T 双対性

D ブレーンが出てくるきっかけとなった T 双対性を見ていきます。閉弦で T 双対変換を作り、それを開弦に適用します。
T 双対性はコンパクト化によって X^{25} に円の周期性を与えたとき、半径 R の円と半径 α'/R の円で物理が等価になることです。
D ブレーンが出てくる話に持っていくことを目的にしているので、質量演算子を状態に作用させる話は省いています。なので、コンパクト化によって弦の励起状態がどうなるかといった話はしていません。

ボソン弦の場合を考えていきます。ボソン弦ではローレンツ不変性の要求から 26 次元のミンコフスキー時空ですが、26 次元は 4 次元より 22 個余計な次元があります。これをどうにかするために、カルツァ・クライン理論でのコンパクト化 (compactification) を組み込めないかと考えます。コンパクト化は 5 次元以上の余計な次元 (余剰次元) を円にして、その円が十分小さいとする作業のことです。
というわけで、弦理論でのコンパクト化を見るために、ミンコフスキー時空の空間座標の内の 1 つを半径 R の円にします。円にする座標を x とすれば

$$x \simeq x + 2\pi R$$

という周期性を与えることに対応します。$\simeq$ で書いているのは、$2\pi R$ だけ離れている 2 つの地点を等しいとするという意味からです ($2\pi R$ だけ離れている点 A_1 と点 A_2 を等しくする。$x(A_1) = x(A_2) + 2\pi R$)。
まずは閉弦を見ていきます。次元 $D = 26$ の内の 1 つは時間なので、空間次元での 25 番目の次元を半径 R の円とします (X^{25} に周期性を与える)。コンパクト化したい次元が複数ある場合でも同じことを各次元で行えばいいだけです。
閉弦は σ による周期性

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma)$$

を持っているので、これと合わせます。つまり、X^{25} に対して

$$X^{25}(\tau, \sigma + 2\pi) = X^{25}(\tau, \sigma) + 2\pi R$$

として、円を 1 周するときに σ が $\sigma + 2\pi$ に行くようにしています (逆に言えば、σ から $\sigma + 2\pi$ に行くと円を 1 周する)。これは円筒の側面におけるある点 A から 1 周して同じ点 A' に巻きついている閉弦をイメージ出来ます。しかし、1 周で σ から $\sigma + 2\pi$ に行くとする必要性はないので

$$X^{25}(\tau, \sigma + 2\pi) = X^{25}(\tau, \sigma) + 2m\pi R$$

として、何回巻きついたかを表す m を加えます。m は整数で、円筒を回る方向で正負を選びます (例えば、右回りなら正、左回りなら負)。このように、円筒に何回も巻きつく閉弦のイメージが出来るので、m は巻き数 (winding number) と呼ばれます。m のままだとフーリエ展開したときに出てくる整数と紛らわしくなるので

$$w = \frac{mR}{\alpha'} \tag{1}$$

を使っていきます。

この状況で量子化を行い質量演算子を求めます。ここから X^{25} を X と書いていきます。共形ゲージを取って弦の運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}X^\mu(\tau,\sigma)=\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}X^\mu(\tau,\sigma)$$

となるようにして、

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}X(\tau,\sigma)=\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}X(\tau,\sigma)$$

に従う $X(\tau,\sigma)$ の解を求めます。波動方程式の解なので

$$X(\tau,\sigma)=X_L(\tau+\sigma)+X_R(\tau-\sigma)=X_L(u)+X_R(v)\quad (u=\tau+\sigma\ ,\ v=\tau-\sigma)$$

とします。これに円の周期性を加えると

$$\begin{aligned}
&X(\tau,\sigma+2\pi)=X(\tau,\sigma)+2\pi\alpha' w\\
&\qquad\Rightarrow\ X_L(\tau+\sigma+2\pi)+X_R(\tau-\sigma-2\pi)=X_L(u+2\pi)+X_R(v-2\pi)=X_L(u)+X_R(v)+2\pi\alpha' w
\end{aligned}$$

これに u,v 微分を作用させると $2\pi\alpha' w$ は消えるので、$dX/du, dX/dv$ は $2\pi\alpha' w$ がいてもいなくても同じです。なので、左進行の X_L, 右進行の X_R は「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」での X^μ_L, X^μ_R と同じ形

$$X_L(u)=\frac{1}{2}x_L+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 u+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\overline{\alpha}_n e^{-inu}$$

$$X_R(v)=\frac{1}{2}x_R+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 v+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-inv}$$

になります (x_L, x_R は定数)。ただし、変更される部分があります。円の周期性を見てみると

$$\begin{aligned}
X_L(u+2\pi)&=\frac{1}{2}x_L+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0(u+2\pi)+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\overline{\alpha}_n e^{-inu}e^{-2in\pi}\\
&=\frac{1}{2}x_L+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 u+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\overline{\alpha}_n e^{-inu}+2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}^\mu_0\\
&=X_L(u)+2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 u
\end{aligned}$$

