ボソン弦の状態

「Virasoro 代数」で開弦の基底状態の話を少ししましたが、基底状態に生成演算子を作用させた励起状態が何を記述しているのかを見ます。
線形化されたアインシュタイン方程式が出てきますが、細かいことには触れずに話を進めています。
次元は $D=26$ とし、$a=1$ とします。

　まず開弦の場合を見ていきます。光円錐ゲージでの量子化の交換関係

$$[x_0^-, p^+] = i\eta^{+-} = -i$$

$$[X^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')$$

から、基底状態 (ハミルトニアンの固有値が一番小さな値を持つ状態) の運動量は p^+ と p^I で書けるとして

$$|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

添え字表記だとアインシュタインの規約との兼ね合いで見づらいので p^I を $\boldsymbol{p}_T$ としています ($I=2,3,\dots,D-1$)。演算子としての p^+ をこれに作用させれば固有値 p^+、p^I を作用させれば固有値 p^I が出てきます。これの内積は正規直交性から

$$\langle p'^+, \boldsymbol{p}'_T|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \delta(p'^+ - p^+)\delta^{D-2}(\boldsymbol{p}'_T - \boldsymbol{p}_T)$$

となります。開弦での消滅演算子は a_n^I なので、基底状態は

$$a_n^I|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = 0$$

この基底状態に生成演算子を作用させたものを基底ベクトルとし、それによってヒルベクト空間を作ります。調和振動子と違い、生成演算子 $a_n^{I\dagger}$ の n は無限個あるので (尚且つ $I=2\sim D-1$)、基底状態にこれらを任意の回数作用させたものがヒルベルト空間の基底ベクトルとなります。なので、$a_n^{I\dagger}$ を何回作用させるかは $\lambda_{n,I}$(正の整数) として、基底ベクトル $|\lambda\rangle$ の一般的な形は

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{25}(a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

となります。
　基底状態へ生成演算子を作用させた励起状態について見ていきます。使う演算子を先に示しておくと、粒子数演算子 N は

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger}a_n^I \ ,\ [N, a_n^{I\dagger}] = n a_n^{I\dagger} \ ,\ [N, a_n^I] = -n a_n^I$$

質量演算子 M^2 は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger}a_n^I - 1) = \frac{1}{\alpha'}(N-1)$$

粒子数演算子を基底状態に作用させれば当然

$$N|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = 0$$

質量演算子を作用させると

$$M^2|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(N-1)|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'}$$

となって、基底状態は質量の 2 乗がマイナスになるタキオンの状態になっています。

生成演算子を 1 つ作用させてから粒子数演算子を作用させると

$$Na_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = [N, a_n^{I\dagger}]|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle + a_n^{I\dagger}N|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = na_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

このように n が $a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$ の固有値として出てきます。$n=1$ の場合 $a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$ に質量演算子 M^2 を作用させると

$$M^2 a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(N-1)a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(1-1)a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = 0$$

となって、N の固有値が 1 となる最初の励起状態 $a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$ は質量が 0 の状態であることが分かります。これの独立な状態は I が $D-2$ 個なので、$D-2$ 個あります。

2 回生成演算子を作用させた場合では

$$\begin{aligned}
Na_m^{J\dagger}a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle &= [N, a_m^{J\dagger}]a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle + a_m^{J\dagger}Na_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle \\
&= ma_m^{J\dagger}a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle + a_m^{J\dagger}Na_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle \\
&= ma_m^{J\dagger}a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle + na_m^{J\dagger}a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle \\
&= (m+n)a_m^{J\dagger}a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle
\end{aligned}$$

これから、N の固有値が 2 になる状態は

$$a_1^{J\dagger}a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle \ , \ a_2^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

の 2 つがあることが分かります。そうすると、これらによって作られる状態の個数は、$I, J = 2, 3, \ldots, D-1$ なので、生成演算子が 2 つかかっている方は $a_1^{J\dagger}, a_1^{I\dagger}$ の入れ替えで対称なため時空の添え字に関して $(D-2)\times(D-2)$ の対称行列とみなせることから独立な状態は $(D-2)+(D-3)+\cdots+1 = (D-1)(D-2)/2$ 個、生成演算子が 1 つの方は $D-2$ 個です。よって全体としての状態の数は

$$\frac{1}{2}(D-1)(D-2) + D - 2 = \frac{1}{2}(D+1)(D-2)$$

$D = 26$ では 324 個の状態があります。このときの質量演算子 M^2 の固有値は

$$M^2 a_2^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(N-1)a_2^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(2-1)a_2^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}a_2^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

