換関係を素直に計算して

$$
\begin{aligned}
\{G_r, G_s\} &= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\sum_{t_1,t_2}\{\alpha^\mu_{r-t_1}b^\nu_{t_1}, \alpha^\alpha_{s-t_2}b^\beta_{t_2}\} \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\sum_{t_1,t_2}(\alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}b^\nu_{t_1}b^\beta_{t_2} + \alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}b^\beta_{t_2}b^\nu_{t_1}) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\sum_{t_1,t_2}(\alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}(\eta^{\beta\nu}\delta_{t_1+t_2,0} - b^\beta_{t_2}b^\nu_{t_1}) + \alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}b^\beta_{t_2}b^\nu_{t_1}) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\sum_{t_1,t_2}(\eta^{\beta\nu}\alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}\delta_{t_1+t_2,0} - \alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}b^\beta_{t_2}b^\nu_{t_1} + \alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}b^\beta_{t_2}b^\nu_{t_1}) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\sum_{t_1,t_2}\left(\eta^{\beta\nu}\alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}\delta_{t_1+t_2,0} - [\alpha^\mu_{r-t_1}, \alpha^\alpha_{s-t_2}]b^\beta_{t_2}b^\nu_{t_1}\right) \\
&= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\sum_{t_1,t_2}\left(\eta^{\beta\nu}\alpha^\mu_{r-t_1}\alpha^\alpha_{s-t_2}\delta_{t_1+t_2,0} - \eta^{\mu\alpha}(r-t_1)\delta_{r+s-t_1-t_2,0}b^\beta_{t_2}b^\nu_{t_1}\right) \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_t(\alpha^\mu_{r-t}\alpha^\nu_{s+t} - (r-t)b^\mu_{r+s-t}b^\nu_t) = \eta_{\mu\nu}(B_1 - B_2)
\end{aligned}
$$

これだけなら簡単なんですが、これを正規積に書き換えます。

B_1 を、正規積の形 (3) になるように和の範囲を区切って書いて、交換関係 (5) を使うと

$$
\begin{aligned}
B_1 = & \sum_t \alpha^\mu_{r-t}\alpha^\nu_{s+t} \\
= & \sum_{t\le -s}\alpha^\mu_{r-t}\alpha^\nu_{s+t} + \sum_{t>-s}\alpha^\mu_{r-t}\alpha^\nu_{s+t} \\
= & \eta^{\mu\nu}\sum_{t\le -s}(r-t)\delta_{r+s,0} + \sum_{t\le -s}\alpha^\nu_{s+t}\alpha^\mu_{r-t} + \sum_{t>-s}\alpha^\mu_{r-t}\alpha^\nu_{s+t} \\
= & \eta^{\mu\nu}\sum_{t\le -s}(r-t)\delta_{r+s,0} + \sum_{l\le 0}\alpha^\nu_l\alpha^\mu_{r+s-l} + \sum_{l>0}\alpha^\mu_{r+s-t}\alpha^\nu_l \qquad (l = s+t = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \\
= & \eta^{\mu\nu}\sum_{t\le -s}(r-t)\delta_{r+s,0} + \sum_l :\alpha^\mu_{r+s-l}\alpha^\nu_l:
\end{aligned}
$$

第一項は

$$
\sum_{t\le -s}(r-t)\delta_{r+s,0} = \sum_{t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0} - \sum_{-s<t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0}
$$

と分解できるので、B_1 は

$$
B_1 = \sum_l :\alpha^\mu_{r+s-l}\alpha^\nu_l: + \eta^{\mu\nu}\sum_{t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0} - \eta^{\mu\nu}\sum_{-s<t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0}
$$