X_R は

$$
\begin{aligned}
X_R(v-2\pi) &= \frac{1}{2}x_R + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(v-2\pi) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-inv}e^{2inv} \\
&= \frac{1}{2}x_R + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-inv}e^{2in\pi} - 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu \\
&= X_R(v) - 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0
\end{aligned}
$$

となっているので

$$
X_L(u+2\pi) + X_R(v-2\pi) = X_L(u) + X_R(v) + 2\pi\alpha' w
$$

から、α_0 と $\overline{\alpha}_0$ は

$$
\begin{aligned}
2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 - 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 &= 2\pi\alpha' w \\
\overline{\alpha}_0 - \alpha_0 &= \sqrt{2\alpha'}\mathrm{w}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となっています。このように、円の周期性を加えたときの展開係数は $\alpha_0 \neq \overline{\alpha}_0$ となります (通常では $\alpha_0^\mu = \overline{\alpha}_0^\mu$)。なので、$X(\tau,\sigma)$ は

$$
X(\tau,\sigma) = x_0 + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0(\tau+\sigma) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau-\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau}
$$

$$
(x_0 = \frac{1}{2}(x_L + x_R))
$$

と書けます。

量子化するときに必要になる

$$
\begin{aligned}
\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau} \\
X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma} &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} - \alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau}
\end{aligned}
$$

の和と差を求めます。単純に計算すればいいだけなので

$$
\begin{aligned}
\dot{X}+X' &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma}+\alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau} \\
&\quad +\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0-\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma}-\alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau} \\
&= 2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0+2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma}e^{-in\tau} \\
&= \sqrt{2\alpha'}\sum_n \overline{\alpha}_n e^{-in(\tau+\sigma)} \qquad (3a)
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\dot{X}-X' &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma}+\alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau} \\
&\quad -\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0-\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma}-\alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau} \\
&= 2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0+2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\alpha_n e^{in\sigma}e^{-in\tau} \\
&= \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n e^{-in(\tau-\sigma)} \qquad (3b)
\end{aligned}
$$

これは「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」で求めたものと同じ形です。このため、空間部分である $X(\tau,\sigma)$ の量子化は光円錐座標での $X^I(\tau,\sigma)$ から変更されません

運動量も求めておきます。閉弦での運動量は

$$
p^\mu=\int_0^{2\pi}d\sigma\ \Pi^\mu=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}d\sigma\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}
$$

で定義されています。なので、p^{25} を p と書くことにして

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}d\sigma\frac{\partial X}{\partial\tau} \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}d\sigma(\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\overline{\alpha}_n e^{-inu}+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\alpha_n e^{-inv}) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\Big(\int_0^{2\pi}d\sigma(\overline{\alpha}_0+\alpha_0)+\sum_{n\neq 0}e^{-in\tau}\int_0^{2\pi}d\sigma(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma}+\alpha_n e^{in\sigma})\Big) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha'}}(\overline{\alpha}_0+\alpha_0)+\frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}e^{-in\tau}\int_0^{2\pi}d\sigma(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma}+\alpha_n e^{in\sigma}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\overline{\alpha}_0+\alpha_0)
\end{aligned}
$$

下から 2 行目の第二項の積分は素直に実行すれば消えます。これと (2) から

$$\overline{\alpha}_0=\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p+w)\ ,\ \alpha_0=\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p-w) \tag{4}$$

となっていることが分かります。

展開係数 $\overline{\alpha}_n,\alpha_n$ の交換関係を求めます。量子化の手続きは変わらないので同じ τ による同時刻交換関係

$$[\mathrm{X}^\mu(\tau,\sigma),\Pi^\nu(\tau,\sigma')]=\mathrm{i}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma.\sigma')$$

に従うようにすればいいだけで (他の組み合わせは 0)、尚且つ (3a),(3b) が「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」でのものと同じなので、$\overline{\alpha}_n,\alpha_n$ を演算子化したときの交換関係は

$$[\overline{\alpha}_m,\overline{\alpha}_n]=m\delta_{m+n,0}\ ,\ [\alpha_m,\alpha_n]=m\delta_{m+n,0}\ ,\ [\overline{\alpha}_m,\alpha_n]=0$$

となり、変更されません (ただし、$\overline{\alpha}_0\neq\alpha_0$)。$\overline{\alpha}_0$ と α_0 の交換関係から p と w の交換関係は

$$\begin{aligned}
0&=[\overline{\alpha}_0,\alpha_0]\\
&=\overline{\alpha}_0\alpha_0-\alpha_0\overline{\alpha}_0\\
&=\frac{\alpha'}{2}(p+w)(p-w)-\frac{\alpha'}{2}(p-w)(p+w)\\
&=\frac{\alpha'}{2}(p^2-w^2-pw+wp-(p^2-w^2+pw-wp))\\
&=\alpha'(-pw+wp)\\
0&=[p,w]
\end{aligned}$$

