Virasoro 代数

弦での有名な Virasoro 代数を求めます。ついでに光円錐ゲージでのローレンツ不変性がどうなっているのかも見ます。
開弦を使います。

　光円錐ゲージでの開弦の量子化ができたので、演算子の関係を調べます。交換関係は光円錐ゲージでの X^I の展開

$$X^I(\tau,\sigma)=x_0^I+\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

での展開係数 α_n^I によって

$$[\alpha_m^I,\alpha_n^J]=m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}$$

$$[x_0^I,\alpha_0^J]=i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}$$

$$[x_0^I,\alpha_n^J]=0\quad (n\neq 0)$$

となっています ($\eta^{IJ}=(+1,+1,\ldots)$)。
　古典的なハミルトニアンは

$$H(x,p)=p\dot{x}-L(x,\dot{x})$$

によって作れます。ただし、今は時間の代わりの τ の他に σ がいるので

$$H=\int_0^\pi d\sigma\ \mathcal{H}$$

として、ハミルトニアン密度を使います。ポリヤコフ作用でのラグランジアン

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}T_0\sqrt{-g}g^{ab}\partial_aX^\mu\partial_bX^\nu\eta_{\mu\nu}$$

を使います。光円錐ゲージを使うので、共形ゲージ $g_{ab}=(-1,+1)$ として

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}T_0(-\partial_0X^\mu\partial_0X^\nu+\partial_1X^\mu\partial_1X^\nu)\eta_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}T_0(-\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu+X^{\mu\prime}X^{\nu\prime})\eta_{\mu\nu}$$

このときの $\dot{X}^\mu$ の共役量は

$$\Pi^\mu=P^{\tau\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_\mu}=T_0\dot{X}^\mu$$

と与えられます。これは光円錐座標では

$$\Pi^\pm=T_0\dot{X}^\pm\ ,\ \Pi^I=T_0\dot{X}^I$$

となります。光円錐ゲージは

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$$

と与えられ、これによって拘束条件は

$$4\alpha' p^+ \dot{X}^- = \dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I\prime} X^{I\prime}$$
$$2\alpha' p^+ X^{-\prime} = \dot{X}^I \cdot X^{I\prime}$$

このため Π^- は

$$\begin{aligned}
\Pi^- = T_0 \dot{X}^- = \frac{T_0}{4\alpha' p^+}(\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I\prime} X^{I\prime}) &= \frac{T_0}{4\alpha' p^+}(\frac{1}{T_0^2}\Pi^I \Pi^I + X^{I\prime} X^{I\prime}) \\
&= \frac{1}{4\alpha' p^+}\frac{1}{T_0}(\Pi^I \Pi^I + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X^{I\prime} X^{I\prime}) \\
&= \frac{\pi}{2p^+}(\Pi^I \Pi^I + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X^{I\prime} X^{I\prime}) \quad (T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'})
\end{aligned}$$

というように、Π^I と X^I で書けます。
　光円錐ゲージでの運動方程式は I 成分による波動方程式なので、$\pm$ 成分は作用に必要ありません ($\pm$ 成分はゲージ固定と拘束条件で決まっている)。よって、作用は

$$S = \int d\tau d\sigma \ \mathcal{L} = \frac{1}{2}T_0 \int d\tau d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I\prime} X^{I\prime})$$

とし、ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}T_0(\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I\prime} X^{I\prime})$$

と与えます。このとき、X^I の共役量 Π^I は

$$\Pi^I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^I} = T_0 \dot{X}^I$$

となるので、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
H = \int_0^\pi d\sigma \ \mathcal{H} &= \int_0^\pi d\sigma (\Pi^I \dot{X}^I - \mathcal{L}) \\
&= \int_0^\pi d\sigma (\Pi^I \dot{X}^I - \frac{1}{2}T_0(\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I\prime} X^{I\prime})) \\
&= \int_0^\pi d\sigma (\frac{1}{T_0}\Pi^I \Pi^I - \frac{1}{2}T_0(\frac{1}{T_0^2}\Pi^I \Pi^I - X^{I\prime} X^{I\prime})) \\
&= \int_0^\pi d\sigma (\frac{1}{2T_0}\Pi^I \Pi^I + \frac{1}{2}T_0 X^{I\prime} X^{I\prime}) \\
&= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma (\Pi^I \Pi^I + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X^{\prime I} X^{\prime I}) \quad (T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'})
\end{aligned}$$

となります。また

$$\Pi^- = \frac{\pi}{2p^+}(\Pi^I\Pi^I + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2}X^{I\prime}X^{I\prime})$$

であるので、書き換えると

$$H = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \Pi^- = 2\alpha' p^+ p^-$$

この形は「弦のゲージ固定」の最後で定義した

$$L_n = \sqrt{2\alpha'}p^+\alpha_n^- = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}^I\alpha_m^I$$

この演算子 L_n での $n=0$ である

$$L_0 = 2\alpha' p^+ p^-$$

と同じなので、ハミルトニアンは

$$H = L_0$$

と書けます。演算子 L_n は Virasoro 演算子と呼ばれます。

というわけで、ハミルトニアンを演算子化したときも

$$H = L_0 = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{-m}^I\alpha_m^I$$

という形で出てきます。しかし、α_n^I と α_{-n}^I の交換関係は

$$[\alpha_n^I, \alpha_{-n}^J] = m\eta^{IJ}$$

となっていることから α_n^I と α_{-n}^I が交換しないために、ハミルトニアンでの α_{-m}^I と α_m^I の並びを定義する必要があります。これは L_0 で起きていることで、L_n $(n \neq 0)$ では α_{n-m}^I と α_m^I は交換します。

