光円錐ゲージでの閉弦の量子化

開弦を閉弦に変更して光円錐ゲージでの量子化を見ていきます。開弦と閉弦の物理的な違いは別のところにまわして代数関係を求めます。
周期的境界条件と σ の範囲が $0\sim 2\pi$ になるだけなので基本的に開弦のときと変わりません。実際に、展開係数の交換関係はほぼ同じです。

開弦から変更される状況を見ておきます。「弦のゲージ固定」で触れたように閉弦でのゲージ固定は、σ の範囲を $0\sim 2\pi$ に取ることで

$$n\cdot X=\alpha'(n\cdot p)\tau\ ,\ n\cdot p=2\pi n\cdot P^{\tau}$$

と与え、X^μ には

$$(\dot{X}^\mu\pm X^{\mu\prime})^2=0\qquad(\dot{X}^\mu=\frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial\tau}\ ,\ X^{\mu\prime}=\frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial\sigma})$$

という拘束条件を与えます。光円錐座標

$$X^\mu=(X^+,X^-,X^2,\ldots,X^d)$$

$$X^+=\frac{X^0+X^1}{\sqrt{2}}\ ,\ X^-=\frac{X^0-X^1}{\sqrt{2}}$$

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0&\cdots\\-1&0&0&0&\cdots\\0&0&1&0&\cdots\\0&0&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

$$n_\mu=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\ldots,0)$$

ではパラメータの条件は

$$X^+=\alpha'p^+\tau\ ,\ p^+\sigma=2\pi\int_0^\sigma d\sigma'P^{\tau+}(\tau,\sigma')$$

X^+ の式を拘束条件

$$(\dot{X}\pm X')^2=-2(\dot{X}^+\pm X^{+\prime})(\dot{X}^-\pm X^{-\prime})+(\dot{X}^I\pm X^{I\prime})^2=0$$

に入れれば

$$2\alpha'p^+(\dot{X}^-\pm X^{-\prime})=(\dot{X}^I\pm X^{I\prime})^2$$

$$\dot{X}^-\pm X^{-\prime}=\frac{1}{2\alpha'p^+}(\dot{X}^I\pm X^{I\prime})^2$$

もしくは $\dot{X}^2+X'^2=0$ と $\dot{X}\cdot X'=0$ から

$$2\alpha' p^+ \dot{X}^- = (\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2$$

$$\alpha' p^+ X^{-\prime} = \dot{X}^I \cdot X^{I\prime}$$

閉弦の方程式の解を求めます。パラメータの選択によって弦の方程式は波動方程式の形になっており

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}X^\mu = \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}X^\mu$$

これに周期的境界条件

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+2\pi)$$

を与えて解きます。波動方程式の解の形は

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X_L^\mu(\tau+\sigma) + X_R^\mu(\tau-\sigma) = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v)$$

とします。L と R は波の進行方向の左右を表しています。これに周期的境界条件を入れると

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) = X_L^\mu(u+2\pi) + X_R^\mu(v-2\pi)$$

u と v は独立なので、X^μ を u,v 微分すれば $\partial X_L^\mu/\partial u, \partial X_R^\mu/\partial v$ を取り出せます。その式から、これらはそれぞれ 2π の周期を持っていることが分かるので、開弦のときと同じようにフーリエ級数によって

$$\frac{\partial X_L^\mu(u)}{\partial u} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_n \overline{\alpha}_n^\mu e^{-inu} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\overline{\alpha}_n^\mu e^{-inu}$$

$$\frac{\partial X_R^\mu(v)}{\partial v} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_n \alpha_n^\mu e^{-inv} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu e^{-inv}$$

展開係数は同じとは限らないので $\alpha, \overline{\alpha}$ と区別しています。それぞれ積分して

$$X_L^\mu(u) = \frac{1}{2}x_L^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\overline{\alpha}_0^\mu u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\overline{\alpha}_n^\mu e^{-inu}$$

$$X_R^\mu(v) = \frac{1}{2}x_R^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-inv}$$

$x_{L,R}^\mu$ は積分定数です。よって

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(x_L^\mu + x_R^\mu) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\overline{\alpha}_0^\mu u + \alpha_0^\mu v) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-inu} + \alpha_n^\mu e^{-inv})$$