と求まります。x_0 と p の交換関係も求めます。これは「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」と同じことをすればいいです。X と $\dot{X}$ の交換関係は

$$\dot{X}=2\pi\alpha'\Pi$$

から

$$[X(\tau,\sigma),\dot{X}(\tau,\sigma')]=2\pi\alpha'[X(\tau,\sigma),\Pi(\tau,\sigma')]=i2\pi\alpha'\delta(\sigma-\sigma')$$

これを σ 積分して

$$[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\sigma\ X(\tau,\sigma),\dot{X}(\tau,\sigma')]=i2\pi\alpha'$$

$X(\tau,\sigma)$ の σ 積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\sigma\ X(\tau,\sigma) =& \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\sigma\Big(x_0 + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0(\tau+\sigma) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau-\sigma) \\ &+ i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau}\Big) \\ &= 2\pi x_0 + 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0\tau + 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0\tau + \frac{1}{2}(2\pi)^2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 - \frac{1}{2}(2\pi)^2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0\end{aligned}$$

となりますが、

$$[\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_0] = 0\ ,\ [\alpha_0, \alpha_0] = 0\ ,\ [\overline{\alpha}_n, \alpha_0] = 0\ ,\ [\overline{\alpha}_0, \alpha_n] = 0$$

であるので、$\dot{X}$ との交換関係で生き残るのは x_0 の項だけです。よって、

$$\begin{aligned}i2\pi\alpha' =& \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\sigma[X(\tau,\sigma), \dot{X}(\tau,\sigma')] \\ &= [2\pi x_0, \dot{X}(\tau,\sigma')] \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[2\pi x_0, \overline{\alpha}_0] + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}[2\pi x_0, \overline{\alpha}_n]e^{-in\tau}e^{-in\sigma'} \\ &\quad + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[2\pi x_0, \alpha_0] + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}[2\pi x_0, \alpha_\mathrm{n}]e^{-in\tau}e^{in\sigma'} \\ i\alpha' =& \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}([x_0, \overline{\alpha}_0] + [x_0, \alpha_0] + \sum_{n\neq 0}[x_0, \overline{\alpha}_n]e^{-in\tau}e^{-in\sigma'} + \sum_{n\neq 0}[x_0, \alpha_n]e^{-in\tau}e^{in\sigma'}) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}([x_0, \overline{\alpha}_0] + [x_0, \alpha_0])\end{aligned}$$

最後の行へは σ' 積分を $0 \sim 2\pi$ の範囲で行って第三項と第四項を消しています。そして

$$\begin{aligned}[x_0, \overline{\alpha}_0] + [x_0, \alpha_0] &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(x_0\overline{\alpha}_0 - \overline{\alpha}_0 x_0 + x_0\alpha_0 - \alpha_0 x_0) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(x_0(\overline{\alpha}_0 + \alpha_0) - (\overline{\alpha}_0 + \alpha_0)x_0) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{2\alpha'}(x_0 p - p x_0) \\ &= \alpha'[x_0, p]\end{aligned}$$

であることから

$$[x_0, p] = i$$

これは量子力学での位置演算子と運動量演算子の交換関係と同じです。

この交換関係と円の周期性から運動量が離散的になっていることが分かります (運動量演算子の固有値としての運動量)。量子力学では位置演算子 q と運動量演算子 k の交換関係 $[q,k]=i$ を満たす運動量 k は並進の演算子を作り、e^{-ika} として出てきます。これを今の場合に合わせるなら、x_0 は円上にいることから e^{-ipa} が円上の並進の演算子を与えます。そして、X が円の周期性 $2n\pi R$ を持っていることから、$2n\pi R$ (n は整数) の並進で元に戻るべきなので

$$e^{-2in\pi Rp}=1$$

$$p=\frac{n}{R}$$

であることを要求します。よって、運動量は離散化された値を持ちます。n は巻き数 m とは区別される運動量を与える整数です。

準備ができたので質量演算子を求めます。光円錐ゲージを使いますが、質量演算子の変更は X 部分だけです。光円錐ゲージでは X^0,X^1 が $X^\pm$ になりますが、今の変更は 25 番目の空間座標なので、この部分には影響しません。よって、X^I を X^i,X $(i=2,3,\ldots,24)$ に分解すればいいだけです。