ハミルトニアンでの和を書き直すと

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I \\
&= \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I + \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{-1}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I \\
&= \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m^I\alpha_{-m}^I
\end{aligned}$$

α_{-m}^I が生成演算子、α_m^I が消滅演算子として使えることと、粒子 (調和振動子) の場合を考えれば、第二項が正しいと思える並びです。第三項を交換関係から

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_m\alpha^I_{-m} &= \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+[\alpha^I_m,\alpha^I_{-m}])\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+m\eta^{II})\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+(D-2)\sum_{m=1}^{\infty}m\end{aligned}$$

D 次元にしているので、η^{II} は $\eta^{22}+\eta^{33}\cdots+\eta^{D-1}\eta^{D-1}$ から $D-2$ です。これを入れると

$$H=L_0=\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m+\frac{1}{2}(D-2)\sum_{m=1}^{\infty}m$$

粒子の場合と同じように考えるなら、定数である第三項を無視してしまえばいいです。しかし、面倒なことがあります。弦の質量 M を、質量殻条件と並進対称性から出てくる保存量である運動量 p_μ によって (古典的な量として)

$$M^2=-p^2$$

と与えると

$$M^2=2p^+p^- - p^Ip^I=\frac{1}{\alpha'}L_0-p^Ip^I \tag{1}$$

となっています。このように質量の中に L_0 がいるので、勝手に定数部分を無視していいのかという問題が出てきます (M^2 は演算子化したとき質量演算子なので固有値は質量)。この定数部分の扱いは後に回して、とりあえず正規積 (正規順序)「: :」を導入して、ハミルトニアンと L_0 を

$$H=L_0=\frac{1}{2}\sum_m :\alpha^I_{n-m}\alpha^I_m: =\frac{1}{2}\alpha^I_0\alpha^I_0+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^I_{-m}\alpha^I_m \tag{2}$$

と定義し (正規積は右側に消滅演算子が来るようにして、余計な定数を抜いたもの)、正規積によって無視される定数を

$$a=-\frac{1}{2}(D-2)\sum_{m=1}^{\infty}m$$

としておきます (正規積による L_0 を L_0-a に置き換えると元に戻る)。ここから特に何も言わない限り L_0 は正規積での (2) を指します。

正規積は和の範囲を区切ることで

$$L_n=\frac{1}{2}\sum_l :\alpha^I_{n-l}\alpha^I_l: =\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}:\alpha^I_{n-l}\alpha^I_l:+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}:\alpha^I_{n-l}\alpha^I_l: =\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}\alpha^I_l\alpha^I_{n-l}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^I_{n-l}\alpha^I_l$$

と書けます。第一項では α^I_l の l がマイナスなので、左側が生成演算子になり、右側が生成演算子か消滅演算子になります。第二項では l がプラスなので、右側が消滅演算子になり、左側が生成演算子か消滅演算子になります。$n\neq 0$ では交換関係から入れ替え可能なので右側を消滅演算子にすることができます。$n=0$ では、第一項では α^I_{n-l} が $n=0$ で l になるので消滅演算子、第二項は l が正なので α^I_l は消滅演算子です。

L_n と展開係数 α_n の交換関係を求めます。α_n^I との交換関係は

$$\begin{aligned}
[L_n, \alpha_m^J] &= [\frac{1}{2}\sum_l :\alpha_{n-l}^I \alpha_l^I :, \alpha_m^J] \\
&= \frac{1}{2}\sum_l [:\alpha_{n-l}^I \alpha_l^I :, \alpha_m^J] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha_{n-l}^I \alpha_l^I, \alpha_m^J] + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}[\alpha_l^I \alpha_{n-l}^I, \alpha_m^J]
\end{aligned}$$

第一項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha_{n-l}^I \alpha_l^I, \alpha_m^J] &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_{n-l}^I[\alpha_l^I, \alpha_m^J] + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha_{n-l}^I, \alpha_m^J]\alpha_l^I \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l\eta^{IJ}\alpha_{n-l}^I \delta_{l+m,0} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(n-l)\eta^{IJ}\alpha_l^I \delta_{n-l+m,0} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l\alpha_{n-l}^J \delta_{l+m,0} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(n-l)\alpha_l^J \delta_{n-l+m,0}
\end{aligned}$$

第二項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}[\alpha_l^I \alpha_{n-l}^I, \alpha_m^J] &= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}\alpha_l^I[\alpha_{n-l}^I, \alpha_m^J] + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}[\alpha_l^I, \alpha_m^J]\alpha_{n-l}^I \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}(n-l)\alpha_l^J \delta_{m+n-l,0} + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0} l\alpha_{n-l}^J \delta_{l+m,0}
\end{aligned}$$

これらから

$$\begin{aligned}
[L_n, \alpha_m^J] &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l\alpha_{n-l}^J \delta_{l+m,0} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(n-l)\alpha_l^J \delta_{n-l+m,0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}(n-l)\alpha_l^J \delta_{m+n-l,0} + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0} l\alpha_{n-l}^J \delta_{l+m,0} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} l\alpha_{n-l}^J \delta_{l+m,0} + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(n-l)\alpha_l^J \delta_{n-l+m,0} \\
&= -\frac{1}{2}m\alpha_{n+m}^J - \frac{1}{2}m\alpha_{n+m}^J \\
&= -m\alpha_{n+m}^J
\end{aligned}$$