周期的境界条件から

$$\frac{1}{2}(x_L^\mu + x_R^\mu) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\overline{\alpha}_0^\mu u + \alpha_0^\mu v) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-inu} + \alpha_n^\mu e^{-inv})$$

$$= \frac{1}{2}(x_L^\mu + x_R^\mu) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\big(\overline{\alpha}_0^\mu (u+2\pi) + \alpha_0^\mu (v-2\pi)\big) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in(u+2\pi)} + \alpha_n^\mu e^{-in(v-2\pi)})$$

$$= \frac{1}{2}(x_L^\mu + x_R^\mu) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\big(\overline{\alpha}_0^\mu u + \alpha_0^\mu v + 2\pi(\overline{\alpha}_0^\mu - \alpha_0^\mu)\big) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-inu} + \alpha_n^\mu e^{-inv})$$

これの第 2 項から $\alpha_n^\mu, \overline{\alpha}_n^\mu$ は $n=0$ のとき

$$\overline{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$$

となっている必要があることが分かります。よって $X^\mu(\tau,\sigma)$ は

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(x_L^\mu + x_R^\mu) + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{+in\sigma})e^{-in\tau}$$

また、x_L^μ, x_R^μ は積分定数なので $x_L^\mu = x_R^\mu = x_0^\mu$ として

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{+in\sigma})e^{-in\tau}$$

開弦と同じように α_0^μ は運動量と関係しています。共役運動量 P_μ^τ は

$$P_\mu^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\partial X_\mu}{\partial\tau} = \frac{1}{2\pi\alpha'}(\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{+in\sigma})e^{-in\tau})$$

となっているので

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} P^{\tau\mu} d\sigma$$

を計算すると (閉弦なので上限が 2π に変更される)、p^μ と α_0^μ が

$$\begin{aligned}
p^\mu = \int_0^{2\pi} P^{\tau\mu} d\sigma &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} d\sigma(\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{+in\sigma})e^{-in\tau}) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\int_0^{2\pi} d\sigma + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}e^{-in\tau}\int_0^{2\pi} d\sigma(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{+in\sigma}) \\
&= \frac{1}{\alpha'}\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}e^{-in\tau}[\overline{\alpha}_n^\mu\frac{i}{n}e^{-in\sigma} - \alpha_n^\mu\frac{i}{n}e^{+in\sigma}]_0^{2\pi} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0^\mu
\end{aligned}$$

という関係になっていることが分かります。これらの結果を光円錐座標にするには添え字の μ を光円錐座標のものに変えればいいです。

光円錐座標でのハミルトニアンを出す前に記号の定義を与えておきます。求まった X^μ から $\dot{X}^\mu$ と $X^{\mu\prime}$ は

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{+in\sigma})e^{-in\tau} \tag{1}$$

$$X^{\mu\prime} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}(\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} - \alpha_n^\mu e^{+in\sigma})e^{-in\tau} \tag{2}$$

なので和と差は

$$\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime} = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\overline{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}e^{-in\tau} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \overline{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{3}$$

$$\dot{X}^\mu - X^{\mu\prime} = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu e^{+in\sigma}e^{-in\tau} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \tag{4}$$

ここで、開弦と同じように展開係数から

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_m^I \alpha_{n-m}^I \ , \ \overline{L}_n = \frac{1}{2}\sum_m \overline{\alpha}_m^I \overline{\alpha}_{n-m}^I$$

というのを定義します (古典的な量)。今は展開係数が 2 つあるので、それぞれに対して定義します。そうすると、拘束条件

$$\dot{X}^- \pm X^{-\prime} = \frac{1}{2\alpha' p^+}(\dot{X}^I \pm X^{I\prime})^2$$

の右辺は

$$\begin{aligned}
(\dot{X}^I + X^{I\prime})^2 &= 2\alpha'\sum_{m,n}\overline{\alpha}_n^I\overline{\alpha}_m^I e^{-in(\tau+\sigma)}e^{-im(\tau+\sigma)} \\
&= 2\alpha'\sum_{m,n}\overline{\alpha}_n^I\overline{\alpha}_m^I e^{-i(m+n)(\tau+\sigma)} \\
&= 2\alpha'\sum_{l,m}\overline{\alpha}_n^I\overline{\alpha}_{l-n}^I e^{-il(\tau+\sigma)} \\
&= 2\alpha'\sum_n\sum_m\overline{\alpha}_m^I\overline{\alpha}_{n-m}^I e^{-in(\tau+\sigma)} \\
&= 4\alpha'\sum_n \overline{L}_n e^{-in(\tau+\sigma)}
\end{aligned}$$