Virasoro 演算子 L_0 は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_m\alpha^I_{-m}\alpha^I_m&=\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+\frac{1}{2}\sum_{m>0}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+\frac{1}{2}\sum_{m<0}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m\\&=\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+\frac{1}{2}\sum_{m>0}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+\frac{1}{2}\sum_{m>0}\alpha^I_m\alpha^I_{-m}\\&=\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+\frac{1}{2}\sum_{m>0}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+\frac{1}{2}\sum_{m>0}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+\eta^{II}\frac{1}{2}\sum_{m>0}m\qquad([\alpha^I_m,\alpha^J_n]=[\overline{\alpha}^I_m,\overline{\alpha}^J_n]=m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0})\\&=\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+\sum_{m=1}^\infty\alpha^I_{-m}\alpha^I_m-a\\&=\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+N-a\end{aligned}$$

から、正規積によって

$$L_0-a=\frac{1}{2}\sum_m:\alpha^I_{-m}\alpha^I_m:-a=\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+N-a$$

a は 1 です。粒子数演算子 N はコンパクト化した次元も含めたものとして定義しています。$\overline{L}_0$ は

$$\overline{L}_0=\frac{1}{2}\sum_m:\overline{\alpha}^I_m\overline{\alpha}^I_{-m}:=\frac{1}{2}\overline{\alpha}^I_0\overline{\alpha}^I_0+\sum_{m=1}^\infty\overline{\alpha}^I_{-m}\overline{\alpha}^I_m=\frac{1}{2}\overline{\alpha}^I_0\overline{\alpha}^I_0+\overline{N}$$

$$(\frac{1}{2}\sum_m\overline{\alpha}^I_m\overline{\alpha}^I_{-m}=\frac{1}{2}\overline{\alpha}^I_0\overline{\alpha}^I_0+\overline{N}-a)$$

これらの I を分解して

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^i\alpha_0^i + \frac{1}{2}\alpha_0\alpha_0 + N = \frac{\alpha'}{4}p^ip^i + \frac{1}{2}\alpha_0\alpha_0 + N$$

$$\overline{L}_0 = \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0^i\overline{\alpha}_0^i + \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 + \overline{N} = \frac{\alpha'}{4}p^ip^i + \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 + \overline{N}$$

i 成分は「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」での空間成分の関係がそのまま成立しているので

$$p^i = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0^i\ ,\ \alpha_0^i = \overline{\alpha}_0^i$$

を使っています。

閉弦での拘束条件は

$$L_0 = \overline{L}_0$$

なので

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\alpha'}{4}p^ip^i + \frac{1}{2}\alpha_0\alpha_0 + N - \frac{\alpha'}{4}p^ip^i - \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 - \overline{N}\\ &= \frac{1}{2}\alpha_0\alpha_0 - \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 + N - \overline{N}\end{aligned}$$

pw は $\overline{\alpha}_0, \alpha_0$ は交換することから、

$$pw = \frac{1}{2\alpha'}(\overline{\alpha}_0 + \alpha_0)(\overline{\alpha}_0 - \alpha_0) = \frac{1}{2\alpha'}(\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_0\alpha_0 - \alpha_0\overline{\alpha}_0 - \alpha_0\alpha_0) = \frac{1}{2\alpha'}(\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 - \alpha_0\alpha_0)$$

となるので、拘束条件は

$$N - \overline{N} = \alpha' pw \tag{5}$$

と書くことが出来ます。粒子数演算子 $N, \overline{N}$ は名前の通り整数の固有値を持つので、左辺は整数になっています。そして、(1) と $p = n/R$ から、右辺は

$$\alpha' pw = \alpha' \frac{n}{R}\frac{mR}{\alpha'} = nm$$

となり、整数になっています (n は運動量、m は巻き数です)。

質量演算子をコンパクト化された次元を除いて定義します。コンパクト化は 26 次元でなく 25 次元での質量演算子が欲しいから行ったことだからです。そうすると、質量演算子 M^2 は

$$
\begin{aligned}
M^2 = & -\sum_{\mu=0}^{24} p_\mu p^\mu = 2p^+p^- - p^ip^i \\
&= \frac{2}{\alpha'}(L_0 + \overline{L}_0 - 2a) - p^ip^i \\
&= \frac{2}{\alpha'}(\frac{\alpha'}{2}p^ip^i + \frac{1}{2}\alpha_0\alpha_0 + N + \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 + \overline{N} - 2a) - p^ip^i \\
&= \frac{1}{\alpha'}(\alpha_0\alpha_0 + \overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0) + \frac{2}{\alpha'}(N + \overline{N} - 2a)
\end{aligned}
$$

$p^\pm$ は「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」で求めた

$$
L_0 - a + \overline{L}_0 - a = \alpha' p^+ p^-
$$

を使っています。第一項は

$$
\begin{aligned}
p^2 &= \frac{1}{2\alpha'}(\overline{\alpha}_0 + \alpha_0)^2 = \frac{1}{2\alpha'}(\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 + \alpha_0\alpha_0 + 2\overline{\alpha}_0\alpha_0)^2 \\
w^2 &= \frac{1}{2\alpha'}(\overline{\alpha}_0 - \alpha_0)^2 = \frac{1}{2\alpha'}(\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0 + \alpha_0\alpha_0 - 2\overline{\alpha}_0\alpha_0)^2
\end{aligned}
$$