よって

$$[L_n, \alpha^J_m] = -m\alpha^J_{n+m}$$

これは $n=0$ でも成立しています。a を含めて一応やっておくと

$$\begin{aligned}
[L_0 - a, \alpha^J_m] &= \frac{1}{2}[\alpha^I_0\alpha^I_0, \alpha^J_m] + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha^I_{-n}\alpha^I_n, \alpha^J_m] - [a, \alpha^J_m] \\
&= \frac{1}{2}\alpha^I_0[\alpha^I_0, \alpha^J_m] + \frac{1}{2}[\alpha^I_0, \alpha^J_m]\alpha^I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^I_{-n}[\alpha^I_n, \alpha^J_m] + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha^I_{-n}, \alpha^J_m]\alpha^I_n \\
&= \sum_{n=-1}^{-\infty}\alpha^I_n[\alpha^I_{-n}, \alpha^J_m] + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha^I_{-n}, \alpha^J_m]\alpha^I_n \\
&= -\sum_{n=-1}^{-\infty}n\alpha^I_n\eta^{IJ}\delta_{-n+m,0} - \sum_{n=1}^{\infty}n\alpha^I_n\eta^{IJ}\delta_{-n+m,0} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\alpha^I_n\eta^{IJ}\delta_{-n+m,0} \\
&= -m\alpha^J_m
\end{aligned}$$

となって同じ交換関係になっています。

x^I_0 とでは

$$\begin{aligned}
[L_n, x^J_0] &= [\frac{1}{2}\sum_l : \alpha^I_{n-l}\alpha^I_l :, x^J_0] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha^I_{n-l}\alpha^I_l, x^J_0] + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}[\alpha^I_l\alpha^I_{n-l}, x^J_0]
\end{aligned}$$

α^I_l と x^J_0 の交換関係は $l=0$ のときだけが 0 でないことを使えば、第一項は $n>0$ では

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha^I_{n-l}\alpha^I_l, x^J_0] &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^I_{n-l}[\alpha^I_l, x^J_0] + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha^I_{n-l}, x^J_0]\alpha^I_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha^I_{n-l}, x^J_0]\alpha^I_l \\
&= -\frac{1}{2}i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}\alpha^I_n
\end{aligned}$$

$n \leq 0$ のときは $n-l \neq 0$ なので 0 になります。第二項は $n \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}[\alpha^I_l\alpha^I_{n-l}, x^J_0] &= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}\alpha^I_l[\alpha^I_{n-l}, x^J_0] + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}[\alpha^I_l, x^J_0]\alpha^I_{n-l} \\
&= -\frac{1}{2}i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}\alpha^I_n - \frac{1}{2}i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}\alpha^I_n \\
&= -i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}\alpha^I_n
\end{aligned}$$

$n>0$ では $[\alpha^I_{n-l}, x^J_0]$ の項が消えます。よって、全ての n に対して

$$[L_n, x^J_0] = i\sqrt{2\alpha'}\alpha^J_n$$

となります。

$[L_m, L_n]$ の交換関係を求めます。交換関係を展開していくと

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}[\alpha^I_l\alpha^I_{m-l}, L_n] + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[\alpha^I_{m-l}\alpha^I_l, L_n] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}(\alpha^I_l[\alpha^I_{m-l}, L_n] + [\alpha^I_l, L_n]\alpha^I_{m-l}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(\alpha^I_{m-l}[\alpha^I_l, L_n] + [\alpha^I_{m-l}, L_n]\alpha^I_l) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}((m-l)\alpha^I_l\alpha^I_{m+n-l} + l\alpha^I_{l+n}\alpha^I_{m-l}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(l\alpha^I_{m-l}\alpha^I_{l+n} + (m-l)\alpha^I_{m+n-l}\alpha^I_l) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}(m-l)\alpha^I_l\alpha^I_{m+n-l} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(m-l)\alpha^I_{m+n-l}\alpha^I_l \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}l\alpha^I_{l+n}\alpha^I_{m-l} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}l\alpha^I_{m-l}\alpha^I_{l+n}
\end{aligned}$$

第三項と第四項の和の添え字を $k=l+n$ と書き換えると

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{0}(m-l)\alpha^I_l\alpha^I_{m+n-l} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(m-l)\alpha^I_{m+n-l}\alpha^I_l \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{n}(k-n)\alpha^I_k\alpha^I_{m+n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\alpha^I_{m+n-k}\alpha^I_k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-k)\alpha^I_k\alpha^I_{m+n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(m-k)\alpha^I_{m+n-k}\alpha^I_k \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{n}(k-n)\alpha^I_k\alpha^I_{m+n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\alpha^I_{m+n-k}\alpha^I_k
\end{aligned}$$

$k=l+n$ なので和の範囲は $+n$ ずれます。$n>0$ とすると

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-k)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(m-k)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{n}(k-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-k)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(m-k)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(m-k)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(k-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(m-k)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(m-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I
\end{aligned}
$$

第四項を除けば m, n の値と無関係に右側が消滅演算子になっています ($n > 0$)。第四項は交換関係から

$$
\sum_{k=1}^{n}(k-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I = \sum_{k=1}^{n}(k-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I + \sum_{k=1}^{n}k(k-n)\eta^{II}\delta_{m+n,0}
$$

と変形すれば

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(m-k)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(m-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k-n)\eta^{II}\delta_{m+n,0} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(m-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(m-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k-n)\eta^{II}\delta_{m+n,0} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-n)\alpha_k^I\alpha_{m+n-k}^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(m-n)\alpha_{m+n-k}^I\alpha_k^I + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k-n)\eta^{II}\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

となって最後の項を除いて右側が消滅演算子になります。第三項の和は

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ ,\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

を使うことで

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n^2(n+1)=-\frac{1}{6}n(n^2-1)$$