となって、正の質量を持った状態となります。

基底状態 $|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$ は完全正規直交基底なので、重ね合わせて時間依存した状態を作れます (完全性)。時間はパラメータ τ を当てるので τ を含む関数 $\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau)$ をくっつけて

$$|\psi;\tau\rangle = \int dp^+ d^{D-2}p_T\ \psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau)|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

励起状態を使った場合では生成演算子 $a_n^{I\dagger}$ を複数作用させるために時空の成分が出てくるので、それを潰すように時空の成分を持つ関数 ψ_I をくっつけます。例えば、

$$|\psi;\tau\rangle = \int dp^+ d^{D-2}p_T\ \psi_I(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau)a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

時間依存する状態 $|\psi;\tau\rangle$ はシュレーディンガー方程式を満たすので

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi;\tau\rangle = H|\psi;\tau\rangle$$

基底状態だとすれば

$$\begin{aligned}
(i\frac{\partial}{\partial\tau} - H)|\psi;\tau\rangle &= 0 \\
i\frac{\partial}{\partial\tau}\int dp^+ d^{D-2}p_T\ (i\frac{\partial}{\partial\tau} - H)\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau)|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle &= 0 \\
(i\frac{\partial}{\partial\tau} - H)\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) &= 0 \\
i\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) &= H\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) \qquad (1)
\end{aligned}$$

というよく見るシュレーディンガー方程式になります。生成演算子が複数作用している場合は ψ に時空の添え字が生成子の数だけつきます。ハミルトニアンは $a=1$ を含んだ形で (L_0 に a を含んでいないとして)

$$H =\ L_0 - a =\ \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I - a =\ \alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger}a_n^I - a =\ \alpha' p^I p^I + N - 1$$

$$(\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'}p^I\ ,\ \alpha_n^I = a_n^I\sqrt{n}\ ,\ \alpha_{-n}^I = (a_n^I)^\dagger\sqrt{n})$$

これを (1) に入れれば

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) &= (\alpha' p^I p^I + N - 1)\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) \\
(i\frac{\partial}{\partial\tau} - (\alpha' p^I p^I + N - 1))\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) &= 0
\end{aligned}$$

基底状態から出てきた式なので $N=0$ となって

$$(i\frac{\partial}{\partial\tau} - (\alpha' p^I p^I - 1))\psi(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) = 0 \qquad (2)$$

$N=1$ の励起状態 $a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$ では、$\psi_I a_1^{I\dagger}$ なので

$$(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \alpha' p^I p^I)\psi_I(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) = 0 \tag{3}$$

となります。こちらは時空の添え字があるのでベクトル粒子 (ベクトルボソン) を記述しているはずです (ベクトル $a_1^{I\dagger}$ による状態)。

　このようにして弦の状態に対する方程式が出てくるので、それが何を記述しているのか考えます。ここで光円錐座標でのクライン・ゴルドン方程式を見てみます。クライン・ゴルドン方程式は

$$(\partial^2 - m^2)\phi(x) = (\partial^\mu\partial_\mu - m^2)\phi(x) = 0$$

光円錐座標の $\partial^\mu\partial_\mu$ は

$$\partial^\mu\partial_\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -2\partial_+\partial_- + \partial_I\partial_I = -2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^I}$$

なので

$$\Big(-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^I} - m^2\Big)\phi(x^+, x^-, \boldsymbol{x}_T) = 0$$

x^I を $\boldsymbol{x}_T$ と表記しています。x^+ はそのままにして、x^- と $\boldsymbol{x}_T$ をフーリエ変換すれば

$$\phi(x^+, x^-, \boldsymbol{x}_T) = \int\frac{dp^+}{2\pi}\int\frac{d^{D-2}p_T}{(2\pi)^{D-2}}e^{-ip^+x^-}e^{+ip_Ix^I}\phi(x^+, p^+, \boldsymbol{p}_T)$$

$$(p\cdot x = \eta^{\mu\nu}p_\mu x_\nu = -p_+x_- - p_-x_+ + p_Ix^I = -p^+x^- - p^-x^+ + p_Ix^I)$$