から

$$
\frac{1}{\alpha'}(\alpha_0\alpha_0 + \overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_0) = p^2 + w^2
$$

と書けるので

$$
M^2 = p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'}(N + \overline{N} - 2a) = (\frac{n}{R})^2 + (\frac{mR}{\alpha'})^2 + \frac{2}{\alpha'}(N + \overline{N} - 2a)
$$

このように質量演算子に R, m, n の依存性が入ってきます。これを基底状態や励起状態に作用させることで、どんな状態が出てくるのかを見れますが、飛ばします。

拘束条件 (5) を使って書き換えると

$$
\begin{aligned}
M^2 &= (\frac{n}{R})^2 + (\frac{mR}{\alpha'})^2 + \frac{2}{\alpha'}(N + N - nm - 2a) \\
&= (\frac{n}{R})^2 + (\frac{mR}{\alpha'})^2 + \frac{2}{\alpha'}(2\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^I_{-l}\alpha^I_l - nm - 2a) \\
&= (\frac{n}{R})^2 + (\frac{mR}{\alpha'})^2 - \frac{2}{\alpha'}nm + \frac{4}{\alpha'}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^I_{-l}\alpha^I_l - \frac{4}{\alpha'}a
\end{aligned}
$$

もしくは

$$M^2 = (\frac{n}{R})^2 + (\frac{mR}{\alpha'})^2 + \frac{2}{\alpha'}nm + \frac{4}{\alpha'}\sum_{l=1}^{\infty}\overline{\alpha}_{-l}^I\overline{\alpha}_l^I - \frac{4}{\alpha'}a$$

この質量演算子には R と $1/R$ の項があります。このため、R を

$$R \ \Rightarrow \ \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$$

と変換しても

$$(\frac{n}{R})^2 + (\frac{mR}{\alpha'})^2 \ \Rightarrow \ (\frac{n\tilde{R}}{\alpha'})^2 + (\frac{m}{\tilde{R}})^2$$

となって、式の形は変わりません。しかし、これでは m, n が逆になっているので、巻き数 m と運動量の n を交換させます。他の m, n に依存している項は nm なので、$\tilde{R}$ だけでなく m, n を n, m に変えると

$$(\frac{n}{R})^2 + (\frac{mR}{\alpha'})^2 + \frac{2}{\alpha'}nm \ \Rightarrow \ (\frac{m\tilde{R}}{\alpha'})^2 + (\frac{n}{\tilde{R}})^2 + \frac{2}{\alpha'}mn$$

となって変換後も元の形のままになります (拘束条件 (5) からも m, n を交換できる)。この変換

$$R \ \Rightarrow \ \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R} \ , \ m, n \ \Rightarrow \ n, m \tag{6}$$

によって質量演算子が変化しないことを T 双対性 (T-duality) と言います。双対は 2 つの異なっている系が何かしらの同じ性質を持っているときに使います。今の場合はコンパクト化での円の半径 R と $\tilde{R} = \alpha'/R$ による双対です。T は Zwiebach の本だと toroidal となっていますが、おそらく target space の T です。これは hep-th/9401139 なんかを見てみると、広い意味では target space duality ですが、その中の 1 つとして R と $\tilde{R}$ の双対を扱っているということから toroidal だと言っているのだと思います。

T 双対変換 (6) が言っていることは、半径 R の円でコンパクト化した場合 (巻き数 m、運動量 n/R) と、半径 $\tilde{R} = \alpha'/R$ の円でコンパクト化した場合 (巻き数 n、運動量 $m/\tilde{R}$) の 2 つは物理的に等価であるということです。そして、R を小さい値に取ると、$\tilde{R}$ は大きくなるという性質を持っています。このため、R を $R < \sqrt{\alpha'}$ とする意味がなくなり、$R = \sqrt{\alpha'}$ が最も小さい値になります ($\tilde{R} = \alpha'/\sqrt{\alpha'} = \sqrt{\alpha'}$)。

開弦で必要になるので T 双対変換で X_L, X_R がどうなるのか求めます。まず、$\overline{\alpha}_0, \alpha_0$ は (4) から

$$\overline{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p + w) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\frac{n}{R} + \frac{mR}{\alpha'})$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(p - w) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\frac{n}{R} - \frac{mR}{\alpha'})$$

なので、T 双対変換で

$$\overline{\alpha}_0 \ \Rightarrow \ \overline{\alpha}_0 \ , \ \alpha_0 \ \Rightarrow \ -\alpha_0$$