よって

$$\begin{aligned}[L_m,L_n]&=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0}(m-n)\alpha^I_k\alpha^I_{m+n-k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(m-n)\alpha^I_{m+n-k}\alpha^I_k-\frac{D-2}{12}n(n^2-1)\delta_{m+n,0}\\&=\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=-\infty}^{0}\alpha^I_k\alpha^I_{m+n-k}+\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^I_{m+n-k}\alpha^I_k+\frac{D-2}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\end{aligned}$$

最後は $m+n=0$ のときに第三項は消えないことから $n=-m$ と置き換えています。$D-2$ は η^{II} からです。$n<0$ でも同様にやると、同じものが出てくるので一般的な結果です。

これは $m+n\neq 0$ とき

$$\begin{aligned}[L_m,L_n]&=\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=-\infty}^{0}\alpha^I_k\alpha^I_{m+n-k}+\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^I_{m+n-k}\alpha^I_k\\&=\frac{1}{2}(m-n)L_{m+n}\end{aligned}$$

$m+n=0$ では

$$\begin{aligned}[L_m,L_n]&=\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=-\infty}^{0}\alpha^I_k\alpha^I_{-k}+\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^I_{-k}\alpha^I_k+\frac{D-2}{12}m(m^2-1)\\&=\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^I_{-k}\alpha^I_k+\frac{1}{2}(m-n)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^I_{-k}\alpha^I_k+\frac{D-2}{12}m(m^2-1)\\&=\frac{1}{2}(m-n)\alpha^I_0\alpha^I_0+(m-n)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^I_{-k}\alpha^I_k+\frac{D-2}{12}m(m^2-1)\\&=(m-n)L_0+\frac{D-2}{12}m(m^2-1)\end{aligned}$$

よって、まとめると

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{D-2}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

この L_n の交換関係を Virasoro 代数と言い、第二項のことを中心項 (central term)、$c = D-2$ を中心電荷 (central charge) と呼びます (日本語の中心項、中心電荷はあまり定着してない気がします)。また、$m+n \neq 0$ で第二項がない場合を Witt 代数と言ったりします。

　また、a を含んでいる

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I + \frac{1}{2}(D-2)\sum_{m=1}^{\infty}m = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I - a$$

のときは、a が定数であるために交換関係の計算途中には全く寄与せず、$m+n=0$ の場合の最後の書き換え時に現れて

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}(m-n)\alpha_0^I\alpha_0^I + (m-n)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k}^I\alpha_k^I + \frac{D-2}{12}m(m^2-1) \\
&= \frac{1}{2}(m-n)\alpha_0^I\alpha_0^I + (m-n)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k}^I\alpha_k^I - (m-n)a + (m-n)a + \frac{D-2}{12}m(m^2-1) \\
&= (m-n)L_0 + (m-n)a + \frac{D-2}{12}m(m^2-1) \\
&= (m-n)L_0 + 2ma + \frac{D-2}{12}m^3 - \frac{D-2}{12}m
\end{aligned}$$

なので、a を含んでいる場合では

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + (\frac{D-2}{12}m^3 + (2a - \frac{D-2}{12})m)\delta_{m+n,0}$$

となります。

　後回しにした a がなんなのか求めます。そのために、弦の基底状態を運動量の固有状態 $|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$ として ($\boldsymbol{p}_T = p^I$)、消滅演算子 $\alpha_n^I = a_n^I\sqrt{n}$ によって

$$\alpha_n^I|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = a_n^I|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = 0 \quad n \geq 1$$

と定義します。質量 M^2 は (1) を書き換えると (ここの L_0 は正規積)

$$\begin{aligned}
M^2 &= \frac{1}{\alpha'}(L_0 - a) - p^Ip^I \\
&= \frac{1}{\alpha'}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I - \frac{1}{\alpha'}a + \frac{1}{2\alpha'}\alpha_0^I\alpha_0^I - p^Ip^I \\
&= \frac{1}{\alpha'}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I - \frac{1}{\alpha'}a + p^Ip^I - p^Ip^I \\
&= \frac{1}{\alpha'}(\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{-m}^I\alpha_m^I - a) \\
&= \frac{1}{\alpha'}(\sum_{m=1}^{\infty}ma_m^{I\dagger}a_m^I - a) \\
&= \frac{1}{\alpha'}(N - a)
\end{aligned}$$

N は調和振動子の粒子数演算子の形に m がくっついているだけなので、N と $a_n^{I\dagger}, a_n^I$ との交換関係は

$$[N, a_n^{I\dagger}] = n a_n^{I\dagger}\ ,\ [N, a_n^I] = -n a_n^I$$

生成演算子の作用している状態に対しては例えば

$$N a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = [N, a_n^{I\dagger}]|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle + a_n^{I\dagger} N|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = n a_n^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

このようにして N の固有値を出せ、この場合では N の固有値は n となります。$|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$ は基底状態なので N が作用すれば 0 です。これも調和振動子と同じです。

基底状態に $n=1$ の生成演算子を 1 つ作用させた

$$a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

という励起状態を考えます。今は I は $2, 3, \dots, D-1$ であるために、状態は $D-2$ 個あります。

ここで D 次元ベクトルに対する回転群を持ち出します。D 次元の質量 m を持った粒子の運動量ベクトル k_μ を静止系に持っていくと $k_\mu = (m, 0, 0, \dots, 0)$ と書けます。これは $D-1$ 次元の回転変換に対して不変です (時間成分しか値を持たないから)。この回転不変性は、ローレンツ変換が持っている $N-1$ 次元回転変換に対応する不変性に対応しています。なので、質量を持った粒子がローレンツ不変であるためには $D-1$ 次元回転による $SO(D-1)$ の群を構成している必要があります。質量が 0 の粒子では、相対論の要求から速度が 0 になれないので、静止系ではエネルギー E によって $k_\mu = (E, 0, 0, E)$ となります。これは $D-2$ 次元の回転変換に対して不変です。なので、質量 0 の場合でローレンツ不変性を持つためには $SO(D-2)$ の群を構成している必要があります。