これをクライン・ゴルドン方程式に入れて

$$\begin{aligned}&\Big(-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^I} - m^2\Big)\int\frac{dp^+}{2\pi}\int\frac{d^{D-2}p_T}{(2\pi)^{D-2}}e^{-ip^+x^-}e^{+ip_Ix^I}\phi(x^+, p^+, \boldsymbol{p}_T)\\&= (2ip^+\frac{\partial}{\partial x^+} - p^Ip^I - m^2)\phi(x^+, p^+, \boldsymbol{p}_T)\end{aligned}$$

よって光円錐座標でのクライン・ゴルドン方程式は

$$\Big(i\frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+}(p^Ip^I + m^2)\Big)\phi(x^+, p^+, \boldsymbol{p}_T) = 0$$

と書けます。x^+ は弦においては X^+ なので、パラメータの条件

$$X^+ = 2\alpha' p^+\tau$$

を使って τ に書き換えてみると

$$\Big(i\frac{\partial\tau}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{2p^+}(p^Ip^I+m^2)\Big)\phi(p^+,\boldsymbol{p}_T,\tau)=0$$
$$\Big(i\frac{1}{2\alpha' p^+}\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{2p^+}(p^Ip^I+m^2)\Big)\phi(p^+,\boldsymbol{p}_T,\tau)=0$$
$$\Big(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\alpha'(p^Ip^I+m^2)\Big)\phi(p^+,\boldsymbol{p}_T,\tau)=0$$

この形と (2) を比較すると

$$m^2=-\frac{1}{\alpha'}$$

で一致していることが分かります。つまり、開弦の基底状態は $m^2=-1/\alpha'$ のスカラー場でのタキオンを記述すると考えられます。

今度はマクスウェル方程式を見てみます。マクスウェル方程式は 4 元ベクトルポテンシャル A_μ によって

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha-\partial^\mu\partial^\nu)A_\mu=0 \tag{4}$$

通常のフーリエ変換によって運動量表示にすれば

$$(\eta^{\mu\nu}p^2-p^\mu p^\nu)A_\mu=0$$

ゲージ条件として $A^+=0$ というのを使います。そうすると、$\nu=+$ での

$$(\eta^{\mu+}p^2-p^\mu p^+)A_\mu=-p^2A_--p^\mu p^+A_\mu=p^2A^+-p^+p^\mu A_\mu=0$$

これに $A^+=0$ をいれれば

$$p^\mu A_\mu=p^-A_-+p^+A_++p^IA_I=\eta_{+-}p^-A^++\eta_{+-}p^+A^-+p^IA^I=-p^+A^-+p^IA^I=0$$

ここまで簡単になり、これから A^- と A^I の関係

$$A^-=\frac{1}{p^+}p^IA^I$$

が出てきます。

残りの成分も出します。$\nu=-$ では $p^\mu A_\mu=0$ から

$$\eta^{+-}p^2A_+-p^-p^\mu A_\mu=p^2A^-=0$$

$\nu=I$ では

$$\eta^{IJ}p^2A_J-p^\mu p^Ip^\mu A_\mu=\eta^{IJ}p^2A_J=p^2A^I=0$$

というわけで、光円錐ゲージでの運動量表示したマクスウェル方程式は

$$p^\mu A_\mu = -p^+ A^- + p^I A^I = 0 \tag{5a}$$

$$p^2 A^- = 0 \tag{5b}$$

$$p^2 A^I = 0 \tag{5c}$$

$\nu = I$ の (5c) を位置表示に戻します。$p^2 A^I = 0$ なので $\partial^2 A^I = 0$ であることはすぐに分かりますが、一応マクスウェル方程式 (4) に戻って、$\nu = I$ として光円錐座標で表していきます。光円錐座標でのマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned}
&\eta^{\mu I}\partial_\alpha\partial^\alpha A_\mu - \partial^\mu\partial^I A_\mu = \partial_\alpha\partial^\alpha A^I - \partial^I\partial_\mu A^\mu \\
&= (-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^J}\frac{\partial}{\partial x^J})A^I - \partial^I(\frac{\partial A^+}{\partial x^+} + \frac{\partial A^-}{\partial x^-} + \frac{\partial A^J}{\partial x^J}) \\
&= (-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^J}\frac{\partial}{\partial x^J})A^I - \partial^I(\frac{\partial A^+}{\partial x^+} + \frac{\partial A^-}{\partial x^-} + \frac{\partial A^J}{\partial x^J})
\end{aligned}$$

第一項は $m^2 = 0$ のクライン・ゴルドン方程式の形なので、$A^I(x^+, p^+, \boldsymbol{p}_T)$ に持っていくと

$$(-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^J}\frac{\partial}{\partial x^J})A^I \ \Rightarrow \ (i\frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^I p^I)A^I(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau)$$