となります。

半径 $\tilde{R}$ の円だとして、新しく

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= X_L - X_R \\ &= \tilde{x}_0 + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0(\tau+\sigma) - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau-\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} - \alpha_n e^{in\sigma})e^{-in\tau}\end{aligned}$$

を定義してみます。このときの運動量は

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} d\sigma(\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0 + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\overline{\alpha}_n e^{-inu} - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\alpha_n e^{-inv}) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\int_0^{2\pi} d\sigma(\overline{\alpha}_0 - \alpha_0) + \frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0} e^{-in\tau}\int_0^{2\pi} d\sigma(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} - \alpha_n e^{in\sigma}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\overline{\alpha}_0 - \alpha_0) + \frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0} e^{-in\tau}\int_0^{2\pi} d\sigma(\overline{\alpha}_n e^{-in\sigma} - \alpha_n e^{in\sigma}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\overline{\alpha}_0 - \alpha_0) \\ &= w \\ &= \frac{mR}{\alpha'}\end{aligned}$$

となるので、

$$\tilde{p} = \frac{mR}{\alpha'} = \frac{m}{\tilde{R}}$$

となり、半径 $\tilde{R}$ での運動量になります。よって、X_L, X_R の

$$X_L \ \Rightarrow\ X_L\ ,\ X_R\ \Rightarrow\ -X_R \tag{7}$$

という変換が T 双対変換に対応しています。

開弦の場合を見ていきます。開弦でも同じように X^{25} に対して半径 R の円でコンパクト化します。ただし、開弦には周期性がなく両端が境界条件で与えられるので、巻き数を定義する意味がありません。なので、$X^{25}(\tau,\sigma)$ に対する T 双対変換を行います。まず、変分の形から見直しておきます。作用は共形ゲージを取って

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\int d\sigma\sqrt{-g}g^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X^\nu\eta_{\mu\nu}$$

作用の変分は「相対論的な弦」で求めたように

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\big[P^\sigma_\mu\delta X^\mu\big]^{\sigma=\pi}_{\sigma=0} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\int_0^\pi d\sigma(\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial\tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial\sigma})\delta X^\mu$$

第二項はオイラー・ラグランジュ方程式になる部分です。P^τ_μ と P^σ_μ は

$$P^\tau_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}_\mu \ , \ P^\sigma_\mu = \frac{\partial L}{\partial X'^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}X'_\mu$$

となっています。第一項が境界条件に対応していて

$$P^\sigma_\mu(\tau,0) = P^\sigma_\mu(\tau,\pi) = 0$$

とすればノイマン境界条件 (自由端境界条件) となり、

$$\delta X_\mu(\tau,0) = \delta X_\mu(\tau,\pi) = 0$$

とすればディリクレ境界条件 (固定端境界条件) となります。ノイマン境界条件を使います。

ノイマン境界条件での運動方程式の解は、「弦のゲージ固定」で見たように

$$\begin{aligned}X^\mu(\tau,\sigma) &= f^\mu(\tau+\sigma) + f^\mu(\tau-\sigma)\\ &= x^\mu_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha^\mu_0\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{-in\tau}\cos n\sigma\end{aligned}$$

x^μ_0 は定数です。f^μ は左進行、右進行の波であることを明記するなら

$$f^\mu(\tau+\sigma) = f^\mu_L(\tau+\sigma) \ , \ f^\mu(\tau-\sigma) = f^\mu_R(\tau-\sigma)$$

となっています。

$\mu = 25$ を半径 R の円によってコンパクト化することにして

$$X(\tau,\sigma) = x_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}\cos n\sigma$$

閉弦のときと同じように $X^{25}(\tau,\sigma) = X(\tau,\sigma)$ と書いています。f_L と f_R の和だとするには

$$e^{in\sigma} + e^{-in\sigma} = 2\cos n\sigma$$

と、変数 $\tau \pm \sigma$ に合わせることで

$$\begin{aligned}X(\tau,\sigma) &= x_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\tau + i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}(e^{in\sigma} + e^{-in\sigma})\\ &= x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\alpha_0(\tau+\sigma) + \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\alpha_0(\tau-\sigma) + i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}(e^{-in\sigma} + e^{in\sigma})\end{aligned}$$

とかけるので、

$$f_L(\tau+\sigma)=\frac{1}{2}x_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau+\sigma)+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}e^{-in\sigma}$$

$$f_R(\tau-\sigma)=\frac{1}{2}x_0+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau-\sigma)+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}e^{in\sigma}$$

ただし、x_0 の項は定数 c_0 を付けた x_0+c_0 と x_0-c_0 の和でもいいので

$$f_L(\tau+\sigma)=\frac{1}{2}(x_0+c_0)+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau+\sigma)+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}e^{-in\sigma}$$

$$f_R(\tau-\sigma)=\frac{1}{2}(x_0-c_0)+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0(\tau-\sigma)+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}e^{in\sigma}$$

