世界面での超対称性

ボソンを記述するポリヤコフ作用にフェルミオンを加えます。このとき新しい対称性として超対称性が加わります。ここでは Ramond-Neveu-Schwarz 形式でフェルミオンを加え、超対称性を世界面上で導入します。
フェルミオンの導入はすぐに終わって、その後は超対称性変換とエネルギー・運動量テンソルの計算をしているだけです。
ディラック方程式とガンマ行列に関しては、相対論的量子力学の「ディラック方程式」と「ディラック方程式の共変性」や場の量子論の「ディラック場」を見てください。

南部・後藤作用はボソンの弦しか記述しないので、フェルミオンを加えます。世界面の計量 g_{ab} を共形ゲージ $g_{00}=-g_{11}=-1,\ g_{01}=g_{10}=0$ にしたポリヤコフ作用

$$S_B=-\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ \partial_a X^\mu\partial^a X_\mu$$

から始めます。これは D 次元ミンコフスキー時空における世界面 (2 次元) でのボソン弦です。小文字のローマ文字は世界面の添え字で $(a=0,1)$、ギリシャ文字は時空の添え字です $(\mu=0,1,2,\dots,D-1)$。微分は

$$\partial_0=\frac{\partial}{\partial\tau}\ ,\ \partial_1=\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

とします。

これにフェルミオンの項をくっつけます。フェルミオンはディラック方程式に従っているので、ディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0$$

を作用に加えます。4 次元だとすれば、γ^μ はガンマ行列で 4×4 行列、ψ は 4 成分持ちのスピノールです。ガンマ行列は

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=-2\eta^{\mu\nu}$$

を満たしています ($\eta^{\mu\nu}$ は 4 次元のミンコフスキー計量 $(-1,+1,+1,+1)$)。スピノール成分の添え字を付けて書けば $(\gamma^\mu)_{AB}\psi_B$ のようになります。スピノールの添え字には大文字のローマ文字を使い、これも文字が重なっていれば和を取ります。ディラック方程式のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}=i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\overline{\psi}\psi\qquad(\overline{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0)$$

となっています。

ここで弦の添え字には、2 次元の世界面によるものと D 次元時空によるものの 2 つがいることに注意します。ボソン部分と揃えるために、微分とガンマ行列には世界面の添え字を与え、ψ は τ,σ に依存させます。そして、ψ に余っている時空の添え字を付けます。これはスピノール ψ を ψ^μ としてベクトルとしての自由度を新しく加えるということです (スピノール成分と時空のベクトル成分を持つ)。ボソン部分には質量項がないので、フェルミオン部分も質量をつけないで

$$S=-\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (\partial_a X^\mu\partial^a X_\mu-i\overline{\psi}^\mu\rho^a\partial_a\psi_\mu)=S_B+S_F \tag{1}$$

ρ^a は 2 次元でのガンマ行列です。スピノールでの時空の添え字は付加的な自由度 (内部自由度) でしかないので、世界面上でフェルミオンを考えていることになります (世界面上にフェルミオンいる)。このようにフェルミオンを導入する方法を Ramond-Neveu-Schwarz 形式 (RNS 形式) と言います。形は 2 次元での場の理論でしかないです。

ψ^μ は内積 $\psi^\mu\psi_\mu$ のときと省いても問題がないときには単に ψ と書いていきます。
2 次元でのガンマ行列は 4 次元と同じように

$$\{\rho^a,\rho^b\}=\rho^a\rho^b+\rho^b\rho^a=-2g^{ab} \tag{2}$$

を満たす必要があります。g^{ab} は $g^{ab}=(-1,+1)$ です。ここではガンマ行列を具体的に

$$\rho^0=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \rho^1=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と与えます。これは (2) を満たしています。例えば

$$\rho^0\rho^0=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\{\rho^0,\rho^0\}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-2g^{00}$$

となっています。ガンマ行列を純虚数にしているために、スピノールにはマヨラナ条件が課されて実数 $\psi^\mu=\psi^{\mu *}$ となり、マヨラナスピノールです (場の量子論の「マヨラナ質量」の補足参照)。
注意ですが、ρ^a の選び方として実数になるように選んでいる場合もあります。そうすると i が余分に出てくるために、符号がここでのものと異なってきます。例えば

$$\rho'^0=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \rho'^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように定義すると作用が

$$S=-\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (\partial_aX^\mu\partial^aX_\mu+\overline{\psi}^\mu\rho'^a\partial_a\psi_\mu)$$

となります ($i\rho'^a=\rho^a$ なので一致している)。このとき $\{\rho'^a,\rho'^b\}=-2\eta^{ab}$ $(\eta^{ab}=(-1,+1))$ となっています。こうするとガンマ行列がいる式において符号が反転したり i が余計にくっついたりします。他にもガンマ行列の符号が違っている場合もあるので定義には気をつけたほうがいいです。
世界面にいるのでスピノール成分は 2 つで

$$\psi^\mu=\begin{pmatrix} \psi^\mu_- \\ \psi^\mu_+ \end{pmatrix}\qquad(\psi^\mu_-=\psi^{\mu *}_-\ ,\ \psi^\mu_+=\psi^{\mu *}_+)$$

とします。スピノール成分は大文字のローマ文字にして、$A=-,+$ とします。マヨラナスピノールの性質として、2 つのスピノール χ,ψ が反交換 $(\chi\psi=-\psi\chi)$ するなら

$$\overline{\chi}\psi=\overline{\psi}\chi$$

というのを持ちます (ψ と χ がグラスマン数。グラスマン数については場の量子論の「経路積分〜ディラック場〜」参照)。これはスピノールが実数なので $\psi^\dagger=\psi^T$ (T は行列の転置) であることと、ρ_0 が反対称行列 $(\rho_0)_{AB}=-(\rho_0)_{BA}$ であることから

$$
\begin{aligned}
\overline{\chi}\psi = \chi^T\rho^0\psi = \chi_A(\rho^0)_{AB}\psi_B = (\rho^0)_{AB}\chi_A\psi_B &= -(\rho^0)_{AB}\psi_B\chi_A \\
&= -\psi_B(\rho^0)_{AB}\chi_A \\
&= \psi_B(\rho^0)_{BA}\chi_A \\
&= \psi^T\rho^0\chi \\
&= \overline{\psi}\chi
\end{aligned}
$$

となるからです (スピノールは 2×1 行列なので成分表示にすれば転置の記号は単純に外れます)。下から 3 行目でスピノールの反交換関係を使っています。このような式変形はよく出てきます。