$\dot{X}^- + X^{-\prime}$ は $\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime}$ のマイナス成分なので

$$\dot{X}^- + X^{-\prime} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \overline{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)}$$

よって

$$\sqrt{2\alpha'}\sum_n \overline{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)} = \frac{4\alpha'}{2\alpha' p^+}\sum_n \overline{L}_n e^{-in(\tau+\sigma)}$$

となって $\overline{L}_n$ と $\overline{\alpha}_n^-$ の関係

$$\overline{L}_n = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^+\overline{\alpha}_n^-$$

同様に L_n と α_n^- の関係

$$L_n = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^+\alpha_n^-$$

そして、$\alpha_0^- = \overline{\alpha}_0^-$ なので

$$L_0 = \overline{L}_0$$

といった関係が求まります。$\alpha_0^\mu = \overline{\alpha}_0^\mu$ や $L_0 = \overline{L}_0$ は level-matching 条件と呼ばれます。
　古典的なラグランジアン密度とハミルトニアンはポリヤコフ作用で共形ゲージを取ることで (「光円錐ゲージでの開弦の量子化」参照)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^+\dot{X}^- + \frac{1}{4\pi\alpha'}\big(\dot{X}^I\dot{X}^I - X'^I X'^I\big)$$
$$H = \pi\alpha'\int_0^{2\pi} d\sigma(\Pi^I\Pi^I + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2}X'^I X'^I)$$

これは開弦、閉弦とは関係なしに求まるものなので変更されません。しかし、パラメータの条件 (拘束条件) を使って書き換えると係数の違いを受けます。X_-, X^I の共役量 Π^-, Π_I ($\Pi^\mu = P^{\tau\mu}$) は

$$\Pi^- = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_-} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\partial}{\partial\dot{X}_-}(\dot{X}^+\dot{X}^-) = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\partial}{\partial\dot{X}_-}(\eta^{+-}\dot{X}_-\dot{X}^-) = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^-$$
$$\Pi_I = \Pi^I = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^I} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^I$$

$\dot{X}^-$ は拘束条件から

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha' p^+}((\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2)$$

なので

$$\begin{aligned}\Pi^- &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{1}{2\alpha' p^+}((\dot{X}^I)^2 + (X^{I\prime})^2)\\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{1}{2\alpha' p^+}((2\pi\alpha')^2(\Pi^I)^2 + (X^{I\prime})^2)\\ &= \frac{\pi}{p^+}((\Pi^I)^2 + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2}(X^{I\prime})^2)\end{aligned}$$

よって、ハミルトニアンは

$$H = \alpha' p^+ \int_0^{2\pi} d\sigma \Pi^- = \alpha' p^+ p^-$$

閉弦では開弦の場合から係数 2 がなくなります (「Virasoro 代数」参照)。開弦と同じように、$L_0, \overline{L}_0$ を使ってハミルトニアンを書くことが出来ます。α_0^- と $\overline{\alpha}_0^-$ が

$$\alpha_0^- = \overline{\alpha}_0^- = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^-$$

であることを使えば

$$L_0 + \overline{L}_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^+ \alpha_0^- = \alpha' p^+ p^-$$

よって、ハミルトニアンは L_0 と $\overline{L}_0$ の和

$$H = L_0 + \overline{L}_0$$

になっています。

古典的な話は終わりにして量子化に移ります。閉弦としたことの影響は周期的境界条件の元で解いた解の形と拘束条件に表れているだけで、大元のハミルトニアンは変更されていないので、状況は開弦のときと変わっていません。というわけで、光円錐座標での 0 にならない同時刻交換関係は開弦と同じように $(I = 2, \ldots, d)$

$$[x_0^-, p^+] = i\eta^{+-} = -i$$

$$[X^I(\tau, \sigma), \Pi^J(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$$