この話を今の励起状態に当てはめると、$D-2$ 個の成分を持つベクトルを構成していることから、ローレンツ不変であるためには質量が 0 の $M^2 = 0$ である必要があります。よって、ローレンツ不変性を持つためには

$$M^2 a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = 0$$

という条件が必要になります。この条件から

$$M^2 a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(N-a) a_1^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(1-a) a_m^{I\dagger}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = 0$$

このように、ローレンツ不変であるためには $a=1$ でなければいけないことが出てきます。よって、

$$a = -\frac{1}{2}(D-2)\sum_{m=1}^{\infty} m = 1$$

であることになります。

この和を数学の不思議な話を使って求めます。ゼータ関数 $\xi(s)$ は

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}s > 1)$$

と定義されています。これは $s=1$ を除いた全実数に拡張することができ、$s=-1$ のときはベルヌーイ数 B_n によって

$$\xi(-1) = -\frac{B_2}{2}$$

と与えれています。ベルヌーイ数 $B_2 = 1/6$ から

$$\xi(-1) = -\frac{1}{12}$$

となります。これから

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = -\frac{1}{12}$$

という不思議な結果を得ることが出来ます。この結果を使うと

$$a = \frac{1}{24}(D-2)$$

なので、$a=1$ から $D=26$ と求まります。よって、光円錐ゲージで量子化したときローレンツ不変性を保つためには 26 次元で、$a=1$ でなければばいけないことになります。これがよく聞く、弦の次元は 26 というやつです (ボソンの場合)。ちなみに、$a=1$ を質量演算子を $N|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = 0$ の基底状態に作用させたものに入れると

$$M^2|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(N-a)|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'}|p^+, \boldsymbol{p}_T\rangle$$

質量演算子なので、その固有値は質量です。なので、この式から基底状態の質量は虚数になっていることになります。これが開弦でのタキオン (tachyon) です。

状態に対する条件について少し触れておきます。光円錐ゲージを取らずにローレンツ不変性を明確に持っている状況で始めると、弦は拘束系になっているのでゲージ場の場合と同じで、量子化において負のノルムを持つ非物理的な状態 (ゴースト) が出てきます。このときに課す条件として Virasoro 拘束条件というのがあります。これはポリヤコフ作用でのエネルギー・運動量テンソルが 0 になれという条件に対応しているものです。簡単に条件だけを出しておきます。共変な形での交換関係 ($\eta^{\mu\nu} = (-1, +1, +1, \ldots)$)

$$[X^\mu(\tau,\sigma), \Pi^\nu(\tau,\sigma')] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')$$

を使うと、

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

から展開係数に対して

$$[x_0^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}\ ,\ [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}$$

という交換関係が出てきます ($\alpha_m^{\mu\dagger} = \alpha_{-m}^\mu$)。導出は同じなので、光円錐ゲージのときから I が μ に変わるだけです ($\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$)。ゲージを選んでいないために μ になり、光円錐ゲージを取ることで μ から光円錐座標の I に制限されます。

ゴーストが出てくるのは簡単に分かります。消滅演算子によって状態を

$$\alpha_m^\mu|0;p^\mu\rangle = 0 \quad\ (m>0\ ,\ p^\mu|0;p^\mu\rangle = p^\mu|0;p^\mu\rangle)$$

として定義します。このとき $\mu=0$ とすれば、交換関係

$$[\alpha_m^0, \alpha_{-m}^0] = m\eta^{00} = -m$$

から

$$\langle 0;p^\mu|\alpha^0_m\alpha^0_{-m}|0;p^\mu\rangle = \langle 0;p^\mu|([\alpha^0_m,\alpha^0_{-m}]+\alpha^0_{-m}\alpha^0_m)|0;p^\mu\rangle = -m\langle 0;p^\mu|0;p^\mu\rangle$$

よって、$\langle 0;p^\mu|\alpha^0_m(\alpha^0_m)^\dagger|0;p^\mu\rangle < 0$ から負のノルムとなるので、ゴーストとなります。
　L_n とハミルトニアンも

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}\cdot\alpha_m \quad (n\neq 0,\ \alpha_{-m}\cdot\alpha_m = \alpha^\mu_{-m}\alpha_{m\mu})$$

$$H = L_0 = \frac{1}{2}\sum_m :\alpha_{-m}\cdot\alpha_m:$$

となって、Virasoro 代数は変更されずに

$$[L_m,L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

と与えられます (η^{II} が $\eta^\mu_{\ \mu}$ になるので第二項は D)。
　一旦、古典論に戻ります。エネルギー・運動量テンソル T_{ab} が

$$T_{ab} = -\frac{T_0}{c}(-\frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\partial_iX^\mu\partial_jX_\mu + \partial_aX^\mu\partial_bX_\mu)$$