2 次元での光円錐座標での表記を与えるために

$$
\sigma^+ = \tau + \sigma \ , \ \sigma^- = \tau - \sigma \tag{4a}
$$

$$
\partial_+ = \frac{\partial}{\partial\sigma^+} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma}) \ , \ \partial_- = \frac{\partial}{\partial\sigma^-} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma}) \tag{4b}
$$

という記号を定義します (スピノールの成分も $\pm$ で書いているので混乱しないようにしてください)。この場合の光円錐座標での計量は η^{ab} と書くことにして

$$
\begin{gathered}
\eta^{+-} = \eta^{-+} = -2 \ , \ \eta_{+-} = \eta_{-+} = -1/2 \\
\eta^{++} = \eta^{--} = \eta_{++} = \eta_{--} = 0
\end{gathered}
$$

「弦のゲージ固定」では係数 $1/\sqrt{2}$ を含めていたので、今の場合と計量が異なっています。これらを使うと

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}\rho^a\partial_a\psi &= \overline{\psi}(\rho^0\frac{\partial}{\partial\tau} + \rho^1\frac{\partial}{\partial\sigma})\psi \\
&= \overline{\psi}\Big(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\tau} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\psi \\
&= \overline{\psi}\begin{pmatrix} 0 & -i\dfrac{\partial}{\partial\tau} + i\dfrac{\partial}{\partial\sigma} \\ i\dfrac{\partial}{\partial\tau} + i\dfrac{\partial}{\partial\sigma} & 0 \end{pmatrix}\psi \\
&= \overline{\psi}\begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix}\psi \\
&= \psi^T\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix}\psi \\
&= \psi^T\begin{pmatrix} 2\partial_+ & 0 \\ 0 & 2\partial_- \end{pmatrix}\psi \\
&= (\psi_- \ \psi_+)\begin{pmatrix} 2\partial_+ & 0 \\ 0 & 2\partial_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \\
&= 2\psi_-\partial_+\psi_- + 2\psi_+\partial_-\psi_+
\end{aligned}
$$

よって S_F は光円錐座標において

$$S_F = \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ i\overline{\psi}\rho^a\partial_a\psi = iT_0\int d\tau d\sigma(\psi_-\partial_+\psi_- + \psi_+\partial_-\psi_+)$$

となります。S_F はディラック方程式を導くように作っているので、ψ の運動方程式として 2 次元のディラック方程式

$$\rho^a\partial_a\psi = 0$$

が出てきます。後で出しますが、$\psi_\pm$ に対する運動方程式は

$$\partial_+\psi_- = 0 \tag{5a}$$

$$\partial_-\psi_+ = 0 \tag{5b}$$

この (5a),(5b) は

$$(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi_- = 0\ ,\ (\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi_+ = 0$$

なので、$\psi_\pm$ の解として、ψ_- は $(\tau - \sigma)$、ψ_+ は $(\tau + \sigma)$ に依存する波が選べます。つまり、$\psi_-(\sigma_-)$ は右進行の波、$\psi_+(\sigma_+)$ は左進行の波です。

ガンマ行列にも光円錐座標に合わせた表記を作ります。ガンマ行列は 2 次元のベクトルを構成しているので

$$\rho^+ = \rho^0 + \rho^1\ ,\ \rho^- = \rho^0 - \rho^1 \tag{6}$$

として光円錐座標に移します。そうすると $\partial_\pm$ の組み合わせによって

$$\begin{aligned}
&(\rho^0 - \rho^1)(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi + (\rho^0 + \rho^1)(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi \\
&= \rho^0(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi - \rho^1(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi + \rho^0(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi + \rho^1(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi \\
&= 2\rho^0\frac{\partial}{\partial\tau}\psi + 2\rho^1\frac{\partial}{\partial\sigma}\psi \\
&= 2\rho^a\partial_a\psi
\end{aligned}$$

となっているので

$$\rho^a\partial_a\psi = (\rho^0 - \rho^1)\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi + (\rho^0 + \rho^1)\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma})\psi = \rho^-\partial_-\psi + \rho^+\partial_+\psi$$

というのが作れます (単に添え字を $a = 0, 1$ から $a = +, -$ にしただけ)。下付きには光円錐座標の計量 $\eta^{+-} = \eta^{-+} = -2$ によって

$$(\eta^{-+}\rho_+\partial_- + \eta^{+-}\rho_-\partial_+)\psi = (-2\rho_+\partial_- - 2\rho_-\partial_+)\psi$$

$$(\rho^+ = \eta^{+b}\rho_b = \eta^{++}\rho_+ + \eta^{+-}\rho_- = \eta^{+-}\rho_-)$$

これらから、$\rho^a\partial_a\psi=0$ は

$$\rho^a\partial_a\psi=(\rho^-\partial_-+\rho^+\partial_+)\psi=(\rho_+\partial_-+\rho_-\partial_+)\psi=0$$

と書くことが出来ます。下付きの $\rho_\pm$ は $\eta_{+-}=\eta_{-+}=-1/2$ から

$$\rho_+=\eta_{+-}\rho^-=-\frac{1}{2}\rho^-=-\frac{1}{2}(\rho^0-\rho^1)=\begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{7a}$$

$$\rho_-=\eta_{-+}\rho^+=-\frac{1}{2}\rho^+=-\frac{1}{2}(\rho^0+\rho^1)=-\begin{pmatrix}0 & 0\\ i & 0\end{pmatrix} \tag{7b}$$

となっています。これらを入れれば $\partial_-\psi_+=\partial_+\psi_-=0$ が出てきます。
(5a),(5b) をフェルミオン部分のラグランジアン

$$\mathcal{L}_F=\frac{T_0}{2}i\overline{\psi}\rho^a\partial_a\psi=\frac{T_0}{2}i\psi^\dagger\rho^0\rho^a\partial_a\psi$$

から出すには、ψ と $\psi^\dagger$ を独立に扱って、オイラー・ラグランジュ方程式に入れればいいです。$T_0/2$ はただの係数なので無視します。ψ の運動方程式を取り出すには

$$\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\psi^\dagger}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial(\partial_a\psi^\dagger)}=0$$

を計算すればいいです。そうすると

$$\rho^0\rho^a\partial_a\psi=0$$

なので

$$\begin{pmatrix}2\partial_+ & 0\\ 0 & 2\partial_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_-\\ \psi_+\end{pmatrix}=0$$