と設定すればいいです。他の交換関係は 0 です。ここでも同時刻交換関係では τ を省いて書きます。

展開係数 $\alpha_n^I, \overline{\alpha}_n^I$ の交換関係を求めます。$\dot{X}^I(\sigma) \pm X'^I(\sigma)$ の同時刻交換関係は (X^I と Π^I の交換関係から出てくるので開弦から変更されない)

$$[\dot{X}^I(\sigma) \pm X'^I(\sigma), \dot{X}^J(\sigma') \pm X'^J(\sigma')] = \pm 4i\pi\alpha' \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (5)$$

(3),(4) から、プラスでは $\overline{\alpha}_n^I$、マイナスでは α_n^I で、σ, σ' の範囲は $0 \sim 2\pi$ です。これから予想できるように、α_n^μ と $\overline{\alpha}_n^\mu$ の交換関係も開弦と同じ形になります (開弦のときと同じ手順で求まる)。$\overline{\alpha}_n^\mu$ でも同様なので α_n^μ でやります。(5) の左辺は

$$[\dot{X}^I(\sigma) - X^{I\prime}(\sigma), \dot{X}^J(\sigma') - X^{J\prime}(\sigma')] = 2\alpha' \sum_{m,n} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] e^{-im(\tau-\sigma)} e^{-in(\tau-\sigma')}$$

これに $e^{-im_1\sigma} e^{-in_1\sigma'}$ をかけて積分すると

$$
\begin{aligned}
&2\alpha'\int_0^{2\pi}d\sigma d\sigma'\sum_{m,n}[\alpha_m^I,\alpha_n^J]e^{-i(m+n)\tau}e^{im\sigma}e^{in\sigma'}e^{-im_1\sigma}e^{-in_1\sigma'}\\
&=2\alpha'\sum_{m,n}[\alpha_m^I,\alpha_n^J]e^{-i(m+n)\tau}\int_0^{2\pi}d\sigma e^{im\sigma}e^{-im_1\sigma}\int_0^{2\pi}d\sigma' e^{in\sigma'}e^{-in_1\sigma'}\\
&=2\alpha'(2\pi)^2\sum_{m,n}[\alpha_m^I,\alpha_n^J]e^{-i(m+n)\tau}\delta_{mm_1}\delta_{nn_1}\\
&=2\alpha'(2\pi)^2[\alpha_{m_1}^I,\alpha_{n_1}^J]e^{-i(m_1+n_1)\tau}
\end{aligned}
$$

(5) の右辺は

$$
\begin{aligned}
-4i\pi\alpha'\eta^{IJ}&\int_0^{2\pi}d\sigma d\sigma' e^{-im_1\sigma}e^{-in_1\sigma'}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma')\\
&=\ -4i\pi\alpha'\eta^{IJ}\int_0^{2\pi}d\sigma' e^{-in_1\sigma'}\int_0^{2\pi}d\sigma e^{-im_1\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma')\\
&=4i\pi\alpha'\eta^{IJ}m_1\int_0^{2\pi}d\sigma' e^{-in_1\sigma'}\frac{\partial}{\partial\sigma'}e^{-im_1\sigma'}\\
&=4\pi\alpha'\eta^{IJ}m_1\int_0^{2\pi}d\sigma' e^{-i(m_1+n_1)\sigma'}\\
&=2\alpha'(2\pi)^2m_1\eta^{IJ}\delta_{m_1+n_1,0}
\end{aligned}
$$

よって開弦のときと同じになり、$\overline{\alpha}_n^I$ でも同様なので、結局

$$
[\alpha_m^I,\alpha_n^J]=m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}\ ,\ [\overline{\alpha}_m^I,\overline{\alpha}_n^J]=m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}
$$

となります。α_m^I と $\overline{\alpha}_m^I$ の交換関係は

$$
[\dot{X}^I(\sigma)+X'^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')-X'^J(\sigma')]=0
$$

から出てくるので

$$
[\alpha_m^I,\overline{\alpha}_n^J]=0
$$

x_0^I との交換関係も開弦と同じ手順で求まります。まず、X^I を σ 積分して

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}d\sigma X^I(\tau,\sigma)=&\int_0^{2\pi}d\sigma\big[x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq0}\frac{1}{n}(\overline{\alpha}_n^Ie^{-in\sigma}+\alpha_n^Ie^{+in\sigma})e^{-in\tau}\big]\\
&=2\pi x_0^I+2\pi\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau
\end{aligned}
$$