と書けます。

$X(\tau,\sigma)$ に対応する運動量は

$$\begin{aligned}
p&=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^\pi d\sigma\frac{\partial X}{\partial\tau}\\
&=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^\pi d\sigma(\sqrt{2\alpha'}\alpha_0+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n e^{-in\tau}\cos n\sigma)\\
&=\frac{1}{2\alpha'}\sqrt{2\alpha'}\alpha_0+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n e^{-in\tau}\int_0^\pi d\sigma\cos n\sigma\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\alpha_0
\end{aligned}$$

開弦でも円の周期性から p は

$$p=\frac{m}{R}$$

と離散化されています。コンパクト化で変更されるのはこの部分だけです。$X(\tau,\sigma)$ は p を使って書けば

$$X(\tau,\sigma)=x_0+2\alpha' p\tau+i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}(e^{in\sigma}+e^{-in\sigma})$$

これの T 双対変換を行います。

f_L, f_R に閉弦の場合で求めた T 双対変換 (7) を適用してみます。変換は右進行 f_R の符号を反転させることなので、X の変換後の $\tilde{X}$ は

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}(\tau,\sigma) &= f_L(\tau+\sigma) - f_R(\tau-\sigma) \\
&= c + \frac{1}{2}2\alpha' p(\tau+\sigma) - \frac{1}{2}2\alpha' p\alpha_0(\tau-\sigma) + i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}(e^{-in\sigma} - e^{in\sigma}) \\
&= c + 2\alpha' p\sigma + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n e^{-in\tau}\sin n\sigma
\end{aligned}
$$

となります。これから分かるのは、cos が sin になっていることと、コンパクト化した次元の運動量が

$$
\tilde{p} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^\pi d\sigma \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tau} = 0
$$

となり、消えていることです (τ の 1 次の項がないことに対応し、振動運動をする)。cos が sin になるのは下の補足で示しているように、境界条件をディリクレ境界条件にして波動方程式を解いた場合です。このときの境界条件は

$$
\tilde{X}(\tau,0) = c\ ,\ \tilde{X}(\tau,\pi) = c + 2\pi\alpha' p
$$

となっていて、差を見てみると

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}(\tau,\pi) - \tilde{X}(\tau,0) &= 2\pi\alpha' p \\
&= 2\pi\alpha'\frac{m}{R} \\
&= 2m\pi\tilde{R} \\
\tilde{X}(\tau,\pi) &= \tilde{X}(\tau,0) + 2m\pi\tilde{R}
\end{aligned}
$$

これと閉弦での周期性とを比べれば分かるように、半径 $\tilde{R}$ の円に対する巻き数 m が現れています。

このように、T 双対変換はノイマン境界条件の開弦に対して

ノイマン境界条件 $\Rightarrow$ ディリクレ境界条件

運動量あり、巻き数なし $\Rightarrow$ 運動量なし、巻き数あり

とします (ディリクレ境界条件の弦ではノイマン境界条件にする)。そして、弦の 25 番目の座標 $X(\tau,\sigma)$ に対するディリクレ境界条件はその座標の両端を固定しますが、その固定している点は 25 次元 (空間次元 24+時間次元 1) の平面上 (25 次元超平面) にあります。これは 3 次元で言えば、弦の両端を固定するとき、2 次元平面上に固定する点がいるのと同じです。

通常の弦の振動の話から、弦の両端を固定するときには固定する先の対象も考慮する必要があります (エネルギー保存のため)。このため開弦の話ではノイマン境界条件で行っていました。しかし、T 双対変換の相方としてディリクレ境界条件が出てきたので簡単に無視出来ず、弦を固定している 25 次元超平面を何かしらの物体として扱う必要性があります。この 25 次元超平面のことを D ブレーン (D-brane) と呼んでいます。D は今の話から分か

るように Dirichlet の D です (D-brain は Dirichlet brane)。D ブレーンにはそれが何次元かで区別する表記が使われていて、一般的には Dp ブレーン (Dp-brane) と書かれ、p には時間を抜いた次元が入ります。今の場合は D24 ブレーンです。

また、当然ですが 25 番目の次元以外にはノイマン境界条件が使われているので、p = 24 はノイマン境界条件が使われている次元の数になっています。そして、複数の次元で T 双対変換を行ったとすれば、p はノイマン境界条件が使われている次元の数、D − p − 1 はディリクレ境界条件が使われている次元の数となります。このように、T 双対変換は D ブレーンの次元を変化させます。