となって、(5a),(5b) が出てきます。
オイラー・ラグランジュ方程式からだと境界条件が分からないので、作用の変分に戻ります。$\psi_\pm$ の変分を考えて、作用の変分

$$\delta S_F=iT_0\int d\tau d\sigma(\delta\psi_-\partial_+\psi_-+\psi_-\partial_+\delta\psi_-+\delta\psi_+\partial_-\psi_++\psi_+\partial_-\delta\psi_+)$$

を計算します。第二項と第四項を変形して

$$\delta S_F=iT_0\int d\tau d\sigma(\delta\psi_-\partial_+\psi_-+\partial_+(\psi_-\delta\psi_-)-(\partial_+\psi_-)\delta\psi_-+\delta\psi_+\partial_-\psi_++\partial_-(\psi_+\delta\psi_+)-(\partial_-\psi_+)\delta\psi_+)$$

第二項と第五項は

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma (\partial_+(\psi_-\delta\psi_-)+\partial_-(\psi_+\delta\psi_+))\\
&\quad= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \Big((\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\sigma})(\psi_-\delta\psi_-)+(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\sigma})(\psi_+\delta\psi_+)\Big)\\
&\quad= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \Big(\frac{\partial}{\partial\sigma}(\psi_-\delta\psi_-)-\frac{\partial}{\partial\sigma}(\psi_+\delta\psi_+)\Big)\\
&\quad= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \big((\psi_-\delta\psi_- - \psi_+\delta\psi_+)\big|_{\sigma=\pi} - (\psi_-\delta\psi_- - \psi_+\delta\psi_+)\big|_{\sigma=0}\big)
\end{aligned}
$$

三行目にいくときに τ_f, τ_i で $\delta\psi_\pm = 0$ だとしています。σ の範囲は $0 \sim \pi$ にしています。これが消えるとすれば

$$
\delta S_F = iT_0 \int d\tau d\sigma \big(\delta\psi_-\partial_+\psi_- - (\partial_+\psi_-)\delta\psi_- + \delta\psi_+\partial_-\psi_+ - (\partial_-\psi_+)\delta\psi_+ \big)
$$

$\delta S_F = 0$ から運動方程式

$$
\partial_+\psi_- = 0 \ , \ \partial_-\psi_+ = 0
$$

が出てきます。

ここで δS_F において境界 $\sigma = 0, \sigma = \pi$ で消える項として

$$
\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \big((\psi_-\delta\psi_- - \psi_+\delta\psi_+)\big|_{\sigma=\pi} - (\psi_-\delta\psi_- - \psi_+\delta\psi_+)\big|_{\sigma=0}\big) = 0 \tag{8}
$$

というのが出てきました。これから境界条件が設定されます。開弦だとすれば、これが成立するためには

$$
\psi_-\delta\psi_- - \psi_+\delta\psi_+ = 0
$$

から、σ の端において

$$
\psi_+ = \pm\psi_- \quad\ (\delta\psi_+ = \pm\delta\psi_-)
$$

という条件が出てきます。符号の取り方は、大抵は $\sigma = 0$ では

$$
\psi_+(\tau, \sigma = 0) = \psi_-(\tau, \sigma = 0)
$$

とします (一般性は失われない)。残っている $\sigma = \pi$ に対する符号の取り方によって結果が変わります。プラスを選び

$$
\psi_+(\tau, \pi) = \psi_-(\tau, \pi)
$$

とするのを Ramond 境界条件、マイナスを選び

$$
\psi_+(\tau, \pi) = -\psi_-(\tau, \pi)
$$

とするのを Neveu-Schwarz 境界条件と呼びます。それぞれ R 境界条件、NS 境界条件とします。もしくは R セクター (R sector)、NS セクター (NS sector) と呼ばれたりもします。

R 境界条件として、$\psi_\pm$ を展開します。運動方程式から、ψ_- は $\tau-\sigma$、ψ_+ は $\tau+\sigma$ に依存するとしてフーリエ展開したものが解になっているので

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \tag{9a}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{9b}$$

とします (n は全ての整数)。この展開において $\sigma=\pi$ では

$$\psi_-^\mu(\tau,\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau-\pi)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in\tau}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau+\pi)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in\tau}$$

となるので、R 境界条件を満たしています ($e^{\pm i\pi}=-1$)。さらに

$$\psi_-^*(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^* e^{in(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_+^*(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^* e^{in(\tau+\sigma)}$$

から、マヨラナ条件 $\psi_\pm=\psi_\pm^*$ によって

$$\psi_-(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n e^{-in(\tau-\sigma)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_{-n} e^{in(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_{-n}^\mu e^{in(\tau+\sigma)}$$

となって

$$d_{-n}=d_n^*$$

という関係になっていることが分かります。

NS 境界条件でも同様に出来ます。$\psi_\pm$ はここでもフーリエ展開して

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n b_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n b_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}$$

ただし、NS 境界条件のために $\psi_+^\mu(\tau,\pi) = -\psi_-^\mu(\tau,\pi)$ なので、$e^{\pm i\pi/2} = \pm i$ であることを使うことで、$r = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$ とすれば、$\psi_-^\mu(\tau,\pi)$ は

$$\begin{aligned}\psi_-^\mu(\tau,\pi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=\pm 1/2,\cdots} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\pi)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots + b_{-1/2}^\mu e^{-i\pi/2}e^{-i\tau/2} + b_{1/2}^\mu e^{i\pi/2}e^{-i\tau/2} + b_{3/2}^\mu e^{i3\pi/2}e^{-3i\tau/2} + \cdots)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots - ib_{-1/2}^\mu e^{-i\tau/2} + ib_{1/2}^\mu e^{-i\tau/2} - ib_{3/2}^\mu e^{-3i\tau/2} + \cdots)\end{aligned}$$

$\psi_+^\mu(\tau,\pi)$ は

$$\begin{aligned}\psi_+^\mu(\tau,\pi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\pi)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots + b_{-1/2}^\mu e^{i\pi/2}e^{-i\tau/2} + b_{1/2}^\mu e^{-i\pi/2}e^{-i\tau/2} + b_{3/2}^\mu e^{-i3\pi/2}e^{-3i\tau/2} + \cdots)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots + ib_{-1/2}^\mu e^{-i\tau/2} - ib_{1/2}^\mu e^{-i\tau/2} + ib_{3/2}^\mu e^{-3i\tau/2} + \cdots)\end{aligned}$$

となるので、NS 境界条件を満たします。というわけで、NS 境界条件においては

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_r b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_r b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}$$

$r = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$ となります。これ以降 m, n に対しては整数 $0, \pm 1, \ldots$、r, s に対しては半整数 $\pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$ とします。