第二項は上でのマクスウェル方程式をゲージ条件 $A^+(p) = 0$ を使って変形した結果から分かるように、消えます。実際に $(A(p) = A(p^-, p^+, \boldsymbol{p}_T))$

$$\int \frac{dp^+}{2\pi}\int \frac{d^{D-2}p_T}{(2\pi)^{D-2}}\exp[-ip^-x^+ - ip^+x^- + ip_I x^I]A_\mu(p)$$

から、x^+ の微分では $-ip^-$、x^- の微分では $-ip^+$、x^J の微分では ip^J が exp 部分から落ちてくるので

$$\partial^I(\frac{\partial A^+}{\partial x^+} + \frac{\partial A^-}{\partial x^-} + \frac{\partial A^J}{\partial x^J}) \ \Rightarrow \ -p^I(-p^-A^+(p) - p^+A^-(p) + p^J A^J(p))$$

ゲージ条件 $A^+ = 0$ とを使うと

$$-p^I(p^+A^-(p) - p^+A^-(p)) = 0$$

なので第二項は消えます。よってマクスウェル方程式は

$$(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^J p^J)A^I(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) = 0 \tag{6}$$

この形は (3) と同じです。このため $N = 1$ の励起状態は電磁場に対応し、ベクトルボソンである光子の状態だと見なせます。

同様に閉弦の場合を見ていきます。閉弦の場合、生成、消滅演算子が 2 組あるのが開弦と異なっている点です。このため基底ベクトルは

$$|\lambda, \overline{\lambda}\rangle = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{25}(a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}}\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{J=2}^{25}(\overline{a}_m^{J\dagger})^{\overline{\lambda}_{n,J}}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

となります ($\lambda_{n,I},\overline{\lambda}_{m,J}$ は正の整数)。粒子数演算子もそれぞれの生成、消滅演算子から

$$N=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^I\alpha_n^I=\sum_{n=1}^{\infty}na_n^{I\dagger}a_n^I\ ,\ \overline{N}=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha}_{-n}^I\overline{\alpha}_n^I=\sum_{n=1}^{\infty}n\overline{a}_n^{I\dagger}\overline{a}_n^I$$

質量演算子は

$$M^2=\frac{2}{\alpha'}(N+\overline{N}-2)$$

粒子数演算子と質量演算子を基底状態に作用させれば

$$N|p^+,\boldsymbol{p}\rangle=\overline{N}|p^+,\boldsymbol{p}\rangle=0$$
$$M^2|p^+,\boldsymbol{p}\rangle=\frac{2}{\alpha'}(N+\overline{N}-2)|p^+,\boldsymbol{p}\rangle=-\frac{4}{\alpha'}|p^+,\boldsymbol{p}\rangle$$

となって、閉弦の基底状態もタキオンです。

$N=1,\overline{N}=1$ の励起状態を考えます。この状態は

$$a_1^{I\dagger}\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle$$

で与えることができます。N と $a_n^{I\dagger}$ の交換関係は開弦と同じなので、N を作用させると

$$Na_1^{I\dagger}\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle=[N,a_1^{I\dagger}]\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle+a_1^{I\dagger}N\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle=a_1^{I\dagger}\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle$$

$\overline{N}$ でも同様で、$a_1^{I\dagger}$ と $\overline{a}_1^{J\dagger}$ は交換することから

$$\begin{aligned}\overline{N}a_1^{I\dagger}\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle&=a_1^{I\dagger}\overline{N}\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle\\&=a_1^{I\dagger}[\overline{N},\overline{a}_1^{J\dagger}]|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle+a_1^{I\dagger}\overline{a}_1^{J\dagger}\overline{N}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle\\&=a_1^{I\dagger}\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle\end{aligned}$$

よって $N=\overline{N}=1$ の状態になっています。開弦と違って生成演算子が区別されるので、時空の添え字に関して対称行列になっていません。なので、独立な状態の数は $(D-2)^2$ 個です。

時間依存する状態として

$$|\psi;\tau\rangle=\int dp^+d^{D-2}p_T\ \psi_{IJ}(p^+,\boldsymbol{p}_T,\tau)a_1^{I\dagger}\overline{a}_1^{J\dagger}|p^+,\boldsymbol{p}_T\rangle$$