となっていることを考えると、X^μ の展開係数である α^μ_m で構成される古典的な Virasoro 生成子 L_n によって $T_{ab}=0$ の条件を

$$L_n = 0$$

と書くことができ (下の補足参照)、これを Virasoro 拘束条件と言います。これはゲージ場でのゲージ固定に対応するので、ゲージ場と同じように量子化したときの状態に対する条件は、L_n を演算子化して、物理的な状態を $|\psi\rangle$ に作用させればいいので $L_n|\psi\rangle = 0$ と書けます。ただし、古典的な条件 $L_0 = 0$ は L_0 を演算子化したときに正規積による定数 a が必要となるために $L_0 - a$ と書き換える必要があります。なので、物理的な状態 $|\psi\rangle$ に対する条件は

$$L_n|\psi\rangle = 0 \quad n>0$$

$$(L_0-a)|\psi\rangle = 0$$

となります。これは QED での Gputa-Bleuler 条件と同じです。このようにして Virasoro 拘束条件を与え、さらにゲージ場のように物理的な状態が負のノルムを持たない (ゴーストが出てこない) という条件を与えてやることで、$D\leq 26, a\leq 1$ であればいいということが出てきます。このため、$D=26$ を弦 (ボソン弦) の臨界次元 (critical dimension) と言います。光円錐ゲージでは負のノルムが存在しないので、状態のノルムを見なくてもローレンツ不変性から $D=26, a=1$ が出てきたということです。
　別の非常に面倒なだけの手順からも $D=26, a=1$ を得ることが出来ます。$D=26$ と $a=1$ はローレンツ不変性の要求から出てきたので、ローレンツ群の代数を満たせという条件から出てくるはずです。これを見るためにローレンツ変換の生成子を求めます。生成子はネーターカレントによる保存量なので (場の量子論の「生成子・ポアンカレ群」参照)、ローレンツ変換によるネーターカレントを出します。
　ローレンツ変換は

$$X^\mu \ \Rightarrow\ X^\mu + \epsilon^{\mu\nu}X_\nu$$

と与えられます。$\epsilon^{\mu\nu}$ は反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu}=-\epsilon^{\nu\mu}$ です。これをネーターカレントの定義に入れれば

$$\epsilon^{\mu\nu}J^a_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a X^\mu)}\delta X^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a X^\mu)}\epsilon^{\mu\nu}X_\nu\quad(a=\tau,\sigma)$$

ラグランジアンの微分部分は「相対論的な弦」で出てきたように P^a_μ なので

$$\epsilon^{\mu\nu}J^a_{\mu\nu}=\epsilon^{\mu\nu}P^a_\mu X_\nu=-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(X_\mu P^a_\nu-X_\nu P^a_\mu)$$

$\epsilon^{\mu\nu}$ の反対称性を使って変形しています。$-1/2$ を省いて

$$\mathcal{M}^a_{\mu\nu}=X_\mu P^a_\nu-X_\nu P^a_\mu$$

これをローレンツ変換に対するネーターカレントと定義します。運動量と同じように、これも τ 一定として $\mathcal{M}^\tau_{\mu\nu}$ を σ 積分した

$$M_{\mu\nu}=\int d\sigma\mathcal{M}^\tau_{\mu\nu}=\int d\sigma(X_\mu P^\tau_\nu-X_\nu P^\tau_\mu)$$

これが保存量となります。

ローレンツ不変であるかはローレンツ変換の演算子 (生成子) である $M_{\mu\nu}$ が

$$[M^{\mu\nu},M^{\alpha\beta}]=i\eta^{\mu\alpha}M^{\nu\beta}+i\eta^{\nu\beta}M^{\mu\alpha}-i\eta^{\mu\beta}M^{\nu\alpha}-i\eta^{\nu\alpha}M^{\mu\beta}$$

という代数に従っているかを確かめればいいです (ここでの $M^{\mu\nu}$ の定義から、場の量子論の「ローレンツ群と $SL(2,C)$」の $M^{\mu\nu}$ の符号を反転させています)。$M_{\mu\nu}$ は

$$P^\tau_\mu=T_0\dot{X}_\mu\qquad(\dot{X}_\mu=\frac{\partial}{\partial\tau}X_\mu)$$

から

$$M^{\mu\nu}=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma(X^\mu\dot{X}^\nu-X^\nu\dot{X}^\mu)$$

$X^\mu\dot{X}^\nu$ は、X^μ が

$$X^\mu=x^\mu_0+\sqrt{2\alpha'}\alpha^\mu_0\tau+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

$\dot{X}^\nu$ が

$$\begin{aligned}\dot{X}^\nu&=\sqrt{2\alpha'}\alpha^\nu_0+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq0}\frac{1}{n}(-in)\alpha^\nu_n e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\\&=\sqrt{2\alpha'}\alpha^\nu_0+\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq0}\alpha^\nu_n e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\\&=\sqrt{2\alpha'}\alpha^\nu_0+\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq0}\alpha^\nu_{-n}e^{+in\tau}\cos(n\sigma)\end{aligned}$$

となっていることから

$$\begin{aligned}X^\mu \dot{X}^\nu = \sqrt{2\alpha'}x_0^\mu\alpha_0^\nu + i2\alpha'\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu\alpha_{-n}^\nu\cos^2(n\sigma)\\
+\sqrt{2\alpha'}x_0^\mu\sum_{n\neq 0}\alpha_{-n}^\nu e^{in\tau}\cos(n\sigma) + 2\alpha'\alpha_0^\mu\alpha_0^\nu\tau\\
+2\alpha'\tau\sum_{n\neq 0}\alpha_0^\mu\alpha_{-n}^\nu e^{in\tau}\cos(n\sigma) + i2\alpha'\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu\alpha_0^\nu e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\end{aligned}$$

$M^{\mu\nu}$ は保存量なので τ 依存していないことから、2 行目と 3 行目は無視して

$$X^\mu \dot{X}^\nu = \sqrt{2\alpha'}x_0^\mu\alpha_0^\nu + i2\alpha'\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu\alpha_{-n}^\nu\cos^2(n\sigma)$$