閉弦でも同様に 2 つの境界条件が出てきます。閉弦では周期的境界条件

$$\psi_\pm(\tau,\sigma) = \psi_\pm(\tau,\sigma+\pi)$$

と反周期的境界条件

$$\psi_\pm(\tau,\sigma) = -\psi_\pm(\tau,\sigma+\pi)$$

によって、(8) を成立させられます。閉弦ではボソンの場合と同じように右進行と左進行を独立に取るので、周期的境界条件の場合では

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}$$

反周期的境界条件では

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_r b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_r \tilde{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau+\sigma)}$$

となります。exp 内に 2 がいるのは、$\psi_\pm(\tau,\sigma)=\psi_\pm(\tau,\sigma+\pi)$ から、$e^{i2\pi}=1$ とするためです。閉弦では右進行と左進行を独立に扱うために、開弦とは違い、右進行の ψ_- と左進行の ψ_+ に対して異なった境界条件を与えることができます。このため、周期的境界条件を R、反周期的境界条件を NS とすれば、組み合わせとして

- 右進行 ψ_- に NS、左進行 ψ_+ に NS
- 右進行 ψ_- に R、左進行 ψ_+ に R
- 右進行 ψ_- に R、左進行 ψ_+ に NS
- 右進行 ψ_- に NS、左進行 ψ_+ に R

という 4 つが考えられます。この取り方によって記述されるものがボソンかフェルミオンに分かれます。
　次に新しく加わる対称性を見ます。作用 (1) は

$$\begin{aligned}
X^\mu &\Rightarrow X'^\mu=X^\mu+\delta_s X^\mu=X^\mu+\bar{\epsilon}\psi^\mu\\
\psi^\mu &\Rightarrow \psi'^\mu=\psi^\mu+\delta_s\psi^\mu=\psi^\mu-i\rho^a\partial_a X^\mu\epsilon\\
\overline{\psi}^\mu &\Rightarrow \overline{\psi}'^\mu=\overline{\psi}^\mu+\delta_s\overline{\psi}^\mu=\overline{\psi}^\mu+i\bar{\epsilon}\rho^a(\partial_a X^\mu)
\end{aligned}$$

という変換に対して不変になっています。ϵ は微小な定数のマヨラナスピノール (グラスマン数) です ($\bar{\epsilon}=\epsilon^\dagger\rho^0$)。$\overline{\psi}^\mu$ の変換は

$$\begin{aligned}
\delta_s\overline{\psi}^\mu=\overline{-i\rho^a(\partial_a X^\mu)\epsilon}=(-i\rho^a\partial_a X^\mu\epsilon)^\dagger\rho^0&=i\epsilon^\dagger\rho^{a\dagger}\rho^0(\partial_a X^\mu)\\
&=i\epsilon^\dagger\rho^0\rho^0\rho^{a\dagger}\rho^0(\partial_a X^\mu)\quad(\rho^0\rho^0=1)\\
&=i\bar{\epsilon}\rho^a(\partial_a X^\mu)\quad(\rho^0\rho^{a\dagger}\rho^0=\rho^a)
\end{aligned}$$

途中でガンマ行列の性質を使っていますが、成立していることは (3) を入れれば直接確かめられます。X^μ はスカラーで通常の数なので δX^μ も通常の数 (交換するときに符号が変わらない) である必要があるので、$\bar{\epsilon}\psi^\mu=\bar{\epsilon}_A\psi_A^\mu$ としています。このようにすれば、グラスマン数と交換するときに、δX^μ はグラスマン数が 2 回交換することになるので通常の数と同じように符号が反転しません。この変換は、ボソンである X^μ にフェルミオンである ψ が入り、フェルミオンである ψ^μ にはボソンである X^μ が入ってきています。このようにボソンとフェルミオンを混ぜる変換を超対称性変換 (super symmetry transformation) と言います。そして、超対称性が世界面上で成立しているのが RNS 形式の特徴です。
　実際に超対称性変換に対して不変になっていることを確かめておきます。S_B は

$$
\begin{aligned}
S_B =& -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ \partial_a X^\mu \partial^a X_\mu \\
\Rightarrow& -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ \partial_a (X^\mu + \delta X^\mu)\partial^a (X_\mu + \delta X_\mu) \\
=& -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu + 2(\partial_a \delta X^\mu)\partial^a X_\mu) \\
=& -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (\partial_a X^\mu \partial^a X^\mu + 2(\partial_a \bar{\epsilon}\psi^\mu)\partial^a X_\mu) \\
=& -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (\partial_a X^\mu \partial^a X^\mu + 2\partial_a(\bar{\epsilon}\psi^\mu \partial^a X_\mu) - 2\bar{\epsilon}\psi^\mu \partial_a \partial^a X_\mu) \\
=& -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (\partial_a X^\mu \partial^a X^\mu - 2\bar{\epsilon}\psi^\mu \partial_a \partial^a X_\mu) \\
=& S_B + \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ 2\bar{\epsilon}\psi^\mu \partial_a \partial^a X_\mu \\
=& S_B + \delta_s S_B
\end{aligned}
$$

$\delta_s X^\mu$ の 2 次の項は消し、最後へは表面積分で消えるとしています。上で触れたように $\delta_s X^\mu$ は通常の数として扱えます。S_F は

$$
\begin{aligned}
S_F =& \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ i\overline{\psi}\rho^a \partial_a \psi \\
\Rightarrow& \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ i(\overline{\psi} + \delta\overline{\psi})\rho^a \partial_a (\psi + \delta\psi) \\
=& \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (i\overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu + i\overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \delta\psi_\mu + \delta\overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu) \\
=& \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (i\overline{\psi}\rho^a \partial_a \psi + \overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a (\rho^b \partial_b X_\mu \epsilon) - \bar{\epsilon}\rho^a (\partial_a X^\mu)\rho^b \partial_b \psi_\mu) \\
=& \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (i\overline{\psi}\rho^a \partial_a \psi + \overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a (\rho^b \partial_b X_\mu \epsilon) - \partial_b(\bar{\epsilon}\rho^a (\partial_a X^\mu)\rho^b \psi_\mu + \partial_b(\bar{\epsilon}\rho^a \partial_a X^\mu)\rho^b \psi_\mu) \\
=& \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (i\overline{\psi}\rho^a \partial_a \psi + \overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a (\rho^b \partial_b X_\mu \epsilon) + \partial_b(\bar{\epsilon}\rho^a \partial_a X^\mu)\rho^b \psi_\mu) \\
=& S_F + \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (\overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a (\rho^b \partial_b X_\mu \epsilon) + \partial_b(\bar{\epsilon}\rho^a \partial_a X^\mu)\rho^b \psi_\mu) \\
=& S_F + \delta_s S_F
\end{aligned}
$$