X^I と $\dot{X}^I$ の交換関係は開弦で出したものと同じで

$$
[X^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')]=2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')
$$

同じになるのは $\dot{X}^I$ は開弦、閉弦の区別なしに

$$\dot{X}^I(\tau,\sigma) = -i[X^I,H] = -i[X^I(\sigma),\int d\sigma(\pi\alpha'(\Pi^J(\sigma'))^2+\frac{1}{4\pi\alpha'}(X^{J\prime}(\sigma'))^2)]$$
$$= 2\pi\alpha'\Pi^I(\tau,\sigma)$$

となっているからです。なので、交換関係を σ 積分すると

$$\int_0^{2\pi} d\sigma[X^I(\sigma),\dot{X}^J(\sigma')] = 2i\pi\alpha'\eta^{IJ}\int_0^{2\pi} d\sigma\delta(\sigma-\sigma')$$
$$[x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau,\dot{X}^J(\sigma')] = i\alpha'\eta^{IJ} \tag{6}$$

これに $\dot{X}^I$ の形 (1) を入れて、$[\alpha_0^I,\alpha_n^J]=0,\ [\alpha_0^I,\overline{\alpha}_n^J]=0$ なので α_0^I と $\dot{X}^I$ が交換することを使えば

$$[x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau,\dot{X}^J(\sigma')]$$
$$= \sum_n\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\sigma'}e^{-in\tau}+\sum_n\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[x_0^I,\alpha_n^J]e^{+in\sigma'}e^{-in\tau}$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\big([x_0^I,\overline{\alpha}_0^J]+[x_0^I,\alpha_0^J]+\sum_{n\neq0}[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\sigma'}e^{-in\tau}+\sum_{n\neq0}[x_0^I,\alpha_n^J]e^{+in\sigma'}e^{-in\tau}\big) \tag{7}$$

これを $0\sim2\pi$ の範囲で σ' 積分すれば、第三項と第四項は落ちるので

$$2\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[x_0^I,\overline{\alpha}_0^J] = i\alpha'\eta^{IJ}$$

よって $\overline{\alpha}_0^I=\alpha_0^I$ より

$$[x_0^I,\alpha_0^J] = [x_0^I,\overline{\alpha}_0^J] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\eta^{IJ}$$

これは開弦のときと右辺のルート部分が違っています。

α_n^J $(n\neq0)$ との場合は (7) の第三項と第四項を変形して

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\sigma}e^{-in\tau}+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}[x_0^I,\alpha_n^J]e^{+in\sigma}e^{-in\tau}\\
&=\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\sigma}e^{-in\tau}+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=-\infty}^{-1}[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\sigma}e^{-in\tau}\\
&\quad+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}[x_0^I,\alpha_n^J]e^{+in\sigma}e^{-in\tau}+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=-\infty}^{1}[x_0^I,\alpha_n^J]e^{+in\sigma}e^{-in\tau}\\
&=\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\sigma}e^{-in\tau}+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}[x_0^I,\overline{\alpha}_{-n}^J]e^{+in\sigma}e^{+in\tau}\\
&\quad+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}[x_0^I,\alpha_n^J]e^{+in\sigma}e^{-in\tau}+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}[x_0^I,\alpha_{-n}^J]e^{-in\sigma}e^{+in\tau}\\
&=\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\big([x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\sigma}+[x_0^I,\alpha_n^J]e^{in\sigma}\big)e^{-in\tau}\\
&\quad+\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\big([x_0^I,\overline{\alpha}_{-n}^J]e^{in\sigma}+[x_0^I,\alpha_{-n}^J]e^{-in\sigma}\big)e^{in\tau}
\end{aligned}
$$

ここで、$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$ と $\cos nx$ と $\cos nx\sin mx$ $(n,m$ は整数) は $0\sim 2\pi$ の範囲で積分すると 0 になることから、(6) に $\cos m\sigma$ をかけて $0\sim 2\pi$ の範囲で積分すると、右辺は消え、左辺は開弦のときと同じになるので ($\cos nx\cos mx$ は $n=m$ で値を持つ)

$$
[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]e^{-in\tau}+[x_0^I,\alpha_n^J]e^{-in\tau}=-[x_0^I,\overline{\alpha}_{-n}^J]e^{in\tau}-[x_0^I,\alpha_{-n}^J]e^{in\tau}
$$