を考えます。閉弦でのシュレーディンガー方程式

$$i\frac{\partial\psi_{IJ}}{\partial\tau}=H\psi_{IJ}$$

の形を取ります。ハミルトニアンは a を含めることで

$$\begin{aligned}H = L_0 - a + \overline{L}_0 - a &= \frac{1}{2}\sum_m \alpha^I_{-m}\alpha^I_m + \frac{1}{2}\sum_m \overline{\alpha}^I_{-m}\overline{\alpha}^I_m - 2a\\&= \frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m + \frac{1}{2}\overline{\alpha}^I_0\overline{\alpha}^I_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\alpha}^I_{-m}\overline{\alpha}^I_m - 2a\\&= \frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0 + \frac{1}{2}\overline{\alpha}^I_0\overline{\alpha}^I_0 + N + \overline{N} - 2\\&= \frac{\alpha'}{2}\alpha' p^I p^I + N + \overline{N} - 2 \quad (\alpha^I_0 = \overline{\alpha}^I_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^I)\end{aligned}$$

なので $N = \overline{N} = 1$ の励起状態では

$$(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\alpha'}{2}p^K p^K)\psi_{IJ}(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) = 0$$

となります。これは (3) と同じ形です。
　ψ_{IJ} は行列としては $(D-2)\times(D-2)$ の任意の行列です。これを

$$\psi_{IJ} = \frac{1}{2}(\psi_{IJ} + \psi_{IJ}) + \frac{1}{2}(\psi_{IJ} - \psi_{IJ}) = S_{IJ} + A_{IJ}$$

として、対称な部分 S_{IJ} と非対称な部分 A_{IJ} に分けます。さらに対称行列部分を

$$S_{IJ} = (S_{IJ} - \frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S^{KK}) + \frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S^{KK} = T_{IJ} + \delta_{IJ}S'$$

と分けます。このとき T_{IJ} は

$$\delta^{IJ}(S_{IJ} - \frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S^{KK}) = S^{II} - \frac{1}{D-2}(D-2)S^{KK} = 0 \quad (\delta^{IJ}\delta_{IJ} = D-2)$$

となるので、S_{IJ} のトレース $\delta^{IJ}S_{IJ} = S^{II}$ を取ると 0 になる部分です。というわけで ψ_{IJ} はトレースが 0 の対称部分 T_{IJ}、トレースが 0 でない対称部分 $\delta_{IJ}S'$、反対称部分 A_{IJ} によって

$$\psi_{IJ} = T_{IJ} + \delta_{IJ}S' + A_{IJ}$$

となります。
　ここでアインシュタイン方程式を持ち出します。アインシュタイン方程式そのものは複雑すぎて扱えないので、計量を $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \epsilon\gamma^{\mu\nu}$ (ϵ は微小) として線形化したアインシュタイン方程式

$$\partial^\mu\partial^\nu\gamma^\alpha_{\ \alpha} + \partial^2\gamma^{\mu\nu} - \partial^\nu\partial_\alpha\gamma^{\mu\alpha} - \partial^\mu\partial_\alpha\gamma^{\nu\alpha} = 0$$

を考えます (一般相対性理論の「アインシュタイン方程式の線形化〜重力波〜」参照)。添え字の上げ下げはミンコフスキー計量で出来るとしています。これはゲージ場と同じようにゲージ自由度を持っています。
　素直に運動量表示にすれば

$$p^\mu p^\nu\gamma^\alpha_{\ \alpha} + p^2\gamma^{\mu\nu} - p^\nu p_\alpha\gamma^{\mu\alpha} - p^\mu p_\alpha\gamma^{\nu\alpha} = 0 \tag{7}$$

これに対して $h^{++} = h^{+-} = h^{+I} = 0$ というゲージ条件を使います。そうすると $\mu = \nu = +$ では

$$
\begin{aligned}
&p^+p^+\gamma^\alpha_{\ \alpha}+p^2\gamma^{++}-p^+p_\alpha\gamma^{+\alpha}-p^+p_\alpha\gamma^{+\alpha}\\
&=p^+p^+\gamma^\alpha_{\ \alpha}+p^2\gamma^{++}-p^+p_\alpha\gamma^{+\alpha}-p^+p_+\gamma^{++}-p^+p_-\gamma^{+-}-p^+p_I\gamma^{+I}\\
&=p^+p^+\gamma^\alpha_{\ \alpha}\\
&=p^+p^+\eta_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\\
&=p^+p^+(\eta_{+-}\gamma^{+-}+\eta_{+I}\gamma^{+I}+\eta_{-+}\gamma^{-+}+\eta_{-I}\gamma^{-I}+\eta_{I+}\gamma^{I+}+\eta_{I-}\gamma^{I-}+\eta_{II}\gamma^{II})\\
&=p^+p^+\gamma^{II}\qquad(\eta_{II}\gamma^{II}=\gamma^{11}+\cdots=\gamma^{II})
\end{aligned}
$$