最後に行くときに、表面積分は落ちるとしています。$\delta_s S_F$ の第一項はスピノール成分によって書くと

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}\rho^a \rho^b \epsilon = \overline{\psi}_A (\rho^a)_{AB} (\rho^b)_{BC} \epsilon_C =& \overline{\psi}_A (\rho^a)_{AB} (\rho^b)_{BC} \epsilon_C \\
=& \psi_D (\rho^0)_{DA} (\rho^a)_{AB} (\rho^b)_{BC} \epsilon_C \\
=& -\epsilon_C (\rho^0)_{DA} (\rho^a)_{AB} (\rho^b)_{BC} \psi_D \\
=& -\epsilon_C (\rho^0 \rho^a \rho^b)_{DC} \psi_D
\end{aligned}
$$

$(\rho^0)^T = -\rho^0$ と $\rho^0\rho^1 = -\rho^1\rho^0$ によって

$$\rho^0(\rho^0)^T\rho^0 = -\rho^0 \ , \ \rho^0(\rho^1)^T\rho^0 = \rho^0\rho^1\rho^0 = -\rho^0\rho^0\rho^1 = -\rho^1$$

であることから、$\rho^0(\rho^a)^T\rho^0 = -\rho^a$ なので、$\rho^0\rho^a\rho^b$ の転置は

$$(\rho^0\rho^a\rho^b)^T = \rho^{bT}\rho^{aT}\rho^{0T} = \rho^{bT}\rho^0\rho^0\rho^{aT}\rho^0\rho^0\rho^{0T} = -\rho^0\rho^b\rho^a\rho^0\rho^0 = -\rho^0\rho^b\rho^a$$
$$\big((\rho^0\rho^a\rho^b)^T = ((\rho^0\rho^a\rho^b)_{AB})^T = -(\rho^0\rho^a\rho^b)_{BA}\big)$$

これによって

$$\overline{\psi}\rho^a\rho^b\epsilon = -\epsilon_C(\rho^0\rho^a\rho^b)_{DC}\psi_D = \epsilon_C(\rho^0\rho^a\rho^b)_{CD}\psi_D = \epsilon^T\rho^0\rho^a\rho^b\psi = \bar{\epsilon}\rho^a\rho^b\psi$$

となります。なので δ_sS_F の第一項は

$$\overline{\psi}^\mu\rho^a\partial_a(\rho^b\partial_bX_\mu\epsilon) = \bar{\epsilon}\rho^a\partial_a(\rho^b\partial_bX_\mu)\psi = \partial_a(\bar{\epsilon}\rho^a\partial_bX_\mu)\rho^b\psi^\mu$$

と書き換えられ、これは δ_sS_F の第二項と等しいので

$$\delta_sS_F = \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ 2\partial_b(\bar{\epsilon}\rho^a\partial_aX^\mu)\rho^b\psi_\mu$$

そして、$\rho^b\partial_b\rho^a\partial_a$ は、$\partial_b\partial_a = \partial_a\partial_b$ と $\rho^b\rho^a\partial_b\partial_a = \rho^a\rho^b\partial_a\partial_b$ から

$$\begin{aligned}\rho^b\rho^a\partial_b\partial_a &= (\rho^a\rho^b - 2\eta^{ab})\partial_b\partial_a = -\rho^a\rho^b\partial_b\partial_a - 2\eta^{ab}\partial_b\partial_a = -\rho^a\rho^b\partial_a\partial_b - 2\partial^a\partial_a \\ \Rightarrow\ \ &\rho^b\rho^a\partial_b\partial_a = -\partial^a\partial_a\end{aligned}$$

なので

$$\delta_sS_F = -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ 2(\bar{\epsilon}\partial^a\partial_aX^\mu)\psi_\mu$$

一応注意しておくと、時空の計量 $\eta^{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量なので

$$(\partial_aX^\mu)\psi_\mu = (\partial_a\eta^{\mu\nu}X_\nu)\eta_{\mu\lambda}\psi^\lambda = \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\lambda}(\partial_aX_\nu)\psi^\lambda = \delta^\nu_\lambda(\partial_aX_\nu)\psi^\lambda = (\partial_aX_\nu)\psi^\nu$$

というわけで、全体の作用の変化分は

$$\delta_sS = \delta_sS_B + \delta_sS_F = \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ (2\bar{\epsilon}\psi^\mu\partial_a\partial^aX_\mu) - 2(\bar{\epsilon}\partial_a\partial^aX^\mu)\psi_\mu) = 0$$

となって、超対称性変換に対して不変になっています。

超対称性変換に対するネーターカレントを求めます。そのために ϵ を τ, σ に依存させます。S_B では ϵ が微分に引っかかっても基本的に同じです。S_F では

$$\begin{aligned}\delta_s S_F &= \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ 2\partial_b(\bar{\epsilon}\rho^a\partial_a X^\mu)\rho^b\psi_\mu \\ &= \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ \big(2(\partial_b\bar{\epsilon})\rho^a(\partial_a X^\mu)\rho^b\psi_\mu + 2\bar{\epsilon}(\rho^a\rho^b\partial_b\partial_a X^\mu)\psi_\mu\big) \\ &= \frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ \big(2(\partial_b\bar{\epsilon})\rho^a(\partial_a X^\mu)\rho^b\psi_\mu - 2\bar{\epsilon}(\partial^a\partial_a X^\mu)\psi_\mu\big)\end{aligned}$$

となるので、$\delta_s S$ ではこれの第一項が消えずに残ります。この消えずに残った部分が超対称性のネーターカレントです。ネーターカレント J_a を

$$\delta_s S = -2T_0\int d\tau d\sigma\ (\partial^a\bar{\epsilon})J_a$$

と定義すれば

$$J_a = -\frac{1}{2}\rho^b\rho_a(\partial_b X^\mu)\psi_\mu \qquad (\partial^a J_a = 0)$$

$\delta_s S = 0$ とするために $\partial^a J_a = 0$ となっています。この超対称性でのネーターカレントを supercurrent と呼びます。