これが任意の τ で成立するには各交換関係が 0 になっている必要があるので

$$
[x_0^I,\alpha_n^J]=[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]=0\quad(n\neq 0)
$$

となります。
　まとめると

$$
\begin{aligned}
&[\alpha_m^I,\alpha_n^J]=[\overline{\alpha}_m^I,\overline{\alpha}_n^J]=m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}\\
&[\alpha_m^I,\overline{\alpha}_n^J]=0\\
&[x_0^I,\alpha_0^J]=[x_0^I,\overline{\alpha}_0^J]=i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\eta^{IJ}\\
&[x_0^I,\alpha_n^J]=[x_0^I,\overline{\alpha}_n^J]=0\quad(n\neq 0)
\end{aligned}
$$

x_0^I の交換関係だけが異なっています。また $n\geq 1$ として

$$
\alpha_n^I=\sqrt{n}a_n^I\ ,\ \overline{\alpha}_n^I=\sqrt{n}\overline{a}_n^I
$$
$$
\alpha_{-n}^I=\sqrt{n}(a_n^I)^\dagger\ ,\ \overline{\alpha}_{-n}^I=\sqrt{n}(\overline{a}_n^I)^\dagger
$$

と定義することで

$$[a_m^I, (a_n^J)^\dagger] = [\overline{a}_m^I, (\overline{a}_n^J)^\dagger] = \delta_{mn}\eta^{IJ}$$

となります。
　上で定義した

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_m^I \alpha_{n-m}^I \ , \ \overline{L}_n = \frac{1}{2}\sum_m \overline{\alpha}_m^I \overline{\alpha}_{n-m}^I$$

は開弦と同じ格好をしているので、同じことをすればいいです。古典的なハミルトニアン

$$H = \alpha' p^+ p^- = L_0 + \overline{L}_0 = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_m^I \alpha_{-m}^I + \frac{1}{2}\sum_m \overline{\alpha}_m^I \overline{\alpha}_{-m}^I$$

を $L_0, \overline{L}_0$ は右に消滅演算子 α_m^I $(m \geq 1)$ がくるように書き換えます。なので、Virasoro 演算子は

$$\begin{aligned}
\sum_m \alpha_m^I \alpha_{-m}^I &= \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{m>0} \alpha_m^I \alpha_{-m}^I + \sum_{m<0} \alpha_m^I \alpha_{-m}^I \\
&= \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{m>0} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^I + [\alpha_m^I, \alpha_{-m}^I]) + \sum_{m>0} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I \\
&= \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{m>0} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^I + \eta^{II} m) + \sum_{m>0} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I \\
&= \alpha_0^I \alpha_0^I + 2\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I + (D-2)\sum_{m=1}^{\infty} m
\end{aligned}$$

から、正規積によって

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_m : \alpha_m^I \alpha_{-m}^I := \frac{1}{2}\alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I$$

$$\overline{L}_0 = \frac{1}{2}\sum_m : \overline{\alpha}_m^I \overline{\alpha}_{-m}^I := \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0^I \overline{\alpha}_0^I + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\alpha}_{-m}^I \overline{\alpha}_m^I$$

このように、ハミルトニアン演算子は開弦の場合に $\overline{\alpha}_n^I$ の項がくっつくだけです。Virasoro 演算子と $p^\pm$ の関係は

$$\alpha' p^+ p^- = L_0 - a + \overline{L}_0 - a \qquad \left(a = -\frac{1}{2}(D-2)\sum_{m=1}^{\infty} m\right)$$

となります。
　$\alpha_n^I, \overline{\alpha}_n^I$ の交換関係も開弦のときと同じであるために、途中計算で変更される部分がないので $L_n, \overline{L}_n$ と $\alpha_n^I, \overline{\alpha}_n^I$ の交換関係は、$L_0, \overline{L}_0$ は正規積になっているとして

$$[L_n, \alpha_m^J] = -m\alpha_{n+m}^J \ , \ [\overline{L}_n, \overline{\alpha}_m^J] = -m\overline{\alpha}_{n+m}^J \ , \ [L_n, \overline{\alpha}_m^J] = [\overline{L}_n, \alpha_m^J] = 0$$