となります。

B_2 は

$$
\begin{aligned}
B_2 = & \sum_t (r-t) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t \\
= & \sum_{t\le 0}(r-t) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t + \sum_{t>0}(r-t) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t \\
= & \sum_{t\le 0}(r-t)(\eta^{\mu\nu}\delta_{r+s,0} - b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}) + \sum_{t>0}(r-t) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t \\
= & \eta^{\mu\nu}\sum_{t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0} - \sum_{t\le 0}(r-t) b^\nu_t b^\mu_{r+s-t} + \sum_{t>0}(r-t) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t
\end{aligned}
$$

第二項と第三項は

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{t\le 0}(r-t) b^\nu_t b^\mu_{r+s-t} + \sum_{t>0}(r-t) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t \\
& = -\sum_{t\le 0}(-t+\frac{r+s}{2}) b^\nu_t b^\mu_{r+s-t} + \sum_{t>0}(-t+\frac{r+s}{2}) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t \\
& \quad -\sum_{t\le 0}(r-\frac{r+s}{2}) b^\nu_t b^\mu_{r+s-t} + \sum_{t>0}(r-\frac{r+s}{2}) b^\mu_{r+s-t} b^\nu_t \\
& = -\sum_t(-t+\frac{r+s}{2}) :b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}: - (r-\frac{r+s}{2})\sum_t :b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:
\end{aligned}
$$

なので、B_2 は

$$B_2=\eta^{\mu\nu}\sum_{t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0}-\sum_t(-t+\frac{r+s}{2}):b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:-(r-\frac{r+s}{2})\sum_t:b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:$$

というわけで

$$\begin{aligned}\{G_r,G_s\}&=\eta_{\mu\nu}(B_1-B_2)\\&=\eta_{\mu\nu}\sum_l:\alpha^\mu_{r+s-l}\alpha^\nu_l:+\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\sum_{t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0}-\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\sum_{-s<t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0}\\&\quad-\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\sum_{t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0}+\eta_{\mu\nu}\sum_t(-t+\frac{r+s}{2}):b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:+(r-\frac{r+s}{2})\eta_{\mu\nu}\sum_t:b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:\\&=\eta_{\mu\nu}\sum_l:\alpha^\mu_{r+s-l}\alpha^\nu_l:+\eta_{\mu\nu}\sum_t(-t+\frac{r+s}{2}):b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:\\&\quad-D\sum_{-s<t\le 0}(r-t)\delta_{r+s,0}+(r-\frac{r+s}{2})\eta_{\mu\nu}\sum_t:b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:\end{aligned}$$

第一項は

$$\eta_{\mu\nu}\sum_l:\alpha^\mu_{r+s-l}\alpha^\nu_l:=\frac{1}{2}2\eta_{\mu\nu}\sum_l:\alpha^\mu_{r+s-l}\alpha^\nu_l:=L^b_{r+s}$$

第二項は

$$\eta_{\mu\nu}\sum_t(-t+\frac{r+s}{2}):b^\nu_t b^\mu_{r+s-t}:=2L^f_{r+s}$$

第四項は下の補足で示しているように

$$\eta_{\mu\nu}\sum_t:b^\mu_t b^\nu_{r+s-t}:=0 \tag{7}$$

なので消えます。残っている第三項は NS 境界条件とすれば r,s,t は半整数になるので

$$
\begin{aligned}
\sum_{-s+1\le t\le -1/2}(r-t)\delta_{r+s,0} &= \sum_{t=-s+1}^{-1/2}(r-t)\delta_{r+s,0} \\
&= \sum_{t=-s+1}^{-1/2}(-s-t) \\
&= -\sum_{t=-s+1}^{-1/2}s-\sum_{t=-s+1}^{-1/2}t \\
&= -\sum_{t=-s+1}^{-1/2}s-(-(s-1)-\cdots-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}) \\
&= -\sum_{t=-s+1}^{-1/2}s+\frac{1}{2}(1+3+\cdots+2s-2) \\
&= -s\frac{2s-1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{2s-1}{2})^2 \\
&= -\frac{1}{2}(s^2-\frac{1}{4})
\end{aligned}
$$