J_a を光円錐座標に持っていきます。光円錐座標へは添え字を $a = 0, 1$ から $a = +, -$ にすればいいことを使えば、(7a) での ρ_+ を使って

$$\begin{aligned}J_+ =& -\frac{1}{2}\rho^b\rho_+(\partial_b X^\mu)\psi_\mu \\ =& -\frac{1}{2}\rho^0\rho_+(\partial_0 X^\mu)\psi_\mu - \frac{1}{2}\rho^1\rho_+(\partial_1 X^\mu)\psi_\mu \\ =& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}(\partial_0 X^\mu)\psi_\mu - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}(\partial_1 X^\mu)\psi_\mu \\ =& \frac{1}{2}(\partial_0 X^\mu)\psi_{+\mu} + \frac{1}{2}(\partial_1 X^\mu)\psi_{+\mu} \\ =& (\partial_+ X^\mu)\psi_{+\mu}\end{aligned}$$

J_- では (7b) を使って

$$\begin{aligned}J_- =& -\frac{1}{2}\rho^b\rho_-(\partial_b X^\mu)\psi_\mu \\ =& -\frac{1}{2}\rho^0\rho_-(\partial_0 X^\mu)\psi_\mu - \frac{1}{2}\rho^1\rho_-(\partial_1 X^\mu)\psi_\mu \\ =& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}(\partial_0 X^\mu)\psi_\mu - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}(\partial_1 X^\mu)\psi_\mu \\ =& \frac{1}{2}(\partial_0 X^\mu)\psi_{-\mu} - \frac{1}{2}(\partial_1 X^\mu)\psi_{-\mu} \\ =& (\partial_- X^\mu)\psi_{-\mu}\end{aligned}$$

となります。

次にエネルギー・運動量テンソルを求めます。「相対論的な弦」での方法でも出せますが、ここでは並進不変性から出してみます。パラメータに対する並進不変として

$$\tau \ \Rightarrow \ \tau + c_\tau \ , \ \sigma \ \Rightarrow \ \sigma + c_\sigma$$

という変換を行います。そうすると場の量子論の「ネーターの定理」で求められたように、ネーターカレントによって、ボソンのラグランジアンを $\mathcal{L}_B$、フェルミオンのラグランジアンを $\mathcal{L}_F$ とすれば、ボソン部分とフェルミオン部分のエネルギー・運動量テンソル B_{ab}, F'_{ab} が

$$\partial^a B_{ab} = \partial^a \Big(\partial_b X^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial(\partial^a X^\mu)} - g_{ab}\mathcal{L}_B\Big)$$

$$\partial^a F'_{ab} = \partial^a \Big(\partial_b \psi \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial^a \psi)} + \partial_b \psi^T \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial^a \psi^T)} - g_{ab}\mathcal{L}_F\Big)$$

で与えられます (ψ と ψ^T はそれぞれ独立)。「相対論的な弦」でのボソンのエネルギー・運動量テンソルには T_0 が含まれるようにしていましたが、ここでは含めないように定義し、符号も反転させます (T_0 とマイナスが煩わしいから)。ようは

$$T_{ab} = \frac{1}{T_0}\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{ab}(x)}$$

と一致するようにラグランジアンを定義します (上での $\mathcal{L}_F$ から変更される)。そのためには

$$S = -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma \mathcal{L} = -T_0 \int d\tau d\sigma \ (\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_F) = -T_0 \int d\tau d\sigma \ (\frac{1}{2}\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu)$$

と定義すればいいです。ボソン部分は「相対論的な弦」で求めたものと一致するのがすぐに分かります。フェルミオン部分も $\partial^a \psi^T$ の微分はラグランジアンにひっかからないことからすぐに

$$2F'_{ab} = -(i\overline{\psi}\rho_a \partial_b \psi - g_{ab} i\overline{\psi}\rho^c \partial_c \psi)$$

右辺に 1/2 をつけると後の計算で煩わしいので $2F'_{ab}$ としています。しかし、これではエネルギー・運動量テンソル F'_{ab} が a, b の入れ替えに関して対称になっていないので、対称にします。そのために反対称テンソルとして

$$\chi_{ab} = i\overline{\psi}\rho_a \partial_b \psi - i\overline{\psi}\rho_b \partial_a \psi$$

というのを加えます。ここでレヴィ・チビタ記号 ϵ^{ab} ($\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$、$\epsilon_{ab} = -\epsilon^{ab}$) を導入して

$$\epsilon_{ab}\epsilon^{cd} = -(\delta^c_a \delta^d_b - \delta^d_a \delta^c_b)$$

という関係を使えば

$$\epsilon_{ab}\epsilon^{cd}\rho_c \partial_d = -(\delta^c_a \delta^d_b - \delta^d_a \delta^c_b)\rho_c \partial_d = -(\rho_a \partial_b - \rho_b \partial_a)$$

と書けるので

$$\chi_{ab} = -i\overline{\psi}\epsilon_{ab}\epsilon^{cd}\rho_c \partial_d \psi$$

$\epsilon^{cd}\rho_c$ は

$$\epsilon^{cd}\rho_c = \epsilon^{0d}\rho_0 + \epsilon^{1d}\rho_1$$

から、$d=0$ では $-\rho_1$、$d=1$ では ρ_0 となっています。そして

$$\begin{aligned}&-\rho_0\rho_1\rho^0 = \rho_0\rho^0\rho_1 = -\rho_1 \quad (\rho_0\rho^0 = \eta^{00}\rho_0\rho_0 = -1)\\&-\rho_0\rho_1\rho^1 = \rho_0 \quad (\rho_1\rho^1 = \eta^{11}\rho_1\rho_1 = -1\ ,\ \rho_1\rho_1 = -1)\end{aligned}$$

という関係を作れるので

$$\epsilon^{cd}\rho_c = -\rho_0\rho_1\rho^d$$

とできて

$$\chi_{ab} = i\overline{\psi}\epsilon_{ab}\rho_0\rho_1\rho^d\partial_d\psi$$

そうすると運動方程式が成立しているなら $\rho^a\partial_a\psi = 0$ から χ_{ab} はエネルギー・運動量テンソルに影響しません。よって、フェルミオン部分の対称なエネルギー・運動量テンソル F_{ab} は

$$\begin{aligned}2F_{ab} = 2F'_{ab} + \chi_{ab} =&\ -i\overline{\psi}\rho_a\partial_b\psi + g_{ab}i\overline{\psi}\rho^c\partial_c\psi + \frac{1}{2}(i\overline{\psi}\rho_a\partial_b\psi - i\overline{\psi}\rho_b\partial_a\psi)\\=&\ -\frac{1}{2}i\overline{\psi}\rho_a\partial_b\psi - \frac{1}{2}i\overline{\psi}\rho_b\partial_a\psi + g_{ab}i\overline{\psi}\rho^c\partial_c\psi\end{aligned}$$