$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\nu$ を使っています。$X^\nu\dot{X}^\mu$ は μ と ν をひっくり返せばいいだけなので

$$\begin{aligned}M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^\pi (X^\mu\dot{X}^\nu - X^\nu\dot{X}^\mu)\\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu\alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu\alpha_{-n}^\mu)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(n\sigma)d\sigma\\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu\alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu\alpha_{-n}^\mu)\\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu + \frac{i}{2}(\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu\alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu\alpha_{-n}^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu\alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu\alpha_{-n}^\mu))\\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu + \frac{i}{2}(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^\mu\alpha_{n}^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_{n}^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu\alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu\alpha_{-n}^\mu))\\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu + \frac{i}{2}(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^\mu\alpha_{n}^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_{n}^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}([\alpha_n^\mu,\alpha_{-n}^\nu] + \alpha_{-n}^\nu\alpha_n^\mu - [\alpha_n^\nu,\alpha_{-n}^\mu] - \alpha_{-n}^\mu\alpha_n^\nu))\\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu + \frac{i}{2}(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^\mu\alpha_{n}^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_{n}^\mu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^\nu\alpha_n^\mu - \alpha_{-n}^\mu\alpha_n^\nu))\\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^\mu\alpha_{n}^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_{n}^\mu)\end{aligned}$$

「光円錐ゲージでの開弦の量子化」で光円錐ゲージを取る前でも X^μ と $\Pi^\mu = P^{\tau\mu}$ のポアソン括弧を $\eta^{\mu\nu}$ としたことから分かるように、$\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\nu$ の交換関係は μ,ν の添え字に関して対称です。

これを使って交換関係を計算するんですが、光円錐ゲージにおいて

$$[M^{-I}, M^{-J}] = i\eta^{--}M^{IJ} + i\eta^{IJ}M^{--} - i\eta^{-J}M^{I-} - i\eta^{I-}M^{-J} = 0$$

を満たしているかを確かめればいいです。計量の形から第一項、第三項、第四項は 0 で、第二項は $M^{\mu\nu}$ の反対称性から 0 です。これの計算は交換関係を駆使して長々と計算していくだけです。結果は

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha'(p^+)^2}\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha^I_{-m}\alpha^J_m - \alpha^J_{-m}\alpha^I_m)(m(1-\frac{D-2}{24}) + \frac{1}{m}(\frac{D-2}{24} - a))$$

となります。ここでは出していない交換関係も使っています。これが 0 になるためには、$D = 26, a = 1$ でなければいけないことが分かり、上で出したのと同じ結果を出します。これの導出は面倒なので、省きましたが、Gleb Arutyunov のホームページ http://www.staff.science.uu.nl/ aruty101/での teaching の Lectures on string theory にかなり詳しく書いてあります (p59)。記号の定義も大体同じです。

・補足

L_n はエネルギー・運動量テンソルから与えられることを見ておきます。先に必要なものを並べていきます。まず、エネルギー・運動量テンソル T_{ab} から

$$2T_{++} = T_{00} + T_{01}\ ,\ 2T_{--} = T_{00} - T_{01}$$

というのを定義します ($T_{00} = T_{11}, T_{01} = T_{10}$)。エネルギー・運動量テンソル T_{ab} は

$$T_{ab} = -(\frac{1}{2}g_{ab}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X_\mu - \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)$$

$$(g_{ab} = (-1, +1),\ \dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \tau}\ ,\ X^{\mu\prime} = \frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \sigma})$$

と定義します。T_{00}, T_{01} でマイナスが出てこないように「相対論的な弦」での定義から符号を反転させ、係数が煩わしいので省いて定義しています。

T_{00}, T_{01} は

$$T_{00} = -(\frac{1}{2}g_{00}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X_\mu - \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu) = \frac{1}{2}\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{1}{2}X^{\mu\prime}X'_\mu$$

$$T_{01} = -(\frac{1}{2}g_{01}g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X_\mu - \partial_0 X^\mu \partial_1 X_\mu) = \dot{X}^\mu X'_\mu$$

となっているので、T_{++} は

$$2T_{++} = T_{00} + T_{01} = \frac{1}{2}\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{1}{2}X^{\mu\prime}X'_\mu + \dot{X}^\mu X'_\mu = \frac{1}{2}(\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime})(\dot{X}_\mu + X'_\mu)$$

T_{--} は

$$2T_{--} = T_{00} - T_{01} = \frac{1}{2}\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{1}{2}X^{\mu\prime}X'_\mu - \dot{X}^\mu X'_\mu = \frac{1}{2}(\dot{X}^\mu - X^{\mu\prime})(\dot{X}_\mu - X'_\mu)$$

ここで拘束条件 $T_{ab} = 0$ と、X^μ のフーリエ展開の係数によって Virasoro 生成子が作られていることから、$L_n = 0$ を T_{++}, T_{--} から作れると予想できます。

拘束条件を展開係数で書いてみます。X^μ は

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu_0 + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

$$= x^\mu_0 + 2\alpha' p^\mu \tau + i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha^\mu_n e^{-in(\tau-\sigma)} + \alpha^\mu_n e^{-in(\tau+\sigma)})$$

第二項は

$$\sum_{n\neq 0} e^{in\sigma} + \sum_{n\neq 0} e^{-in\sigma} = 2\sum_{n\neq 0}\cos(n\sigma)$$

を使っています。拘束条件は X^μ を使えば

$$(\dot{X}^\mu \pm X^{\mu\prime})^2 = 0$$

となっているので、X^μ の展開を入れた ($\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$)

$$\begin{aligned}
\dot{X}^\mu \pm X^{\mu\prime} &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}(-i\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}e^{in\sigma} - i\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}) \\
&\quad \pm i\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}(i\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}e^{in\sigma} - i\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}) \\
&= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau\pm\sigma)} \\
&= \sqrt{2\alpha'}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau\pm\sigma)}
\end{aligned}$$