よって、NS 境界条件では

$$\{G_r,G_s\}=2L_{r+s}+\frac{D}{2}(r^2-\frac{1}{4})\delta_{r+s,0}$$

R 境界条件でも r,s が整数になっているとして同様にしていけば

$$\{F_m,F_n\}=2L_{m+n}+\frac{D}{2}m^2\delta_{m+n,0}$$

となります。このとき、d_0^μ,d_0^ν の反交換関係が

$$\{d_0^\mu,d_0^\nu\}=\eta^{\mu\nu}$$

になるという特殊な性質から (ボソン、NS 境界条件の両方ともこの性質を持たない)、$(r-t)b_t^\mu b_{r+s-t}^\nu$ の和において、$t=0,r+s=0$ のとき演算子でなくなり

$$r\eta_{\mu\nu}d_0^\mu d_0^\nu=\frac{1}{2}r\eta_{\mu\nu}\{d_0^\mu,d_0^\nu\}=\frac{D}{2}r$$

となります。これによる項が余計に出ることから

$$
\begin{aligned}
D\sum_{t=-s+1}^{0}(r-t)\delta_{r+s,0}+\frac{D}{2}s &= -D\sum_{t=1}^{s}t+\frac{D}{2}s \\
&= -D(\frac{s(s+1)}{2}-\frac{s}{2}) \\
&= -\frac{D}{2}s^2 \ \Rightarrow\ -\frac{D}{2}m^2
\end{aligned}
$$

と求められます。
　というわけで、super Virasoro 代数は
・R 境界条件

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m^3\delta_{m+n,0} \\
&[L_m, F_n] = (-n+\frac{m}{2})F_{m+n} \\
&\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{D}{2}m^2\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

・NS 境界条件

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m(m^2-1)\delta_{m+n,0} \\
&[L_m, G_r] = (-r+\frac{m}{2})G_{m+r} \\
&\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{D}{2}(r^2-\frac{1}{4})\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

となっています。

・補足
　(7) を示します。添え字の付け直しをすると

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\sum_r :b^\mu_r b^\nu_{n-r} :&= \eta_{\mu\nu}\sum_{r\le 0} b^\mu_r b^\nu_{n-r} - \eta_{\mu\nu}\sum_{r>0} b^\nu_{n-r} b^\mu_r \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_{r'\ge n} b^\mu_{n-r'} b^\nu_{r'} - \eta_{\mu\nu}\sum_{r'<n} b^\nu_{r'} b^\mu_{n-r'} \qquad (r'=n-r) \\
&= \eta_{\mu\nu}\sum_{r>0} b^\mu_{n-r} b^\nu_r - \eta_{\mu\nu}\sum_{0<r<n} b^\mu_{n-r} b^\nu_r - \eta_{\mu\nu}\sum_{r\le 0} b^\nu_r b^\mu_{n-r} - \eta_{\mu\nu}\sum_{0<r<n} b^\nu_r b^\mu_{n-r} \\
&= -\eta_{\mu\nu}(-\sum_{r>0} b^\nu_{n-r} b^\mu_r + \sum_{r\le 0} b^\mu_r b^\nu_{n-r}) - \eta_{\mu\nu}\sum_{0<r<n}\{b^\mu_{n-r}, b^\nu_r\} \\
&= -\eta_{\mu\nu}\sum_r :b^\mu_r b^\nu_{n-r}: -\eta^\mu{}_\mu \sum_{0<r<n}\delta_{n,0}
\end{aligned}
$$

これの第二項は $n=0$ のときにクロネッカーデルタが消えませんが、$n=0$ のとき和が消えます。なので

$$
\eta_{\mu\nu}\sum_r :b^\mu_r b^\nu_{n-r} := -\eta_{\mu\nu}\sum_r :b^\mu_r b^\nu_{n-r} := 0
$$

となります。