なので

$$
p^+p^+\gamma^{II}=0
$$

これから γ^{IJ} のトレース $\gamma^{II}=\delta_{IJ}\gamma^{IJ}$ は 0 になっていることが分かり、$\gamma^\mu_{\ \mu}=0$ であることも分かります。これを使うと (7) は

$$
p^2\gamma^{\mu\nu}-p^\nu p_\alpha\gamma^{\mu\alpha}-p^\mu p_\alpha\gamma^{\nu\alpha}=0 \tag{8}
$$

これの $\mu=+$ は

$$
\begin{aligned}
p^2\gamma^{+\nu}-p^\nu p_\alpha\gamma^{+\alpha}-p^+p_\alpha\gamma^{\nu\alpha}&=p^2\gamma^{+\nu}-p^\nu(p_+\gamma^{++}+p_-\gamma^{+-}+p_I\gamma^{+I})-p^+p_\alpha\gamma^{\nu\alpha}\\
&=p^2\gamma^{+\nu}-p^+p_\alpha\gamma^{\nu\alpha}
\end{aligned}
$$

第一項は $\nu=+,-,I$ のどれでもゲージ条件で消えるので

$$
\begin{aligned}
p^+p_\alpha\gamma^{\nu\alpha}&=0\\
p_\alpha\gamma^{\nu\alpha}&=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となります。これは $\nu=I$ のとき

$$
p_+\gamma^{I+}+p_-\gamma^{I-}+p_J\gamma^{IJ}=-p^+\gamma^{I-}+p_J\gamma^{IJ}=0
$$

なので γ^{I-} と γ^{IJ} の関係

$$
\gamma^{I-}=\frac{1}{p^+}p_J\gamma^{IJ} \tag{10}
$$

が出てきます。$\nu=-$ では

$$
p_+\gamma^{-+}+p_-\gamma^{--}+p_J\gamma^{-J}=-p^+\gamma^{--}+p_J\gamma^{-J}=0
$$

から γ^{--} と γ^{-J} の関係

$$\gamma^{--} = \frac{1}{p^+} p_J \gamma^{-J} \tag{11}$$

これらの関係によって、γ^{IJ} から γ^{I-} と γ^{--} が決まることになります。
(8) に (9) を使うと

$$p^2\gamma^{\mu\nu} - p^\nu p_\alpha \gamma^{\mu\alpha} - p^\mu p_\alpha \gamma^{\nu\alpha} = p^2\gamma^{\mu\nu} = 0$$

このときゲージ条件で消えないものは

$$p^2\gamma^{--} = 0 \ , \ p^2\gamma^{-I} = 0 \ , \ p^2\gamma^{IJ} = 0$$

この 3 つですが、(10) と (11) から

$$p^2\gamma^{IJ} = 0$$

だけで他のも表せます。これはマクスウェル方程式の (5c) と同じ形です (質量が 0 のクライン・ゴルドン方程式の形)。なので、今のゲージ条件において、線形アインシュタイン方程式は (6) と同じ形になり

$$(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\alpha'}{2} p^K p^K)\gamma^{IJ}(p^+, \boldsymbol{p}_T, \tau) = 0$$

となります。閉弦でのパラメータ条件は $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ なので、$p^K p^K$ の係数は $\alpha'/2$ になって出てきます。

というわけで、線形アインシュタイン方程式と $N = \overline{N} = 1$ の励起状態が対応しています。そして、γ^{IJ} はトレースが 0 なので、ψ_{IJ} のトレースが 0 の部分 T_{IJ} が対応することから、この状態が重力場を含んでいると考えられ、閉弦で重力子 (graviton) の状態が出てきたことになります (電磁場での光子に対応する、重力場の重力子)。S' 部分はディラトン (dilaton)、反対称な A_{IJ} は Kalb-Ramond 場と呼ばれるものになっていて重力子とは別の扱いがされます。

このように弦による記述の中に電磁場と重力場が両方とも出てくることから統一理論として使えると予想されました。