から

$$(\dot{X}^\mu \pm X^{\mu\prime})^2 = 2\alpha'\sum_{m,n}\eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu\alpha_n^\nu e^{-i(m+n)\tau}e^{\mp i(m+n)\sigma}$$

となります。ここで、L_n にはフーリエ成分の添え字 n がいることから

$$\int_0^\pi d\sigma\ e^{in\sigma}(\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime})^2$$

というフーリエ変換を行ってみます。ただし、これでは

$$\int_0^\pi d\sigma\ e^{in\sigma} = \frac{1}{in}\big[e^{inx}\big]_0^\pi \neq 0 \qquad (n\neq 0)$$

であるために、$e^{in\sigma}$ が直交していません。なので、「光円錐ゲージでの開弦の量子化」で出てきたように σ の範囲を $-\sigma \sim +\sigma$ に取り直す必要があります。範囲を取り直して、$\tau = 0$ として計算してみると

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}(\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime})^2 = 2\alpha' \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ \sum_{m,l} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_l^\nu e^{-im\sigma} e^{-il\sigma} e^{in\sigma}$$
$$= 2\alpha' \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ \sum_{m,l} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_l^\nu e^{-i(m+l-n)\sigma}$$
$$= 2\alpha' \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ 2\pi \sum_{m,l} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_l^\nu \delta_{l,n-m}$$
$$= 4\pi\alpha' \sum_m \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_{n-m}^\nu$$

これに Virasoro 生成子 L_n の定義を使えば

$$L_n = \frac{1}{8\pi\alpha'}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}(\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime})^2 = \frac{1}{2}\sum_m \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_{n-m}^\nu$$

となります。時空の添え字が μ であって I でないのはゲージを選んでいないからです。光円錐ゲージを取ることで μ から I に制限されます。

ここで、$\tau = 0$ での T_{++}, T_{--} が

$$T_{++} = \frac{2\alpha'}{4}\sum_{m,n} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_n^\nu e^{-im\sigma} e^{-in\sigma}\ ,\ T_{--} = \frac{2\alpha'}{4}\sum_{m,n} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_n^\nu e^{im\sigma} e^{in\sigma}$$

となっていることから

$$\int_0^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}T_{++} + \int_0^{\pi} d\sigma\ e^{-in\sigma}T_{--}$$
$$= \frac{\alpha'}{2}\int_0^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}\sum_{m,l} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_l^\nu e^{-i(m+l)\sigma} + \frac{\alpha'}{2}\int_{-\pi}^{0} d\sigma\ e^{in\sigma}\sum_{m,l} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_l^\nu e^{-i(m+l)\sigma}$$
$$= \frac{\alpha'}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\ \sum_{m,l} \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_l^\nu e^{-i(m+l)\sigma} e^{in\sigma}$$
$$= \pi\alpha' \sum_m \eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu \alpha_{n-m}^\nu$$

よって、Virasoro 生成子は

$$L_n = \frac{1}{2\pi\alpha'}(\int_0^{\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}T_{++} + \int_0^{\pi} d\sigma\ e^{-in\sigma}T_{--})$$

と書けます。というわけで、L_n をエネルギー・運動量テンソルで書けることになり、拘束条件はこれを使って $L_n = 0$ と出来ることになります。

閉弦でもエネルギー・運動量テンソルで書けます。閉弦では、「光円錐ゲージでの閉弦の量子化」で求められる結果を使えば

$$\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \overline{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}\ ,\ \dot{X}^\mu - X^{\mu\prime} = \sqrt{2\alpha'}\sum_n \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

と計算できます。これらから

$$T_{++} = \frac{1}{4}(\dot{X}^\mu + X^{\mu\prime})^2 = \frac{\alpha'}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_m^\mu\overline{\alpha}_n^\nu e^{-i(m+n)\tau}e^{-i(m+n)\sigma}$$

$$T_{--} = \frac{1}{4}(\dot{X}^\mu - X^{\mu\prime})^2 = \frac{\alpha'}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu\alpha_n^\nu e^{-i(m+n)\tau}e^{i(m+n)\sigma}$$

T_{++} を $\tau = 0$ でフーリエ変換すれば (閉弦では σ の範囲は $0 \sim 2\pi$ なので σ の範囲を変更する必要がない)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}T_{++} &= \frac{\alpha'}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\ e^{in\sigma}\sum_{m,l}\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_m^\mu\overline{\alpha}_l^\nu e^{-i(m+l)\sigma} \\
&= \frac{\alpha'}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\ \sum_{m,l}\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_m^\mu\overline{\alpha}_l^\nu e^{-i(m+l-n)\sigma} \\
&= \pi\alpha'\sum_{m,l}\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_m^\mu\overline{\alpha}_l^\nu\delta_{l,n-m} \\
&= \pi\alpha'\sum_{m}\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_m^\mu\overline{\alpha}_{n-m}^\nu \\
&= 2\pi\alpha'\overline{L}_n
\end{aligned}$$

T_{--} では

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\sigma\ e^{-in\sigma}T_{++} &= \frac{\alpha'}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\ e^{-in\sigma}\sum_{m,l}\eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu\alpha_l^\nu e^{i(m+l)\sigma} \\
&= \frac{\alpha'}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\sum_{m,l}\eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu\alpha_l^\nu e^{i(m+l-n)\sigma} \\
&= \pi\alpha'\sum_{m}\eta_{\mu\nu}\alpha_m^\mu\alpha_{n-m}^\nu \\
&= 2\pi\alpha' L_n
\end{aligned}$$

となります。