・補足

ディリクレ境界条件での波動方程式の解を求めます。ディリクレ境界条件

$$\delta X_\mu(\tau,0)=\delta X_\mu(\tau,\pi)=0$$

は τ 微分で書けば

$$\frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial\tau}|_{\sigma=0}=\frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial\tau}|_{\sigma=\pi}=0$$

なので、定数 x_0^μ によって

$$X^\mu(\tau,\sigma)|_{\sigma=0}=X^\mu(\tau,\sigma)|_{\sigma=\pi}=x_0^\mu$$

とします。この条件で波動方程式を解きます。解の形は重ねあわせから

$$X^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{2}(f^\mu(\tau+\sigma)+g^\mu(\tau-\sigma))$$

として、これに条件を入れれば

$$X^\mu(\tau,0)=\frac{1}{2}(f^\mu(\tau)+g^\mu(\tau))=x_0^\mu\ \Rightarrow\ g^\mu(\tau)=2x_0^\mu-f^\mu(\tau)$$

となるので

$$X^\mu(\tau,\sigma)=2x_0^\mu+\frac{1}{2}(f^\mu(\tau+\sigma)-f^\mu(\tau-\sigma))$$

$\sigma=\pi$ では

$$X^\mu(\tau,\pi)=x_0^\mu+\frac{1}{2}(f^\mu(\tau+\pi)-f^\mu(\tau-\pi))=x_0$$

から

$$f^\mu(\tau+\pi)=f^\mu(\tau-\pi)$$

となり、f^μ は 2π の周期性を持ちます。周期 2π を持つので $f^\mu(\tau\pm\sigma)$ のフーリエ展開は

$$f^\mu(u) = a_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu) \quad (v = \tau + \sigma)$$

$$f^\mu(v) = a_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\mu \cos nv + b_n^\mu \sin nv) \quad (v = \tau - \sigma)$$

加法定理

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

から、これで周期性を満たしていることが確かめられます。これらを入れることで

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \frac{1}{2}\big(a_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu) - a_0^\mu - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\mu \cos nv + b_n^\mu \sin nv)\big)$$

$$= x_0^\mu + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu - a_n^\mu \cos nv - b_n^\mu \sin nv)$$

加法定理を使えば

$$\begin{aligned}
&a_n^\mu \cos u + b_n^\mu \sin u - a_n^\mu \cos v - b_n^\mu \sin v \\
&\quad = a_n^\mu(\cos\tau\cos\sigma - \sin\tau\sin\sigma) + b_n^\mu(\sin\tau\cos\sigma + \cos\tau\sin\sigma) \\
&\qquad - a_n^\mu(\cos\tau\cos\sigma + \sin\tau\sin\sigma) - b_n^\mu(\sin\tau\cos\sigma - \cos\tau\sin\sigma) \\
&\quad = -2a_n^\mu \sin\tau\sin\sigma + 2b_n^\mu \cos\tau\sin\sigma
\end{aligned}$$

なので

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n^\mu \sin n\tau + b_n^\mu \cos n\tau)\sin n\sigma$$

三角関数は

$$c_n^\mu = b_n^\mu - ia_n^\mu$$

$$c_n^\mu e^{-in\tau} = b_n^\mu \cos(n\tau) - a_n^\mu \sin(n\tau) - i(a_n^\mu \cos(n\tau) + b_n^\mu \sin(n\tau))$$

$$(c_n^\mu e^{-in\tau})^* = b_n^\mu \cos(n\tau) - a_n^\mu \sin(n\tau) + i(a_n^\mu \cos(n\tau) + b_n^\mu \sin(n\tau))$$

から

$$-a_n^\mu \cos(n\tau) + b_n^\mu \sin(n\tau) = \frac{1}{2}((c_n^\mu e^{-in\tau})^* + c_n^\mu e^{-in\tau})$$

として

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((c_n^\mu e^{-in\tau})^* + c_n^\mu e^{-in\tau})\sin n\sigma$$

これに

$$\frac{1}{2}(c_n^\mu e^{-in\tau} + c_n^{\mu *} e^{in\tau}) = \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}}(a_n^\mu e^{-in\tau} + a_n^{\mu *} e^{in\tau})$$

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}\ ,\ \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu *}\sqrt{n} \quad\ (n \geq 1)$$

を使うことで

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^\mu e^{in\tau})\sin n\sigma$$

これは

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^\mu e^{in\tau})\sin n\sigma &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\sin n\sigma + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\sin n\sigma \\ &= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\sin n\sigma\end{aligned}$$

なので

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\sin n\sigma$$

となります。

というわけで、ディリクレ境界条件では sin が出てきます。なので、両端の条件として

$$X^\mu(\tau,0) = c\ ,\ X^\mu(\tau,\pi) = c + 2\alpha' p\pi$$

とすれば

$$X^\mu(\tau,\sigma) = c + 2\alpha' p\sigma + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\sin n\sigma$$

となって、上での結果と一致します。