α_m^J と $\overline{\alpha}_m^J$ は交換するので 0 になります。x_0^I とは $[\alpha_0^I, x_0^J]$ の交換関係が開弦から変更されるために係数が変わって

$$[L_n, x_0^J] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\eta^{IJ}\alpha_n^I \ , \ [\overline{L}_n, x_0^J] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\eta^{IJ}\overline{\alpha}_n^I$$

よって、L_n と α_m^J の交換関係が変更されないので、$L_n, \overline{L}_n$ は Virasoro 代数を満たします。このように、$L_n, \overline{L}_n$ はそれぞれが開弦での L_n と同じ構造を持っています。また、level-matching 条件 $L_0 = \overline{L}_0$ のために物理的な状態 $|\psi>$ に対する条件は ($L_0, \overline{L}_0$ は正規積)

$$(L_0 - a)|\psi >= (\overline{L}_0 - a)|\psi >= 0$$

次元 D と a は閉弦でもローレンツ不変性の要求から、$D = 26, a = 1$ で固定されます。$L_n, \overline{L}_n$ の構造が開弦と同じなので閉弦でもローレンツ不変性の要求から、$D = 26, a = 1$ になると予想できます。具体的にローレンツ変換の生成子の交換関係は、生成子 $M^{\mu\nu}$ が開弦の場合に $\overline{\alpha}_n$ の項がくっつくだけなので、計算結果も

$$\begin{aligned}
[M^{-I}, M^{-J}] \sim & \sum_m (m(1 - \frac{D-2}{24}) + \frac{1}{m}(\frac{D-2}{24} - a))(\alpha_{-m}^I\alpha_m^J - \alpha_{-m}^J\alpha_m^I) \\
& + \sum_m (m(1 - \frac{D-2}{24}) + \frac{1}{m}(\frac{D-2}{24} - a))(\overline{\alpha}_{-m}^I\overline{\alpha}_m^J - \overline{\alpha}_{-m}^J\overline{\alpha}_m^I)
\end{aligned}$$

のように出てきます。なので、$D = 26, a = 1$ でローレンツ不変になります。

$\alpha_n^I, \overline{\alpha}_n^I$ は開弦と同じ交換関係を持っているために粒子数演算子も

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^I\alpha_n^I = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger}a_n^I \ , \ \overline{N} = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha}_{-n}^I\overline{\alpha}_n^I = \sum_{n=1}^{\infty} n\overline{a}_n^{I\dagger}\overline{a}_n^I$$

と定義できます。質量演算子は粒子数演算子によって

$$\begin{aligned}
M^2 = & -p^2 \\
= & \ 2p^+p^- - p^Ip^I \\
= & \ \frac{2}{\alpha'}(L_0 - a + \overline{L}_0 - a) - p^Ip^I \\
= & \ \frac{2}{\alpha'}(\frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I - a + \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0^I\overline{\alpha}_0^I + \sum_{m=1}^{\infty}\overline{\alpha}_{-m}^I\overline{\alpha}_m^I - a) - p^Ip^I \\
= & \ \frac{2}{\alpha'}(N + \overline{N} - 2a) + \frac{2}{\alpha'}\alpha_0^I\alpha_0^I - p^Ip^I \\
= & \ \frac{2}{\alpha'}(N + \overline{N} - 2a) + p^Ip^I - p^Ip^I \quad (\alpha_0^I = \overline{\alpha}_0^I = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^I) \\
= & \ \frac{2}{\alpha'}(N + \overline{N} - 2a)
\end{aligned}$$

このとき level-matching 条件 $L_0 = \overline{L}_0$ から粒子数演算子が

$$\frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I = \frac{1}{2}\overline{\alpha}_0^I\overline{\alpha}_0^I + \sum_{m=1}^{\infty}\overline{\alpha}_{-m}^I\overline{\alpha}_m^I$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I = \sum_{m=1}^{\infty}\overline{\alpha}_{-m}^I\overline{\alpha}_m^I$$

$$N = \overline{N}$$

となっていることを使えば

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-a)$$

となります。よって、閉弦でも基底状態 $(N=0)$ は $M^2 = -4/\alpha' < 0$ を持つのでタキオンになっています。