となります。もしくは、ワイル不変性を持たせるためにトレースが 0 になるということと対称テンソルであるということから作っても同じことになります。

後はボソン部分のエネルギー・運動量テンソルと合わせればいいです。ボソンのエネルギー・運動量テンソル B_{ab} は

$$B_{ab} = \partial_a X^\mu\partial_b X_\mu - \frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X_\mu$$

となっているので、全体のエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{ab} = B_{ab} + F_{ab} = \partial_a X^\mu\partial_b X_\mu - \frac{1}{4}i\overline{\psi}\rho_a\partial_b\psi - \frac{1}{4}i\overline{\psi}\rho_b\partial_a\psi - \frac{1}{2}g_{ab}(\partial^c X^\mu\partial_c X_\mu - i\overline{\psi}\rho^c\partial_c\psi)$$

これは対称でトレースが 0 になっています。各成分 T_{00}, T_{11}, T_{01} は

$$
\begin{aligned}
T_{00} =&\ \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu - \frac{1}{4} i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi - \frac{1}{4} i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi + \frac{1}{2}(-\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi - i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi) \\
=&\ \frac{1}{2}\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \frac{1}{2}\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi \\
T_{11} =&\ \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi - \frac{1}{2}(-\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi - i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi) \\
=&\ \frac{1}{2}\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \frac{1}{2}\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi \\
T_{01} =&\ \partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{4} i\overline{\psi}\rho_0\partial_1\psi - \frac{1}{4} i\overline{\psi}\rho_1\partial_0\psi
\end{aligned}
$$

となっています。

エネルギー・運動量テンソルを光円錐座標に移してみます。テンソルの変換則を使うことにします。テンソルの変換は

$$
\tilde{T}_{ij} = \frac{\partial\xi^a}{\partial\xi'^i}\frac{\partial\xi^b}{\partial\xi'^j}T_{ab}
$$

によって出来るので (一般相対性理論の「テンソル解析」参照)、$\xi^a = (\tau, \sigma)$ を $\xi'^\pm = \sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ に変換すると、(4a),(4b) から

$$
\begin{aligned}
T_{++} &= \frac{\partial\xi^a}{\partial\xi'^+}\frac{\partial\xi^b}{\partial\xi'^+}T_{ab} = \frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}T_{00} + \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}T_{11} + 2\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}T_{01} = \frac{1}{4}T_{00} + \frac{1}{4}T_{11} + \frac{1}{2}T_{01} \\
T_{--} &= \frac{\partial\xi^a}{\partial\xi'^-}\frac{\partial\xi^b}{\partial\xi'^-}T_{ab} = \frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}T_{00} + \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}T_{11} + 2\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}T_{01} = \frac{1}{4}T_{00} + \frac{1}{4}T_{11} - \frac{1}{2}T_{01} \\
T_{+-} &= \frac{\partial\xi^a}{\partial\xi'^+}\frac{\partial\xi^b}{\partial\xi'^-}T_{ab} = \frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}T_{00} + \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}T_{11} + \frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}T_{01} + \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}T_{10} = \frac{1}{4}T_{00} - \frac{1}{4}T_{11}
\end{aligned}
$$

エネルギー・運動量テンソルのトレースは $T^a_{\ a} = g^{ab}T_{ab} = -T_{00} + T_{11} = 0$ なので、$T_{+-} = T_{-+} = 0$ です。$T_{00} + T_{11}$ は

$$
\begin{aligned}
T_{00} + T_{11} &= \frac{1}{2}\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \frac{1}{2}\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi + \frac{1}{2}\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \frac{1}{2}\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi \\
&= \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi
\end{aligned}
$$

これに $2T_{01}$ を足して

$$
\begin{aligned}
T_{00} + T_{11} + 2T_{01} &= \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi \\
&\quad + 2\partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_0\partial_1\psi - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_0\psi \\
&= \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + 2\partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_0\partial_1\psi - \frac{1}{2} i\overline{\psi}\rho_1\partial_0\psi
\end{aligned}
$$

ボソン部分は

$$\begin{aligned}\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + 2\partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu &= \partial_0 X^\mu(\partial_0+\partial_1)X_\mu + \partial_1 X^\mu(\partial_0+\partial_1)X_\mu \\ &= (\partial_0+\partial_1)X^\mu(\partial_0+\partial_1)X_\mu \\ &= 4\partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu\end{aligned}$$

フェルミオン部分は

$$\begin{aligned}i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi + i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi + i\overline{\psi}\rho_0\partial_1\psi + i\overline{\psi}\rho_1\partial_0\psi &= -i\overline{\psi}\rho^0\partial_0\psi + i\overline{\psi}\rho^1\partial_1\psi - i\overline{\psi}\rho^0\partial_1\psi + i\overline{\psi}\rho^1\partial_0\psi \\ &= -i\overline{\psi}\rho^0\partial_0\psi - i\overline{\psi}\rho^0\partial_1\psi + i\overline{\psi}\rho^1\partial_1\psi + i\overline{\psi}\rho^1\partial_0\psi \\ &= -i\overline{\psi}\rho^0(\partial_0+\partial_1)\psi + i\overline{\psi}\rho^1(\partial_0+\partial_1)\psi \\ &= -2i\overline{\psi}\rho^0\partial_+\psi + 2i\overline{\psi}\rho^1\partial_+\psi \\ &= -2i\psi^T\rho^0\rho^0\partial_+\psi + 2i\psi^T\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\partial_+\psi \\ &= -2i\psi^T\partial_+\psi + 2i\psi^T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\partial_+\psi \\ &= 2i(\psi_- \ \psi_+)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\partial_+\begin{pmatrix}\psi_-\\ \psi_+\end{pmatrix} \\ &= -4i\psi_+\partial_+\psi_+\end{aligned}$$

よって

$$T_{00}+T_{11}+2T_{01} = 4\partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + 2i\psi_+\partial_+\psi_+$$

となるので

$$T_{++} = \frac{1}{4}(T_{00}+T_{11}+2T_{01}) = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{1}{2}i\psi_+\partial_+\psi_+$$

T_{--} は

$$\begin{aligned}&T_{00}+T_{11}-2T_{01} \\ &\quad = \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - 2\partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu - \frac{1}{2}i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi - \frac{1}{2}i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi + \frac{1}{2}i\overline{\psi}\rho_0\partial_1\psi + \frac{1}{2}i\overline{\psi}\rho_1\partial_0\psi\end{aligned}$$

なので、ボソン部分は

$$\partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu + \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu - 2\partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu = \partial_0 X^\mu(\partial_0-\partial_1)X_\mu + \partial_1 X^\mu(\partial_1-\partial_0)X_\mu = 4\partial_- X^\mu \partial_- X_\mu$$

フェルミオン部分は

$$
\begin{aligned}
i\overline{\psi}\rho_0\partial_0\psi + i\overline{\psi}\rho_1\partial_1\psi - i\overline{\psi}\rho_0\partial_1\psi - i\overline{\psi}\rho_1\partial_0\psi =& -i\overline{\psi}\rho^0\partial_0\psi + i\overline{\psi}\rho^1\partial_1\psi + i\overline{\psi}\rho^0\partial_1\psi - i\overline{\psi}\rho^1\partial_0\psi \\
=& -i\overline{\psi}\rho^0\partial_0\psi + i\overline{\psi}\rho^0\partial_1\psi + i\overline{\psi}\rho^1\partial_1\psi - i\overline{\psi}\rho^1\partial_0\psi \\
=& -i\overline{\psi}\rho^0(\partial_0-\partial_1)\psi + i\overline{\psi}\rho^1(\partial_1-\partial_0)\psi \\
=& -2i\psi^T\partial_-\psi - 2i\psi^T\rho^0\rho^1\partial_-\psi \\
=& -2i\psi^T\partial_-\psi - 2i\psi^T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\partial_-\psi \\
=& 2i\psi^T\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_-\psi \\
=& -4i\psi_-\partial_-\psi_-
\end{aligned}
$$

よって

$$
T_{00}+T_{11}-2T_{01} = 4\partial_-X^\mu\partial_-X_\mu + 2i\psi_-\partial_-\psi_-
$$

から

$$
T_{--} = \frac{1}{4}(T_{00}+T_{11}-2T_{01}) = \partial_-X^\mu\partial_-X_\mu + \frac{1}{2}i\psi_-\partial_-\psi_-
$$

というわけで、光円錐座標でのエネルギー・運動量テンソルは

$$
\begin{aligned}
&T_{++} = \partial_+X^\mu\partial_+X_\mu + \frac{1}{2}i\psi_+\partial_+\psi_+ \\
&T_{--} = \partial_-X^\mu\partial_-X_\mu + \frac{1}{2}i\psi_-\partial_-\psi_- \\
&T_{+-} = T_{-+} = 0
\end{aligned}
$$

となります。

最後に演算子化したときの反交換関係を出しておきます。まず、作用での T_0 を決めて、よく見る反交換関係の形にします。ボソンの作用を

$$
S_B = -\frac{T_0}{2}\int d\tau d\sigma\ \partial_aX^\mu\partial^aX_\mu = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\ \partial_aX^\mu\partial^aX_\mu = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\ \frac{1}{2\alpha'}\partial_aX^\mu\partial^aX_\mu
$$

と変形させて、これにフェルミオン項を加えるとして

$$
S = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\ (\frac{1}{2\alpha'}\partial_aX^\mu\partial^aX_\mu - i\overline{\psi}^\mu\rho^a\partial_a\psi_\mu)
$$

こうすればフェルミオン項に T_0 が入ってきません (スピノールの次元が変更される)。しかし、これだと α' が超対称変換の中に入ってきて煩わしいので、$\alpha' = 1/2$ として

$$
S = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\ (\partial_aX^\mu\partial^aX_\mu - i\overline{\psi}^\mu\rho^a\partial_a\psi_\mu)
$$

簡単に言えば、$T_0=1/\pi$ としただけです。張力は自然単位系では、質量次元で 2 なので (質量の次元を M とすれば M^2)、このズレは X^μ に吸収させます (X^μ は M^{-1} の次元を持っていたので無次元になる)。
　このようにすると、スピノール ψ^μ の共役量が

$$\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\dot{\psi}^\mu}=\frac{i}{2\pi}\overline{\psi}_\mu\rho^0=\frac{i}{2\pi}\psi^\dagger_\mu=\frac{i}{2\pi}\psi^T_\mu$$

と求まります (マヨラナスピノールなので $\psi^\dagger=\psi^T$)。ここでの $\mathcal{L}_F$ はエネルギー・運動量テンソルの定義に合わせたものでなく、運動方程式を求めたのと同じ

$$\mathcal{L}_F=\frac{1}{2\pi}i\overline{\psi}^\mu\rho^a\partial_a\psi_\mu$$

としています。フェルミオンでは同時刻反交換関係を作るので、ψ^μ_A と ψ^ν_B を演算子として反交換関係を

$$\{\psi^\mu_A(\tau,\sigma),\psi^\nu_B(\tau,\sigma')\}=\pi\delta_{AB}\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')$$

とします。$\psi_\pm$ で書けば

$$\{\psi^\mu_\pm(\tau,\sigma),\psi^\nu_\pm(\tau,\sigma')\}=\pi\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')\ ,\ \{\psi^\mu_\pm(\tau,\sigma),\psi^\nu_\mp(\tau,\sigma')\}=0$$

これに開弦として R 境界条件で展開した (9a),(9b) を入れれば

$$\begin{aligned}\{\psi^\mu_+(\tau,\sigma),\psi^\nu_+(\tau,\sigma')\}&=\frac{1}{2}\sum_{m,n}\left(d^\mu_nd^\nu_me^{-in(\tau-\sigma)}e^{-im(\tau-\sigma')}+d^\nu_md^\mu_ne^{-in(\tau-\sigma)}e^{-im(\tau-\sigma')}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{m,n}(d^\mu_nd^\nu_m+d^\nu_md^\mu_n)e^{-i(m+n)\tau}e^{in\sigma}e^{im\sigma'}\end{aligned}$$

このとき

$$\{d^\mu_n,d^\nu_m\}=\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}$$

となっているなら

$$\begin{aligned}\{\psi^\mu_+(\tau,\sigma),\psi^\nu_+(\tau,\sigma')\}&=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_{m,n}\delta_{m+n,0}e^{-i(m+n)\tau}e^{in\sigma}e^{im\sigma'}\\&=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_ne^{in\sigma}e^{-in\sigma'}\\&=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\sum_ne^{in(\sigma-\sigma')}\\&=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}2\pi\delta(\sigma-\sigma')\\&=\pi\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')\end{aligned}$$

となって、ψ の反交換関係を満たせます。NS 境界条件の場合でも同じなので、R 境界条件と NS 境界条件での展開係数による反交換関係は

$$
\{d_n^\mu, d_m^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}
$$

$$
\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s,0}
$$

と与えられます。